

Rezumatul în limba română al tezei de doctorat
CONTRIBUȚII LA STUDIUL UNOR PROBLEME DE OPTIMIZARE
VECTORIALĂ CU ORDINE VARIABILĂ

Elena-Andreea Acsinte căsătorită Florea

Tematica tezei de doctorat este legată de studiul problemelor de optimizare vectorială multivocă cu structuri de ordine variabilă, ce aparține domeniului mai vast al analizei variaționale neliniare, cu multiple aplicații atât din punct de vedere teoretic, cât și practic.

Teoria optimizării scalare s-a dezvoltat la început într-un cadru neted, în care diferențiabilitatea era o ipoteză uzual acceptată. Unul dintre scopurile matematicii moderne este de a optimiza modele matematice ce apar în practică, iar în multe probleme practice obiectele de modelare matematică sunt nenetede. Din acest motiv, s-a dorit o slăbire a ipotezelor de diferențiabilitate, un prim pas în acest sens fiind dezvoltarea analizei convexe. Acest proces de slăbire a ipotezelor de diferențiabilitate a continuat prin introducerea diverselor obiecte de diferențiabilitate generalizată, printre care amintim aici conurile tangente împreună cu epi-derivatele direcționale și derivatele asociate, respectiv conurile normale împreună cu subdiferențialele și coderivatele asociate.

Pe lângă programarea scalară care are o istorie bogată fiind tratată în diverse contexte de-a lungul vremii, programarea vectorială sau multicriterială este cunoscută de mult timp în domeniul economic, bazele acesteia fiind puse în 1896 de către Vilfredo Pareto. În ultimele trei decenii s-a acordat o atenție deosebită optimizării vectoriale, fapt probat prin implicarea activă în acest câmp de cercetare a unor matematicieni cu o mare vizibilitate internațională, printre care îi amintim pe J. M. Borwein, J. Jahn, B. Jiménez, D. T. Luc, B. S. Mordukhovich, V. Novo, C. Tammer, L. Thibault, C. Zălinescu. În optimizarea vectorială, noțiunile de minim (sau de eficiență) sunt considerate în raport cu o relație de ordine parțială indusă de un con convex ascuțit propriu.

Prezenta teză de doctorat este consacrată studiului unor probleme de optimizare vectorială, ale căror soluții sunt definite în raport cu o relație de ordine parțială indusă de o întreagă familie de conuri convexe ascuțite proprii. Această familie este descrisă cu ajutorul unei structuri de ordine variabilă dată de o multifuncție (numită multifuncție de ordine), care asociază fiecărui element al spațiului obiectiv un con convex ascuțit propriu. Ideea structurilor de ordine variabilă a fost introdusă în 1974 de Po Lung Yu, iar în ultimele două decenii, interesul pentru acestea a crescut considerabil, fapt datorat apariției în literatură a unor aplicații în științele medicale: înregistrarea imaginilor medicale, terapia prin modularea intensității radiației, tomografia prin rezonanță magnetică, precum și în științele comportamentale sau economice.

Pentru început, în cadrul acestei lucrări introducem notațiile, noțiunile și rezultatele utilizate. Apoi, prezentăm ideea unei structuri de ordine variabilă și introducem mai multe tipuri de soluții pentru problema minimizării unei multifuncții ce ia valori într-un spațiu ordonat de o structură de ordine variabilă, atunci când argumentul acesteia parcurge o mulțime arbitrară (numită restricție geometrică). Mai exact, utilizând abordarea vectorială, definim următoarele concepte de minim asociate problemei vectoriale considerate: o noțiune de eficiență sharp pentru multifuncții, conceptele de punct local (slab) nondominant, respectiv local (slab) robust eficient și o noțiune de eficiență de tip Henig. Totodată demonstrăm și ilustrăm prin exemple și contraexempluri proprietăți ale

acestor concepte de minim. Menționăm aici un rezultat de scalarizare pentru noțiunea de eficiență sharp obținut prin intermediul funcționalei Gerstewitz (Tammer) și teoremele de penalizare de tip Clarke pentru punctele de eficiență robustă și respectiv Henig.

Un aspect important al minimalității îl constituie incompatibilitatea dintre aceasta și deschiderea aplicațiilor, fiind cunoscut chiar din cazul scalar că o funcție nu poate fi deschisă într-un punct de extrem. Demonstrăm astfel de rezultate de incompatibilitate în cadrul structurilor de ordine variabilă. Unul dintre obiectivele din această lucrare este obținerea unor condiții necesare de optimalitate pentru soluțiile de minim menționate mai sus. În atingerea acestui scop, întrucât minimalitatea este incompatibilă cu un concept de deschidere ce poate include mai multe aplicații, obținem condiții suficiente pentru o deschidere mixtă a unui număr finit de multifuncții. Abordarea în obținerea acestor condiții suficiente urmează două direcții diferite: pe de o parte utilizează obiecte de diferențiere generalizată definite pe spații primale, iar pe de altă parte, o investigație de același tip este prezentată în cadrul spațiilor duale. Cu toate că în ambele situații aplicăm Principiul Variațional al lui Ekeland, tehnicile celor două direcții de studiu (pe spații primale, respectiv duale) sunt diferite.

Urmând direcția deschisă de Teorema lui Fermat, ne dorim să obținem condiții necesare și suficiente de optimalitate pentru conceptele de minim menționate mai sus. Ținând cont de rezultatele de incompatibilitate și penalizare, aplicând rezultatul de deschidere mixtă demonstrat anterior pe spații primale, obținem condiții necesare de optimalitate, în termeni de derivate Bouligand, pentru punctele de eficiență Henig. Tot pentru acest concept de minim, aplicând de data aceasta rezultatul de deschidere mixtă pe spații duale, obținem condiții necesare de optimalitate referitoare la o sumă de coderivate Fréchet, respectiv Mordukhovich pentru multifuncțiile obiectiv și de ordine. Atunci când condițiile de optimalitate sunt obținute pentru problema cu constrângeri, la suma menționată anterior apar, fie conul normal Mordukhovich, fie subdiferențiala Mordukhovich. Tot în termeni de coderivate Fréchet și Mordukhovich deducem condiții necesare de optimalitate pentru noțiunile de eficiență sharp și robustă. Totodată, prezentăm condiții necesare și suficiente de optimalitate pe spații primale pentru conceptul de punct slab nondominant. Problemele abordate pentru studiul condițiilor necesare de optimalitate sunt cele în care aplicația obiectiv este dată ca o sumă, respectiv o compunere de două multifuncții și sunt obținute în termeni de derivate de ordin superior condiții de optimalitate. Pentru aceasta, demonstrăm în prealabil reguli de sumare și compunere pentru derivatele de ordin superior considerate. Referitor la condițiile suficiente de optimalitate, acestea utilizează derivate de ordin superior și au loc pe spații finit dimensionale.

Punctele de minim considerate mai sus sunt legate de probleme de optimizare vectorială fie cu restricții geometrice, fie fără restricții. Pe baza unui principiu de extremalitate pe spații Asplund obținem, în termeni de coderivate și conuri normale, condiții necesare de optimalitate pentru o soluție nondominantă a unei probleme de optimizare vectorială ce conține atât restricții geometrice, cât și funcționale.

De asemenea, în cadrul lucrării de față studiem unele inegalități vectoriale variaționale. Este cunoscut faptul că investigarea acestui tip de probleme este concentrată pe obținerea unor condiții suficiente pentru existența soluțiilor. În ceea ce ne privește, deducem condiții necesare de existență pentru problemele generalizate de echilibru în cazul standard al ordinii fixe, respectiv în cazul structurilor de ordine variabilă.