Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi
Facultatea de Matematică

APLICAŢII POLINOMIALE BIARMONICE ÎNTRE SFERE

Rezumatul tezei de doctorat

Coordonator,
Prof. Dr. Cezar Oniciuc

Student doctorand,
Rareş-Mircea Ambrosie

Iaşi, 2025

CUPRINS

INTRODUCERE

Scopul principal al acestei introduceri este de a prezenta câteva idei generale care au încurajat studiul aplicațiilor polinomiale biarmonice între sfere și, ulterior, de a descrie pe scurt noile rezultate ale acestei teze.

Aplicațiile biarmonice reprezintă o generalizare naturală a binecunoscutelor aplicații armonice. După cum au sugerat J. Eells și J.H. Sampson în [33, 34], sau J. Eells și L. Lemaire în [31], aplicațiile biarmonice $\phi : M^m \to N^n$ între două varietăți Riemanniene sunt puncte critice ale funcţionalei bienergiei

$$E_2 : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}, \qquad E_2(\phi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\phi)|^2 \ v_g,$$

unde M este închisă și $\tau(\phi) = \mathrm{trace}\nabla d\phi$ este câmpul de tensiune asociat aplicaţiei ϕ. În 1986, G.Y. Jiang a demonstrat în [40, 41] că aplicațiile biarmonice sunt caracterizate de anularea câmpului de bitensiune, unde câmpul de bitensiune asociat este dat de

$$\tau_2(\phi) = -\Delta\tau(\phi) - \mathrm{trace}R^N\left(d\phi(\cdot), \tau(\phi)\right) \mathrm{d}\phi(\cdot).$$

Ecuația $\tau_2(\phi) = 0$ se numește ecuația biarmonică și este o ecuație eliptică semiliniară de ordinul patru.

Orice aplicație armonică este, evident, biarmonică. Așadar suntem interesați de studiul aplicațiilor biarmonice care nu sunt armonice. Pentru a evita orice confuzie, vom folosi termenul propriu biarmonice pentru aplicațiile care sunt biarmonice, dar nu sunt armonice.

G.Y. Jiang a demonstrat în [40, 41], folosind o formulă simplă de tip Bochner-Weitzenböck, că dacă M este închisă și N are curbură secțională negativă sau nulă, atunci o aplicație biarmonică ϕ de la M la N trebuie să fie armonică. Astfel, efortul s-a concentrat pe studiul aplicațiilor propriu biarmonice în spații cu curbură secțională pozitivă, în special în sferele euclidiene, care sunt spații cu curbură pozitivă constantă. Pentru aceste varietăți codomeniu, de-a lungul anilor, au fost obținute numeroase exemple și rezultate de clasificare (vezi, de exemplu, [14, 17, 32, 48, 50, 57, 59, 63]). Chiar dacă cele mai multe exemple și rezultate de clasificare pentru aplicațiile biarmonice (în sferele euclidiene) au fost obținute în teoria subvarietăților (vezi, de exemplu, [37, 52, 56]), există și alte contexte geometrice în care aplicațiile biarmonice au aplicații interesante (vezi, de exemplu, [9–12, 49, 54, 55] și, foarte recent, [18]).

În afara imersiilor izometrice propriu biarmonice, care sunt subvarietăți propriu biarmonice, și a imersiilor conforme propriu biarmonice, au existat studii privind biarmonicitatea aplicațiilor $\varphi : M \to \mathbb{S}^n$ care provin din submersii armonice ψ definite pe M și cu valori într-o hipersferă mică $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ de rază r a sferei euclidiene unitare $\mathbb{S}^n$. Exemple de astfel de aplicații propriu biarmonice au fost obținute considerând ψ ca fiind fibrarea Hopf $H : \mathbb{S}^{2(n-1)-1} \to \mathbb{S}^{n-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$, $n = 3, 5, 9$ (vezi [50]). Inspirându-ne din aceste exemple ale căror componente, ca funcții în $\mathbb{R}^{n+1}$, sunt polinoame omogene, în această teză studiem biarmonicitatea aplicațiilor $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ ale căror componente sunt polinoame omogene de grad k. Observăm că aplicațiile polinomiale omogene între sferele euclidiene sunt foarte importante în teoria aplicațiilor armonice deoarece, atunci când sunt armonice ca funcții vectoriale între spații euclidiene, ele furnizează toate aplicațiile armonice cu densitate de energie constantă între sferele euclidiene corespunzătoare de codimensiune 1 (vezi, de exemplu, [13] și [32]). Astfel de aplicații au fost studiate de P. Baird, S. Chang, Y.-L. Ou, G. Toth, C. Wang, R. Wood, F. Wu, P. Yiu și X. Zhao în diverse contexte, în special în ceea ce privește aplicațiile lor în teoria aplicațiilor biarmonice și armonice (vezi, de exemplu, [13, 27, 39, 45, 54, 57, 59–61, 63–66] etc.).

Un aspect interesant este studiul aplicațiilor biarmonice în anumite clase de aplicații în care se știe că nu există aplicații armonice. De exemplu, este bine cunoscut că nu există aplicații armonice complete de la $\mathbb{S}^4$ la $\mathbb{S}^5$ (adică imaginea aplicației nu se află într-o hipersferă mare $\mathbb{S}^4$ a lui $\mathbb{S}^5$) ale căror componente sunt polinoame omogene de grad 2. În schimb, folosind un exemplu de aplicație armonică completă de la $\mathbb{S}^4$ la $\mathbb{S}^4$ și metoda din [47], putem construi o aplicație biarmonică completă $\phi : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^5$ de tipul menționat mai sus (vezi Teorema 4.2).

Această teză se bazează pe cinci articole și constă din cinci capitole, fiecare dedicat unui subiect de cercetare semnificativ.

În **primul capitol** prezentăm notațiile și reamintim câteva rezultate de bază care vor fi utilizate pe parcursul întregii teze. Începem cu operatori pe fibrate vectoriale, apoi prezentăm aplicațiile armonice, funcțiile proprii, aplicațiile biarmonice, câteva rezultate privind aplicațiile polinomiale între sfere și încheiem cu polinoamele Ferus-Karcher-Münzner.

Capitolul al doilea este împărțit în două secțiuni. În prima secțiune, oferim o formulă de caracterizare a biarmonicității în cazul cel mai general al aplicațiilor care iau valori în sferele euclidiene (vezi Teorema 2.1). Ca aplicație, pornind de la torul standard minimal al lui Clifford în $\mathbb{S}^3$ și, efectuând o transformare simplă a domeniului, obținem o aplicație propriu biarmonică în $\mathbb{S}^3$ (vezi Propoziția 2.4). În a doua secțiune, stabilim o formulă de caracterizare pentru aplicațiile biarmonice φ care iau valori în sfera euclidiană, dar a căror imagine se află într-o hipersferă mică, astfel încât poate fi scrisă ca $\varphi = \mathrm{i} \circ \psi$, unde i reprezintă incluziunea canonică a hipersferei mici în sfera ambientală (vezi Teorema 2.6). Această formulă este o generalizare a unui rezultat anterior obținut de E. Loubeau și C. Oniciuc în [47]. Apoi, ca aplicație, obținem câteva rezultate care leagă biarmonicitatea aplicației φ de armonicitatea aplicației ψ și de raza hipersferei mici.

Capitolul al treilea este format din două secțiuni. În prima secțiune, considerăm cazul aplicațiilor între sfere astfel încât, ca funcții vectoriale între spațiile euclidiene ambientale, fiecare dintre componentele lor este un polinom omogen de grad k, și calculăm câmpul lor de bitensiune (vezi Teorema 3.1). Acest rezultat ne permite să calculăm eficient câmpul de bitensiune al aplicației între sfere, deoarece este exprimat exclusiv în termeni de funcția vectorială corespunzătoare dintre spațiile euclidiene. Calculând mai întâi acești termeni în cadrul familiar euclidian, îi putem restricționa apoi la sferă, simplificând procesul general. Ca aplicație, considerăm o construcție specială a unei aplicații polinomiale omogene de grad $k+1$ între sfere, folosind aplicații polinomiale omogene armonice de grad k între sfere și studiem biarmonicitatea aplicației nou construite (vezi Teorema 3.9). În a doua secțiune, considerăm aplicațiile date de gradientul polinoamelor Ferus-Karcher-Münzner, care sunt aplicații polinomiale omogene de grad 3 între sfere de aceeași dimensiune. Folosind Teorema 3.1, calculăm câmpul lor de bitensiune și studiem biarmonicitatea acestora.

Capitolul al patrulea începe prin a particulariza teorema principală din capitolul precedent (Teorema 3.1) pentru cazul aplicațiilor polinomiale omogene de grad $k=2$ între sfere, care sunt formele pătratice, și se obține o expresie mai simplă a câmpului de bitensiune (vezi Teorema 4.7). Folosind rezultatul cunoscut al lui R. Wood privind caracterizarea formelor pătratice între sfere (vezi [64]), obținem clasificarea tuturor formelor pătratice propriu biarmonice de la $\mathbb{S}^1$ la $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$ (vezi Teorema 4.11), de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^2$, $m \geq 2$ (vezi Teorema 4.13) și de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^3$, $m \geq 2$ (vezi Teorema 4.14). Pentru a obține aceste rezultate, determinăm toate formele pătratice de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^2$ și de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^3$, apoi identificăm care dintre acestea sunt biarmonice. Încheiem prima secțiune cu o Problemă Deschisă referitoare la structura formelor pătratice propriu biarmonice între sfere. Este bine cunoscut faptul că există forme pătratice cu densitate de energie neconstantă, însă o formă pătratică este armonică dacă și numai dacă densitatea sa de energie este o anumită constantă (vezi Propoziția 4.4). În mod firesc, se ridică întrebarea dacă un rezultat similar este valabil și pentru formele pătratice biarmonice. A doua secțiune a capitolului oferă un răspuns afirmativ și demonstrează că o formă pătratică între sferele euclidiene unitare este propriu biarmonică dacă și numai dacă densitatea sa de energie este egală cu $(m+1)/2$, unde m este dimensiunea sferei domeniu (vezi Teorema 4.15). În a treia secțiune, se demonstrează că orice formă pătratică propriu biarmonică se obține dintr-o formă pătratică care, ca aplicație armonică, are imaginea într-o hipersferă mică a sferei codomeniu, confirmând ipoteza din Problema Deschisă (vezi Teorema 4.20). Acest rezultat de rigiditate permite deducerea unor rezultate de clasificare pentru formele pătratice propriu biarmonice pe baza celor cunoscute pentru formele pătratice armonice (vezi Teoremele 4.22 și 4.23). Motivați de rezultatul de rigiditate obținut pentru formele pătratice biarmonice, ne întrebăm dacă există un rezultat analog și în cazul λ-biarmonic. Răspunsul este afirmativ și încheiem acest capitol cu o secțiune dedicată formelor pătratice λ-biarmonice. Mai întâi determinăm expresia câmpului de λ-bitensiune (vezi Teorema 4.24), apoi analizăm densitatea de energie a formelor pătratice λ-biarmonice (vezi Teorema 4.25) și încheiem cu clasificarea completă a acestora (vezi Teorema 4.26).

În [47], autorii au studiat imersii diagonale biarmonice $\varphi : (M^m, g) \to \mathbb{S}^{n_1+n_2+1}$, de forma $\varphi(p) = \mathrm{i} \circ (\alpha\varphi_1, \beta\varphi_2)$, unde i reprezintă incluziunea canonică a produsului standard $\mathbb{S}^{n_1}(\alpha r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(\beta r_2)$ în $\mathbb{S}^{n_1+n_2+1}$, iar $\varphi_1 : (M^m, g) \to \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ și $\varphi_2 : (M^m, g) \to \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ sunt imersii minimale. Aici, α și β sunt numere reale astfel încât $\alpha^2 r_1^2 + \beta^2 r_2^2 = 1$ și $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Biarmonicitatea imersiei diagonale φ implică $\alpha r_1 = \beta r_2 = 1/\sqrt{2}$. În special, s-a demonstrat că orice imersie propriu biarmonică ϕ cu curbură medie constantă dintr-o sferă bidimensională în $\mathbb{S}^n$ trebuie să fie suma diagonală a două imersii minimale Borüvka distincte şi este cunoscut faptul că imersiile minimale Borüvka sunt date prin aplicații polinomiale omogene.

Motivaţi de aceste rezultate, în **capitolul al cincilea** studiem aplicațiile diagonale de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^n$, de forma $\varphi = \mathrm{i} \circ (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1+n_2+1}$, unde i este incluziunea canonică a produsului $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ în $\mathbb{S}^{n_1+n_2+1}$, iar $\varphi_1 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ și $\varphi_2 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ sunt aplicații polinomiale omogene de grade k_1 și, respectiv, k_2, cu $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Calculăm câmpul de bitensiune al aplicației diagonale (vezi Teorema 5.5) și, ca aplicație, recuperăm (parțial) rezultatul de clasificare a curbelor biarmonice în $\mathbb{S}^3$. De asemenea, oferim un rezultat de construcție de aplicații propriu biarmonice diagonale folosind aplicații polinomiale armonice între sfere (vezi Teorema 5.6), ceea ce implică $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$ și necesită ca densitățile de energie ale aplicațiilor φ_1 și φ_2 să fie diferite. În continuare, descriem o metodă de construcție de aplicații propriu biarmonice de tip produs, folosind aplicații polinomiale armonice între sfere. Mai exact, considerăm $\varphi_1 : \mathbb{S}^{m_1} \to \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ și $\varphi_2 : \mathbb{S}^{m_2} \to \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, cu $r_1^2 + r_2^2 = 1$, ambele fiind aplicații polinomiale armonice de grade k_1 și, respectiv, k_2. Studem biarmonicitatea aplicației $\varphi = \mathrm{i} \circ (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{S}^{m_1} \times \mathbb{S}^{m_2} \to \mathbb{S}^{n_1+n_2+1}$, unde i este incluziunea canonică a produsului standard $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ în $\mathbb{S}^{n_1+n_2+1}$ (vezi Teorema 5.12). În acest caz, condiția de propriu biarmonicitate impune ca $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$ și cere ca densitățile de energie ale celor două componente să fie diferite. Aceste rezultate se încadrează în tematica construirii de noi aplicații biarmonice. Alte exemple în acest sens pot fi găsite în [54, 56].

În final, teza se încheie cu prezentarea mai multor probleme deschise apărute în mod natural din rezultatele prezentate și care vor constitui direcții de cercetare viitoare.

1

PRELIMINARII

În acest capitol introducem câteva notații și reamintim câteva rezultate fundamentale care vor fi utilizate pe parcursul tezei.

Vom sări peste definiţiile conceptelor de bază din geometria diferențiabilă și riemanniană, precum varietățile diferențială, fibratele vectoriale, conexiunile liniare și varietățile Riemanniene, deoarece presupunem că acestea sunt cunoscute. De asemenea, presupunem că toate varietățile, aplicațiile, fibratele vectoriale, secțiunile în fibrate vectoriale etc. sunt netede, iar varietățile sunt presupuse a fi conexe și fără frontieră.

Rezultatele prezentate în acest capitol sunt bine stabilite, iar expunerea noastră va urma în principal monografiile [13, 16, 24, 30, 51]. Menționăm că primele trei secțiuni ale acestui capitol sunt dedicate rezultatelor generale și clasice, frecvent întâlnite în literatură. Secțiunile 4, 5 şi 6 se concentrează asupra unor rezultate mai recente, pentru care sunt oferite referințe precise.

1.1 CÂTEVA REZULTATE GENERALE DESPRE VARIETĂȚI RIEMANNIENE

În această teză, prin varietate închisă înțelegem o varietate compactă fără frontieră. Chiar dacă lucrăm cu varietăți fără frontieră, pentru a evita orice confuzie vom folosi termenul închisă pentru varietățile compacte.

Folosim următoarele convenții de semn pentru laplacianul dur, care acționează asupra mulțimii $C\left(\phi^{-1}TN\right)$ a tuturor secțiunilor fibratului pull-back $\phi^{-1}TN$, și pentru câmpul tensorial de curbură:

$$\Delta^{\phi}\sigma = -\mathrm{trace}_g \nabla^2\sigma, \quad R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

De asemenea, prin $\mathbb{S}^m(r)$ notăm sfera euclidiană de dimensiune m și rază r. Atunci când $r = 1$, scriem $\mathbb{S}^m$ în loc de $\mathbb{S}^m(1)$.

1.2 APLICAȚII ARMONICE

Aplicațiile armonice oferă o extensie naturală a noțiunii clasice de funcții armonice în contexte în care atât domeniul, cât și codomeniul sunt varietăți. În această secțiune oferim definiția și proprietățile aplicațiilor armonice și trecem în revistă câteva rezultate bine cunoscute care vor fi utilizate în continuare în această teză.

Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicație netedă arbitrară între două varietăți Riemanniene. În această teză vom adopta următoarea convenție: atunci când varietatea țintă este $\mathbb{S}^n$, aplicația ϕ va fi notată cu φ.

Definiţia 1.1. Densitatea energiei aplicaţiei ϕ este funcţia netedă $e(\phi) : M \to [0, \infty)$ dată de

$$e(\phi) = \frac{1}{2} |\mathrm{d}\phi|^2,$$

şi, când M este închisă, energia lui ϕ este numărul nenegativ

$$E(\phi) = \int_M e(\phi)\, \overline{v}_g.$$

De acum înainte, atunci când discutăm despre energie, vom presupune că varietatea domeniu este închisă. În acest caz, putem defini funcționala energiei:

$$E : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}, \quad E(\phi) = \int_M e(\phi)\, \overline{v}_g.$$

Definiţia 1.2. Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicație între două varietăți Riemanniene. Aplicația ϕ se numește armonică dacă este un punct critic al funcționalei energiei, adică ϕ este armonică dacă pentru orice variație $\{\phi_t\}_t$ a lui ϕ avem:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \{E(\phi_t)\} = 0.$$

Teorema 1.3. *(Prima variație a energiei) Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicație netedă și fie $\{\phi_t\}_{t \in I}$ o variație netedă a lui ϕ. Atunci*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \{E(\phi_t)\} = -\int_M \langle \tau(\phi), V \rangle\, \overline{v}_g,$$

unde

$$\tau(\phi) = -\mathrm{d}^*\mathrm{d}\phi = \mathrm{trace}\nabla\mathrm{d}\phi \in C\left(\phi^{-1}TN\right)$$

este câmpul de tensiune al aplicației ϕ. Mai mult, ϕ este armonică dacă și numai dacă $\tau(\phi) = 0$.

Definiţia 1.4. O aplicație $\phi : (M, g) \to (N, h)$ se numește total geodezică dacă a doua sa formă fundamentală , $\nabla \mathrm{d}\phi$, este nulă.

Propoziţia 1.5. *O aplicație $\phi : (M, g) \to (N, h)$ este total geodezică dacă și numai dacă transformă geodezicele din M în geodezice din N.*

1.3 FUNCŢII PROPRII

După ce am discutat despre aplicațiile armonice, ne îndreptăm acum atenția asupra unei clase particulare de aplicații cunoscute sub numele de funcții proprii. În cele ce urmează, vom defini aceste funcții, vom explora proprietățile lor de bază și vom prezenta câteva teoreme care ilustrează utilitatea și limitele acestora.

Propoziţia 1.6. *Fie $\varphi : M \to \mathbb{S}^n$ o aplicație netedă și notăm $\Phi = \mathrm{i} \circ \varphi$, unde $\mathrm{i} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ este incluziunea canonică. Atunci φ este armonică dacă și numai dacă*

$$\Delta\Phi = \nu\Phi,$$

unde $\nu : M \to \mathbb{R}$. Mai mult, în acest caz, $\nu = -\left|\mathrm{d}\Phi\right|^2 = -\left|\mathrm{d}\varphi\right|^2$.

Definiţia 1.7. Numim o aplicație netedă $\varphi : M \to \mathbb{S}^n$ o funcție proprie dacă toate componentele lui $\phi = \mathrm{i} \circ \varphi$ sunt funcții proprii ale laplacianului pe M corespunzătoare aceleiași valori proprii.

Observăm că, din Propoziția 1.6, o aplicație netedă $\varphi : M \to \mathbb{S}^n$ este o funcție proprie dacă și numai dacă este armonică și are densitate de energie constantă.

Propoziţia 1.8. *Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ şi Φ restricţia lui F la sfera unitate $\mathbb{S}^m$. Atunci*

$$\tau\left(\Phi\right)_{x_0} = \tau\left(F\right)_{x_0} - m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1} F\left(tx_0\right) - \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=1} F\left(tx_0\right),$$

pentru orice $x_0 \in \mathbb{S}^m$.

Definiţia 1.9. Presupunem că $\tilde{f} : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ este un polinom omogen armonic de gradul $k \in \mathbb{N}$. Atunci, restricția $f = \tilde{f}_{|\mathbb{S}^m}$ este o funcție proprie a laplacianului $\Delta^{\mathbb{S}^m}$ pe sferă, corespunzătoare valorii proprii $\lambda_k = k\left(k + m - 1\right)$. O astfel de funcție f se numește armonică sferică de ordin k.

Considerăm următoarea diagramă:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{m+1} \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^{n+1} \\
\mathbb{S}^m \arrow[u, "\mathrm{i}"] \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{S}^n\left(r\right) \arrow[u, "\mathrm{i}"']
\end{tikzcd}$$

unde $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ este o funcție vectorială ale cărei componente sunt polinoame omogene de grad k. O astfel de aplicație F se numește formă de grad k, iar atunci când $k = 2$, spunem că F este o formă pătratică. Vom păstra aceeași terminologie și pentru aplicația indusă φ. Vom presupune întotdeauna că φ nu este constantă.

Propoziţia 1.10. *[13] Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o formă armonică de grad $k \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că F se restricționează la aplicația $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$. Atunci φ este armonică, cu densitate de energie constantă $e\left(\varphi\right) = k\left(k + m - 1\right)/2$, adică φ este o funcție proprie, cu $\nu = k\left(k + m - 1\right)$.*

Propoziţia 1.11. *[13] Fie $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ o aplicație armonică cu densitate de energie constantă $e(\varphi) = \alpha > 0$. Atunci există un unic $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha = k(m+k-1)/2$, și există o funcție vectorială unică $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ ale cărei componente sunt fie polinoame omogene armonice de grad k, fie polinoame nule, iar restricţia lui F este φ.*

Aplicațiile armonice $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ale căror componente sunt polinoame omogene de același grad k, sau restricțiile acestora ϕ la $\mathbb{S}^{m-1}$, se numesc aplicații polinomiale omogene armonice, sau funcții proprii de grad k. Observăm că o aplicație armonică între sfere are densitate de energie constantă dacă și numai dacă este o funcție proprie, echivalent, dacă și numai dacă componentele sale $\phi^\alpha : \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{R}$ sunt armonice sferice de același ordin.

1.4 APLICAȚII BIARMONICE

Aplicațiile biarmonice reprezintă o extensie naturală, de ordin superior, a aplicațiilor armonice, fiind definite ca punctele critice ale funcționalei bienergiei. Deși mai puțin studiate, aplicațiile biarmonice au câștigat interes în geometria diferențială, oferind exemple interesante și rezultate de clasificare. În cele ce urmează, vom introduce definiția lor formală, și vom trece în revistă câteva teoreme esențiale cunoscute.

Definiţia 1.12. Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicație netedă între două varietăți Riemanniene și presupunem că M este închisă. Bienergia aplicației ϕ este numărul nenegativ

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\phi)|^2 \, \overline{v}_g.$$

De acum înainte, atunci când discutăm despre bienergie, vom presupune că varietatea domeniu este închisă. În acest caz, putem defini funcționala bienergiei:

$$E_2 : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}, \quad E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\phi)|^2 \, \overline{v}_g.$$

Definiţia 1.13. O aplicație netedă ϕ se numește biarmonică dacă este un punct critic al funcționalei bienergiei $E_2 : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}$.

Teorema 1.14. *(Prima variaţie a binergiei [41]) Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicaţie netedă şi fie $\{\phi_t\}_{t \in I}$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, o variaţie netedă lui ϕ. Atunci*

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} E_2(\phi) = \int_M \langle \tau_2(\phi), V \rangle \, \overline{v}_g,$$

unde V reprezintă câmpul vectorial de variație al familiei $\{\phi_t\}_{t \in I}$ și

$$\tau_2(\phi) = -\Delta^\phi \tau(\phi) - \mathrm{trace} R^N(\mathrm{d}\phi, \tau(\phi))\,\mathrm{d}\phi$$

este câmpul de bitensiune al lui ϕ.

Mai mult, o aplicaţie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ este biarmonică dacă și numai dacă

$$\tau_2(\phi) = 0. \tag{1.1}$$

Observaţia 1.15. Ecuația (1.1) se numește ecuația câmpului de bitensiune sau ecuația biarmonică și, în coordonate locale, devine un sistem neliniar de ecuații diferențiale parțiale de ordin 4.

Definiţia 1.16. O aplicație între două varietăți Riemanniene se numește propriu biarmonică dacă este biarmonică, dar nu este armonică.

Reamintim în continuare următorul rezultat, care oferă o metodă de construcție a aplicațiilor biarmonice între sfere folosind aplicații armonice între sfere.

Teorema 1.17 ([47])**.** *Fie M o varietate închisă și considerăm $\psi : M \to \mathbb{S}^n\left(r/\sqrt{2}\right)$ o aplicație neconstantă, unde $\mathbb{S}^n\left(r/\sqrt{2}\right)$ este o hipersferă mică de rază $r/\sqrt{2}$ în $\mathbb{S}^{n+1}(r)$. Aplicația $\phi = \mathrm{i} \circ \psi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(r)$, unde* i *este incluziunea canonică, este propriu biarmonică dacă și numai dacă ψ este armonică și densitatea de energie $e(\psi)$ este constantă.*

Aplicații λ-biarmonice

O generalizare naturală a aplicațiilor biarmonice o constituie aplicațiile λ-biarmonice, unde λ este un număr real. Studiul acestora a fost inițiat de Eliasson [35] în anul 1974 și a fost continuat de Lemaire [46] în anul 1981. În această subsecțiune, definim aplicațiile λ-biarmonice, întrucât ele vor fi studiate în două secțiuni în capitolele următoare.

Definiţia 1.18. Fie $\phi : (M, g) \to (N, h)$ o aplicație netedă între două varietăți Riemanniene și presupunem că M este închisă. Definim λ-bienergia aplicației ϕ ca fiind numărul real

$$E_{2,\lambda}(\phi) = E_2(\phi) + \lambda E(\phi),$$

unde E și E_2 reprezintă funcționala energiei și, respectiv, funcționala bienergiei.

Definiţia 1.19. O aplicație netedă $\phi : (M, g) \to (N, h)$, unde M este închisă, se numește λ-biarmonică dacă este un punct critic al funcționalei λ-bienergiei

$$E_{2,\lambda} : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}, \qquad E_{2,\lambda}(\phi) = E_2(\phi) + \lambda E(\phi).$$

Observăm că pentru $\lambda = 0$ se obțin aplicațiile biarmonice clasice. O aplicație λ-biarmonică care nu este armonică se numește aplicație propriu λ-biarmonică.

Teorema 1.20. *O aplicație netedă $\phi : (M, g) \to (N, h)$, unde M este închisă, este λ-biarmonică dacă și numai dacă câmpul său de λ-bitensiune este nul, adică*

$$\tau_{2,\lambda}(\phi) = \tau_2(\phi) - \lambda\tau(\phi) = 0. \tag{1.2}$$

1.5 FORME PĂTRATICE. REZULTATE GENERALE

În această secțiune prezentăm câteva rezultate referitoare la aplicațiile polinomiale și vom începe cu câteva rezultate ale lui R. Wood.

Teorema 1.21. *([64]) Dacă n este o putere a lui 2, atunci toate aplicațiile polinomiale de la $\mathbb{S}^n$ la $\mathbb{S}^{n-1}$ sunt constante.*

Corolarul 1.22. *([64]) Dacă $m \geq 2n$, atunci toate aplicațiile polinomiale de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^n$ sunt constante.*

Formele pătratice neconstante între sfere pot fi construite urtilizând metoda Hopf-Whitehead. Fie $P : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ o formă biliniară normată, adică $|P(\overline{x}, \overline{y})| = |\overline{x}|\,|\overline{y}|$, unde $\overline{x} \in \mathbb{R}^{k+1}$ și $\overline{y} \in \mathbb{R}^q$. Notăm că formele biliniare normate mai sunt cunoscute și sub denumirea de multiplicări ortogonale. Clasificarea multiplicărilor ortogonale este o problemă bogată și destul de complicată, care a fost studiată cu atenție (vezi, de exemplu, [13, 45]). Corespunzător unei astfel de forme biliniare normate există o formă pătratică F care duce $\mathbb{S}^{k+q}$ în $\mathbb{S}^n$ și care are coordonatele:

$$F(\overline{x}, \overline{y}) = \left(|\overline{x}|^2 - |\overline{y}|^2, 2P(\overline{x}, \overline{y})\right).$$

Orice formă pătratică ce duce $\mathbb{S}^m$ în $\mathbb{S}^n$ și care, prin transformări ortogonale ale lui $\mathbb{S}^m$ și $\mathbb{S}^n$, poate fi adusă în forma de mai sus o vom numi formă Hopf, exemplul clasic fiind fibrarea Hopf de la $\mathbb{S}^3$ la $\mathbb{S}^2$, corespunzătoare înmulțirii numerelor complexe $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Reamintim acum câteva rezultate privind formele pătratice între sfere, datorate lui S. Chang și P. Yiu.

Teorema 1.23 ([67]). *Fie $\varphi : \mathbb{S}^{2^{l+1}-1} \to \mathbb{S}^{2^l}$ o formă pătratică. Dacă $l \geq 4$, atunci φ este constantă. Dacă $l \leq 3$ și φ nu este constantă, atunci φ este izometrică cu fibrarea Hopf.*

Teorema 1.24 ([67]). *Fie $\varphi : \mathbb{S}^{2^{l+1}-1} \to \mathbb{S}^{2^l+1}$ o formă pătratică. Dacă $l \geq 4$, atunci φ este constantă. Dacă $l \leq 3$ și φ nu este constantă, atunci φ fie are imaginea, de fapt, în $\mathbb{S}^{2^l}$, fie, în cazul $l = 1$, este construcția Hopf.*

Teorema 1.25. *([27]) Dacă $\varphi : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^n$ este o aplicație pătratică neconstantă, atunci $n \in \{1, 2, 4, 8\}$. Mai mult, până la o izometrie, φ este fibrarea Hopf atunci când $n \in \{2, 4, 8\}$.*

Teorema 1.26. *([27]) Dacă $\varphi : \mathbb{S}^{2n-2} \to \mathbb{S}^n$ $(n \geq 2)$ este o formă pătratică neconstantă, atunci $n \in \{2, 4, 8\}$, iar φ este restricția fibrării Hopf la o sferă mare de dimensiune $(2n - 2)$.*

1.6 POLINOAME FKM

Începem această secțiune prin introducerea conceptelor de hipersuprafață isoparametrică, sisteme Clifford și alte noțiuni conexe, deoarece acestea sunt fundamentale pentru definirea polinoamelor FKM.

O hipersuprafață izoparametrică în sfera $\mathbb{S}^m$ cu p curburi principale distincte λ_1, λ_2, ..., λ_p, având multiplicitățile m_1, m_2, ..., m_p, este locul geometric al nivelului unei funcții $\tilde{f}$ definite pe S^m care, până la o reparametrizare, este dată de restricția unui polinom omogen $\tilde{F}$ pe $\mathbb{R}^{m+1}$ ce satisface:

$$\begin{cases} \left|\mathrm{grad}_{\mathbb{R}^{m+1}} \tilde{F}\left(\overline{x}\right)\right|^2 & = p^2 \left|\overline{x}\right|^{2p-2}, \\ \Delta^{\mathbb{R}^{m+1}} \tilde{F}\left(\overline{x}\right) & = d \left|\overline{x}\right|^{p-2}, \end{cases} \tag{1.3}$$

unde $d = p^2 \left(m_2 - m_1\right)/2$ dacă p este par și $d = 0$ dacă p este impar. În plus, cum $m_i = m_{i+2}$, rezultă că există doar două multiplicități distincte m_1 și m_2, iar p poate fi doar 1, 2, 3, 4 sau 6.

Ca o consecință, aplicația

$$\overline{x} \to \frac{1}{p} \mathrm{grad}_{\mathbb{R}^{m+1}} \tilde{F}\left(\overline{x}\right)$$

definește o aplicație de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^m$.

Definiţia 1.27. Un n-uplu $(P_1, \ldots, P_n)$ de endomorfisme simetrice ale spațiului $\mathbb{R}^{2m}$ se numește sistem Clifford pe $\mathbb{R}^{2m}$ dacă

$$P_i P_j + P_j P_i = 2\delta_{ij} I_{2m}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.4}$$

Dacă introducem un sistem ortogonal de coordonate pe $\mathbb{R}^{2m}$, transformările P_1, P_2, ..., P_n sunt reprezentate de matrice simetrice.

Teorema 1.28. *([36]) Fie $(P_1, \ldots, P_n)$ un sistem Clifford pe $\mathbb{R}^{2m}$. Definim $m_1 = m$, $m_2 = m - n$ şi fie $\tilde{F} : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$ dată de*

$$\tilde{F}\left(\overline{x}\right) = \left|\overline{x}\right|^4 - 2 \sum_{k=1}^{n} \left\langle P_k \overline{x}, \overline{x}\right\rangle^2. \tag{1.5}$$

Atunci $\tilde{F}$ satisface ecuațiile diferențiale Cartan-Münzner (1.3). Dacă $m_2 > 0$, atunci nivelele funcției $\tilde{F}$ formează o familie izoparametrică cu $p = 4$ curburi principale distincte, având multiplicitățile (m_1, m_2).

Polinoamele construite în Ecuația (1.5) se numesc polinoame Ferus-Karcher-Münzner sau, pe scurt, polinoame FKM.

2

APLICAŢII BIARMONICE CARE IAU VALORI ÎN SFERE

În acest capitol, oferim mai întâi o formulă de caracterizare a biarmonicității în cel mai general caz al aplicațiilor între sfere euclidiene. Ca aplicație, pornim de la torul standard minimal al lui Clifford din $\mathbb{S}^3$ și, efectuând o transformare simplă a domeniului, obținem o aplicație propriu biarmonică în $\mathbb{S}^3$. Apoi, în a doua secțiune, stabilim o formulă de caracterizare pentru aplicațiile biarmonice care iau valori în sfera euclidiană, dar a căror imagine se află într-o hipersferă mică, adică $\varphi = \mathrm{i} \circ \psi$, unde i reprezintă incluziunea canonică a hipersferei mici în sfera ambientală. Apoi, ca aplicații ale rezultatelor anterioare, obținem câteva rezultate care leagă biarmonicitatea aplicației φ, armonicitatea aplicației ψ și raza hipersferei mici.

Majoritatea rezultatelor prezentate aici sunt originale și apar, de asemenea, în [1] și [6].

2.1 ECUAŢII BIARMONICE PENTRU APLICAŢII CARE IAU VALORI ÎN SFERE

Fie $\varphi : (M^m, g) \to \mathbb{S}^n(r)$ o aplicație, și fie $\mathrm{i} : \mathbb{S}^n(r) \to \mathbb{R}^{n+1}$ incluziunea canonică a sferei euclidiene de rază r în spațiul euclidian. Considerăm aplicația compusă

$$\Phi = \mathrm{i} \circ \varphi : (M^m, g) \to \mathbb{R}^{n+1}.$$

Ca de obicei, identificăm local $\mathrm{d}\varphi(X)$ cu $\mathrm{d}\Phi(X)$, pentru orice câmp vectorial X tangent la M.

Notăm $\theta = \langle \mathrm{d}\varphi, \tau(\varphi) \rangle = \langle \mathrm{d}\Phi, \tau(\Phi) \rangle$, adică θ este 1-forma definită pe M prin

$$\theta(X) = \langle \mathrm{d}\varphi(X), \tau(\varphi) \rangle = \langle \mathrm{d}\Phi(X), \tau(\Phi) \rangle .$$

Prin $\theta^\sharp$ notăm câmpul vectorial asociat 1-formei θ prin izomorfismul muzical. Cu aceste notații, putem enunța:

Teorema 2.1. *Fie $\varphi : (M^m, g) \to \mathbb{S}^n(r)$ o aplicație, fie $\mathrm{i} : \mathbb{S}^n(r) \to \mathbb{R}^{n+1}$ incluziunea standard, și fie $\Phi = \mathrm{i} \circ \varphi : (M^m, g) \to \mathbb{R}^{n+1}$. Atunci, câmpul de bitensiune al aplicației φ este dat de*

$$\begin{aligned} \tau_2(\varphi) = & \tau_2(\Phi) + \left(-\frac{1}{r^2}\Delta |\mathrm{d}\Phi|^2 + \frac{2}{r^2}\operatorname{div}\theta^\sharp - \frac{1}{r^2}|\tau(\Phi)|^2 + \frac{2}{r^4}|\mathrm{d}\Phi|^4 \right)\Phi \\ & + \frac{2}{r^2}|\mathrm{d}\Phi|^2 \tau(\Phi) + \frac{2}{r^2}\mathrm{d}\Phi\left(\operatorname{grad}|\mathrm{d}\Phi|^2\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observaţia 2.2. Notăm faptul că ecuația (2.1) a apărut pentru prima dată în [53], iar ulterior, o versiune a acestei formule a fost prezentată în [19]. O formă similară a ecuației (2.1) a fost obținută în [44] și [61] pentru aplicații definite pe spaţii euclidiene cu valori în sfere, precum și în [22] pentru imersii izometrice în sfere euclidiene.

Ca aplicație a ecuației (2.1), vom prezenta următorul exemplu. Fie $\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3$ o aplicație netedă definită prin

$$\Psi(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, \cos t, \sin t).$$

Această aplicație este bine definită, armonică și

$$\Psi^* g_{\mathbb{S}^3} = \frac{1}{2} g_{\mathbb{T}},$$

unde $\mathbb{T}$ reprezintă $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, iar $g_{\mathbb{T}}$ este metrica standard, $g_{\mathbb{T}} = \mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}t^2$. De fapt, Ψ reprezintă, până la o transformare omotetică a metricii pe domeniu, torul standard minimal al Clifford din $\mathbb{S}^3$.

În cele ce urmează, inspirați de [10, 11], vom efectua o transformare simplă a domeniului pentru a transforma aplicația armonică Ψ într-o aplicație propriu biarmonică. Mai precis, vom compune aplicația Ψ cu o aplicație total geodezică $G : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ astfel încât $\Psi \circ G$ să fie biarmonică, dar nu și armonică.

Considerăm aplicația $G : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ dată în coordonate standard prin

$$G(u,v) = (k_1 u + k_2 v, l_1 u + l_2 v),$$

unde $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$. Aplicaţia G este bine definită, nu neapărat injectivă, şi total geodezică.

Propoziţia 2.3. *Dacă $k_1 l_2 - k_2 l_1 = \pm 1$, atunci G este bijectivă.*

Fie $\varphi := \Psi \circ G$ şi $\Phi := \mathrm{i} \circ \varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^4$,

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(k_1 u + k_2 v), \sin(k_1 u + k_2 v), \cos(l_1 u + l_2 v), \sin(l_1 u + l_2 v)\right).$$

Cu notaţiile de mai sus, avem

Propoziţia 2.4. *([6]) Aplicaţia $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{S}^3$ este propriu biarmonică dacă şi numai dacă*

$$l_1^2 + l_2^2 \neq k_1^2 + k_2^2.$$

Observaţia 2.5. Notăm că, dacă $k_1 l_2 - k_2 l_1 = \pm 1$ şi $l_1^2 + l_2^2 \neq k_1^2 + k_2^2$, atunci G este un difeomorfism şi φ este propriu biarmonică.

2.2 APLICAȚII BIARMONICE CARE IAU VALORI ÎN SFERE, A CĂROR IMAGINE SE AFLĂ ÎNTR-O HIPERSFERĂ MICĂ

Următorul rezultat oferă o formulă pentru câmpul de bitensiune în cazul mai general al aplicațiilor $\varphi : M \to \mathbb{S}^n(R)$ a căror imagine se află într-o hipersferă de rază arbitrară $\mathbb{S}^{n-1}(r)$, $0 < r < R$.

Teorema 2.6. *([1]) Fie $\psi : M \to \mathbb{S}^{n-1}(r)$ o aplicație neconstantă și considerăm $\varphi = \mathrm{i} \circ \psi : M \to \mathbb{S}^n(R)$, unde $0 < r < R$. Atunci, câmpul de bitensiune al aplicației φ este dat de*

$$\begin{aligned}\tau_2(\varphi) =& \tau_2(\psi) + 2\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right) \mathrm{d}\psi\left(\operatorname{grad}|\mathrm{d}\psi|^2\right) + 4\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right) e(\psi)\,\tau(\psi) \\ &+ \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}\left(2\Delta(e(\psi)) - 2\operatorname{div}\theta^\sharp + |\tau(\psi)|^2 - 4\left(\frac{2}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right)(e(\psi))^2\right)\eta,\end{aligned} \tag{2.2}$$

unde $\theta(X) := \langle \mathrm{d}\psi(X), \tau(\psi)\rangle$, pentru orice câmp vectorial X tangent la M.

Folosind notațiile de mai sus, prezentăm următoarele rezultate.

Propoziţia 2.7. *([1]) Fie $\psi : M \to \mathbb{S}^{n-1}(r)$ o aplicație neconstantă și considerăm $\varphi = \mathrm{i} \circ \psi : M \to \mathbb{S}^n$, unde $0 < r < 1$. Presupunem că aplicația φ este biarmonică. Dacă M este închisă, atunci $r \geq 1/\sqrt{2}$. Mai mult, dacă $r = 1/\sqrt{2}$, atunci ψ este armonică.*

Propoziţia 2.8. *([1]) Fie $\psi : M \to \mathbb{S}^{n-1}(r)$ o aplicație neconstantă și considerăm $\varphi = \mathrm{i} \circ \psi : M \to \mathbb{S}^n$, unde $0 < r < 1$. Presupunem că φ este biarmonică, $e(\varphi)$ este constantă și $\operatorname{div}\theta^\sharp = 0$. Atunci $r \geq 1/\sqrt{2}$.*

Propoziţia 2.9. *Fie M o varietate Riemanniană închisă, $\psi : M \to \mathbb{S}^{n-1}(r)$ o aplicație neconstantă, și considerăm $\varphi = \mathrm{i} \circ \psi : M \to \mathbb{S}^n$, unde $0 < r < 1$. Dacă aplicația ψ este armonică, atunci φ este biarmonică dacă și numai dacă $r = 1/\sqrt{2}$ și $e(\psi)$ este constantă.*

Observaţia 2.10. Acest rezultat a apărut pentru prima dată în [18], iar o formă a Propoziției 2.9, obţinută sub ipoteze suplimentare, a fost prezentată în [1]. Totuși, folosind câteva idei din [18], se observă că rezultatul poate fi obținut și din ecuația (2.2).

Observaţia 2.11. Notăm faptul că, dacă φ este biarmonică, aceast lucru nu implică neapărat că ψ este armonică, $r = 1/\sqrt{2}$ și $e(\psi)$ este constantă, toate fiind îndeplinite simultan.

3

APLICAȚII POLINOMIALE OMOGENE BIARMONICE ÎNTRE SFERE

În prima secțiune a acestui capitol, considerăm cazul formelor de grad k și calculăm câmpul lor de bitensiune. Apoi, ca aplicație, folosind forme armonice de grad k, construim forme de grad $k+1$ și studiem biarmonicitatea acestora. În a doua secțiune, analizăm aplicațiile date de gradientul polinoamelor Ferus–Karcher–Münzner, care sunt definite utilizând sisteme Clifford. Aceste aplicații sunt forme de grad 3 între sfere de aceeași dimensiune. Studiem biarmonicitatea acestora și, în timp ce în cazul biarmonic obținem un rezultat de inexistență, în cazul λ-biarmonic găsim aplicații propriu λ-biarmonice pentru anumite valori ale dimensiunii sferei domeniu și pentru anumite sisteme Clifford.

Majoritatea rezultatelor prezentate aici sunt originale și apar, de asemenea, în [2], [4] și [6]. Mai mult, rezultatele din Secțiunea 3.2 sunt prezentate aici pentru prima dată, întrucât [4] nu a fost încă publicat.

3.1 FORME BIARMONICE DE GRAD k

În această secțiune, oferim o aplicație a Teoremei 2.1 pentru o clasă particulară de aplicații. Considerăm diagrama de mai jos

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{m+1} \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^{n+1} \\
\mathbb{S}^m \arrow[u, "\mathrm{i}"] \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{S}^n(r) \arrow[u, "\mathrm{i}"']
\end{tikzcd}$$

unde $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ este o formă de grad k. Vom presupune întotdeauna că φ nu este constantă.

De acum înainte, pentru a simplifica notația, vom folosi $\overset{o}{\mathrm{d}}$, $\overset{o}{\nabla}$, $\overset{o}{\Delta}$ și $\overset{o}{\operatorname{grad}}$ pentru operatorii care acționează pe $\mathbb{R}^{m+1}$. Astfel, de exemplu, $\overset{o}{\Delta} = \Delta^{\mathbb{R}^{m+1}}$.

Teorema 3.1. *Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o formă de grad k, iar $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n(r)$ restricția sa. Câmpul de bitensiune al aplicației φ este dat de*

$$\begin{aligned}\tau_2(\varphi) =& \overset{o}{\Delta}\overset{o}{\Delta}F + 2\left(mk + 2k^2 - 3k - m + 3 - \frac{1}{r^2}\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2\right)\overset{o}{\Delta}F \\ &+ \frac{1}{r^2}\left(-2\overset{o}{\Delta}\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2\right) - 2\left|\overset{o}{\nabla}\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2 + \left|\overset{o}{\Delta}F\right|^2\right. \\ &\left.-2\left(2mk + 6k^2 - 6k - m + 3\right)\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2 + \frac{2}{r^2}\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^4 + 4r^2k^2\left(m + 2k - 1\right)\right)\Phi \\ &+ \frac{2}{r^2}\overset{o}{\mathrm{d}}F\left(\overset{o}{\operatorname{grad}}\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2\right)\right).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Folosind rezultate din demonstratţia teoremei precedente, obținem

Teorema 3.2. *Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o formă de grad k, iar $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n(r)$ restricția sa. Câmpul de tensiune al aplicației φ este dat de*

$$\tau(\varphi) = -\overset{o}{\Delta}F + \left(\frac{1}{r^2}\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2 - k\left(m + 2k - 1\right)\right)\Phi. \tag{3.2}$$

Teorema de mai sus și următoarele două propoziții sunt rezultate cunoscute în literatură (vezi, de exemplu, [13]).

Propoziţia 3.3. *Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o formă de grad k, iar $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n(r)$ restricția sa. Dacă $\overset{o}{\Delta}F = 0$, atunci $\tau(\varphi) = 0$ și $e(\varphi)$ este constantă.*

În general, căutăm aplicații propriu biarmonice. Prin urmare, Φ nu poate fi o aplicație propriu biarmonică dacă $\overset{o}{\Delta}F = 0$.

Propoziţia 3.4. *Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o formă pătratică, iar $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n(r)$ restricția sa. Dacă $\tau(\varphi) = 0$, atunci $\overset{o}{\Delta}F = 0$ și $e(\varphi)$ este constantă.*

Fie acum dată mulțimea formelor de grad k, $k \geq 1$, care duc $\mathbb{S}^m$ în $\mathbb{S}^n$. Definim următoarea relație

$$F \sim G \quad \text{dacă și numai dacă} \quad F_{|\mathbb{S}^m} = G_{|\mathbb{S}^m}.$$

Se observă ușor că $\sim$ este o relație de echivalență. Factorizăm mulțimea formelor de grad k care duc $\mathbb{S}^m$ în $\mathbb{S}^n$ prin această relație și obținem clase de echivalență notate $[F]$.

Observăm că dacă $[F] = [G]$, atunci există un întreg $p \geq 1$ astfel încât, pe $\mathbb{R}^{m+1}$, avem fie $F(\overline{x}) = |\overline{x}|^{2p}G(\overline{x})$, fie $G(\overline{x}) = |\overline{x}|^{2p}F(\overline{x})$. De asemenea, deoarece niciun multiplu nenul al lui $|\overline{x}|^2$ cu coeficienți polinomiali nu este armonic (vezi [8]), rezultă că orice clasă $[F]$ conține cel mult o formă armonică de grad k, de grad minim în clasa sa.

Propoziţia 3.5. *([2]) Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o formă de grad k, de grad minim în clasa sa $[F]$, astfel încât restricția sa $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ este armonică. Atunci, φ are densitatea de energie constantă $e(\varphi) = \dfrac{k(k+m-1)}{2}$ și $\overset{o}{\Delta} F = 0$.*

Observaţia 3.6. În această formă, din câte cunoaștem, Propoziția 3.5 este un rezultat nou.

Observaţia 3.7. Pentru mai multe detalii privind aplicațiile polinomiale omogene și descompunerea acestora, se poate consulta [8].

Propoziţia 3.8. *([2]) Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o formă armonică de grad k astfel încât restricția sa este o aplicație $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n(r)$. Atunci, pe $\mathbb{R}^{m+1}$ avem*

$$\overset{o}{\Delta}\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2\right) = -2r^2k(k-1)(m+2k-1)(m+2k-3), \tag{3.3}$$
$$\left|\overset{o}{\nabla}\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2 = r^2k(k-1)\left(m^2-4m+3+4k(m-2)+4k^2\right).$$

Prezentăm acum o aplicație a Teoremei 3.1.

Teorema 3.9. *([2]) Fie $G : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o formă armonică de grad k astfel încât restricția sa $\psi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ nu este constantă. Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$ o formă de grad $k+1$ definită prin*

$$F(\overline{x}) = \left(x^1 G(\overline{x}), x^2 G(\overline{x}), \ldots, x^{m+1} G(\overline{x})\right).$$

Atunci, restricția sa $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{(m+1)(n+1)-1}$ este propriu biarmonică dacă și numai dacă $m = 1$.

3.2 BIARMONICITATEA APLICAȚIILOR POLINOMIALE OBȚINUTE DIN POLINOAMELE FKM

În această secțiune, considerăm formele de grad 3 date de gradientul polinoamelor FKM. Folosind Teorema 3.1, calculăm câmpul lor de bitensiune, apoi studiem biarmonicitatea acestora.

Fie $(P_1, \ldots, P_n)$ un sistem Clifford ireductibil pe $\mathbb{R}^{2m}$, cu $m > 1$, și fie $\tilde{F} : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$ polinomul FKM asociat, definit prin

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\overline{x}) &= |\overline{x}|^4 - 2\sum_{k=1}^{n} \langle P_k \overline{x}, \overline{x}\rangle^2 \\ &= \left(X^t I_{2m} X\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\left(X^t P_k X\right)^2.\end{aligned}$$

Considerăm funcția vectorială $F : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ definită prin

$$F = \frac{1}{4}\,\overset{o}{\mathrm{grad}}\,\tilde{F}.$$

Mai precis,

$$F\left(\overline{x}\right) = X^t I_{2m} X \cdot X^t I_{2m} - 2\sum_{k=1}^{n}\left(X^t P_k X \cdot X^t P_k\right). \tag{3.4}$$

Folosind Teorema 1.28, rezultă că funcția vectorială F duce $\mathbb{S}^{2m-1}$ în $\mathbb{S}^{2m-1}$, așadar F este o formă de grad 3.

Teorema 3.10. *([4]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^{2m-1}$ restricția formei de grad 3 dată în Ecuația (3.4).*

(i) Câmpul de tensiune al aplicației φ este dat de

$$\tau\left(\varphi\right)_{\overline{x}} = -4\left(1+m-2n\right)\left(\tilde{F}\left(\overline{x}\right)\cdot\Phi\left(\overline{x}\right) - X^t\right). \tag{3.5}$$

(ii) Câmpul de bitensiune al aplicației φ este dat de

$$\tau_2\left(\varphi\right)_{\overline{x}} = -4\left(5-m+2\left(1+m-2n\right)\tilde{F}\left(\overline{x}\right)\right)\tau\left(\varphi\right)_{\overline{x}}. \tag{3.6}$$

Teorema 3.11. *([4]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^{2m-1}$ restricția formei de grad 3 dată în Ecuația (3.4). Atunci, aplicația φ este armonică dacă și numai dacă aplicația $\psi : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, definită prin*

$$\psi\left(\overline{x}\right) = \left(\langle P_1\overline{x}, \overline{x}\rangle, \langle P_2\overline{x}, \overline{x}\rangle, \ldots, \langle P_n\overline{x}, \overline{x}\rangle\right),$$

este izometric echivalentă cu una dintre fibrările Hopf.

Teorema 3.12. *([4]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^{2m-1}$ restricția formei de grad 3 dată în Ecuația (3.4). Atunci, aplicația φ nu este propriu biarmonică.*

Încheiem această secțiune cu două rezultate referitoare la câmpul de λ-bitensiune și la λ-biarmonicitatea proprie a aplicației φ.

Teorema 3.13. *([4]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^{2m-1}$ restricția formei de grad 3 dată în Ecuația (3.4). Câmpul de λ-bitensiune al aplicației φ este dat de*

$$\tau_{2,\lambda}\left(\varphi\right) = -\left(20-4m+8\left(1+m-2n\right)\tilde{F}\left(\overline{x}\right)+\lambda\right)\tau\left(\varphi\right). \tag{3.7}$$

Teorema 3.14. *([4]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^{2m-1}$ restricția formei de grad 3 dată în Ecuația (3.4). Pentru $(m,n) \in \{(2,3),(4,5),(8,9)\}$ și $\lambda = 4\left(3m-4n-3\right)$, aplicația φ este propriu λ-biarmonică.*

4

APLICAȚII POLINOMIALE OMOGENE BIARMONICE DE GRAD 2 ÎNTRE SFERE

În acest capitol particularizăm teorema principală din capitolul precedent la cazul formelor pătratice și obținem o expresie mai simplă a câmpului de bitensiune. Folosind acest rezultat, obținem clasificarea tuturor formelor pătratice propriu biarmonice de la $\mathbb{S}^1$ la $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^2$, $m \geq 2$, și de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^3$, $m \geq 2$. Încheiem prima secțiune cu o Problemă Deschisă referitoare la structura formelor pătratice propriu biarmonice între sfere.

În a doua secțiune a acestui capitol demonstrăm că o formă pătratică între sfere euclidiene unitare este propriu biarmonică dacă și numai dacă densitatea sa de energie este egală cu $(m+1)/2$, unde m este dimensiunea sferei domeniu.

În a treia secțiune, obținem clasificarea completă a formelor pătratice biarmonice. Mai precis, demonstrăm că orice formă pătratică propriu biarmonică se obține dintr-o formă pătratică ce se află, ca aplicație armonică, într-o anumită hipersferă mică a sferei țintă, confirmând astfel presupunerea formulată în Problema Deschisă.

Încheiem acest capitol cu o secțiune dedicată formelor pătratice λ-biarmonice. Mai întâi determinăm expresia câmpului de λ-bitensiune, apoi studiem densitatea de energie a formelor pătratice λ-biarmonice, iar în final prezentăm clasificarea completă a acestora.

Majoritatea rezultatelor prezentate aici sunt originale și apar, de asemenea, în [1], [3], [5] și [6].

4.1 FORME PĂTRATICE BIARMONICE

Începem această secțiune cu construcția unei aplicații biarmonice complete $\varphi : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^5$, ale cărei componente sunt polinoame omogene de grad 2. Aici, o aplicație $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ se numește completă (full) dacă imaginea sa nu este conținută într-o sferă mare.

Mai întâi, reamintim următorul rezultat de inexistență pentru aplicațiile armonice:

Teorema 4.1 ([66]). *Nu există aplicații armonice complete de la $\mathbb{S}^4$ la $\mathbb{S}^n$, pentru $n = 5$ sau 6, ale căror componente sunt polinoame omogene de grad 2.*

Pe de altă parte, așa cum este prezentat şi în [26] (vezi și [58]), este bine cunoscut faptul că gradientul funcției izoparametrice

$$f\left(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5\right)=\frac{1}{3}\left(x^1\right)^3+\frac{x^1}{2}\left(\left(x^3\right)^2+\left(x^4\right)^2-2\left(x^5\right)^2-2\left(x^2\right)^2\right)$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2\left(x^3\right)^2-x^2\left(x^4\right)^2\right)+\sqrt{3}x^3x^4x^5.$$

definește, până la o transformare omotetică a sferei țintă, o aplicație armonică completă $\psi:\mathbb{S}^4\to\mathbb{S}^4(1/\sqrt{2})$, cu densitate de energie constantă, definită prin

$$\psi\left(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(x^1\right)^2+\frac{1}{2}\left(x^3\right)^2+\frac{1}{2}\left(x^4\right)^2-\left(x^5\right)^2-\left(x^2\right)^2,\right.$$
$$-2x^1x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^3\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^4\right)^2,x^1x^3+\sqrt{3}x^2x^3+\sqrt{3}x^4x^5,$$
$$\left.x^1x^4-\sqrt{3}x^2x^4+\sqrt{3}x^3x^5,-2x^1x^5+\sqrt{3}x^3x^4\right).$$

Apoi, în cazul biarmonic, folosind Teorema (1.17), concluzionăm că

Teorema 4.2. *([6]) Există aplicații propriu biarmonice complete de la $\mathbb{S}^4$ la $\mathbb{S}^5$, ale căror componente sunt polinoame omogene de grad 2.*

Mai departe, fie $F:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ o formă pătratică. Atunci, F poate fi scrisă sub forma

$$F\left(\overline{x}\right)=\left(X^tA_1X,\ldots,X^tA_{n+1}X\right),$$

unde $\overline{x}=\left(x^1,\ldots,x^{m+1}\right)$ corespunde lui $X^t=\left[x^1\ \ldots\ x^{m+1}\right]$, iar $A_1,\ldots,A_{n+1}$ sunt matrice pătratice de ordin $m+1$, astfel încât, dacă $|\overline{x}|=1$, atunci $|F\left(\overline{x}\right)|=1$. Observăm că, printr-un proces standard de simetrizare, putem presupune întotdeauna că fiecare A_i este simetrică, pentru $i=1,2,\ldots,n+1$.

Vom presupune întotdeauna că φ nu este o aplicație constantă; așadar, există $i_0\in\{1,2,\ldots,n+1\}$ astfel încât A_{i_0} nu este matricea identitate I_{m+1} înmulțită cu o constantă reală nenulă.

În acest caz, vom calcula toți termenii din Ecuația (3.1). În cele ce urmează, pentru matrice vom folosi norma Frobenius, care este definită ca rădăcina pătrată a sumei pătratelor elementelor matricei.

Observăm imediat că, deoarece F este o formă pătratică, atunci $\overset{o}{\Delta}\overset{o}{\Delta}F=0$ pe $\mathbb{R}^{m+1}$. Mai departe,

$$\overset{o}{\mathrm{d}}F\left(\overline{x}\right)=\begin{bmatrix}2X^tA_1\\ \vdots\\ 2X^tA_{n+1}\end{bmatrix}.$$

Ca rezultat imediat, obținem pe $\mathbb{R}^{m+1}$

$$\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\left(\overline{x}\right)\right|^2 = 4X^t\left(A_1^2+\cdots+A_{n+1}^2\right)X = 4X^tSX, \tag{4.1}$$

unde am notat $S = A_1^2+\cdots+A_{n+1}^2$.

Apoi, pe $\mathbb{R}^{m+1}$ obținem următoarele:

$$\begin{aligned}
&\overset{o}{\Delta}F = -2\left(\mathrm{tr}A_1,\ldots,\mathrm{tr}A_{n+1}\right),\\
&\overset{o}{\Delta}\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2\right) = -8\mathrm{tr}\left(A_1^2+\cdots+A_{n+1}^2\right) = -8\mathrm{tr}S,\\
&\left|\overset{o}{\nabla}\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2 = 4\left(|A_1|^2+\cdots+|A_{n+1}|^2\right),\\
&\overset{o}{\mathrm{grad}}\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2\right) = 8X^t\left(A_1^2+\cdots+A_{n+1}^2\right) = 8X^tS,\\
&\overset{o}{\mathrm{d}}F\left(\overset{o}{\mathrm{grad}}\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2\right)\right) = 16\left(X^tA_1SX,\ldots,X^tA_{n+1}SX\right).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Observăm că, deoarece matricele $A_1, \ldots, A_{n+1}$ sunt simetrice, atunci

$$|A_1|^2+\cdots+|A_{n+1}|^2 = \mathrm{tr}S. \tag{4.3}$$

Propoziţia 4.3 ([6])**.** *Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o formă pătratică, astfel încât restricția sa este $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n(r)$. Atunci, pe $\mathbb{S}^m$ avem*

$$-2\overset{o}{\Delta}\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2\right) - 2\left|\overset{o}{\nabla}\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2 + \left|\overset{o}{\Delta}F\right|^2 = 4r^2\left(m+1\right)\left(m+3\right). \tag{4.4}$$

Pentru cazul special al formelor pătratice, avem următorul rezultat.

Propoziţia 4.4. *Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ astfel încât restricția sa $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ este o formă pătratică neconstantă. Atunci, următoarele relații sunt echivalente:*

1) $\tau\left(\varphi\right) = 0$,
2) $\overset{o}{\Delta}F = 0$,
3) $e\left(\varphi\right) = m+1$.

Observaţia 4.5. Notăm că o versiune a Propoziției 4.4 poate fi găsită în [13] şi ne întrebăm dacă există un rezultat similar pentru formele pătratice biarmonice.

Observaţia 4.6. Condiţia $e\left(\varphi\right) = m+1$ este echivalentă cu $S = \left(\left(m+3\right)/2\right)I_{m+1}$.

Acum, putem enunța rezultatul principal al acestei secțiuni.

Teorema 4.7. *([6]) Fie $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ o formă pătratică dată de*

$$F(\overline{x}) = \left(X^t A_1 X, \ldots, X^t A_{n+1} X\right),$$

astfel încât, dacă $|\overline{x}| = 1$, atunci $|F(\overline{x})| = 1$. Considerăm aplicaţia $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ definită prin $\varphi(\overline{x}) = F(\overline{x})$ şi $\Phi = \mathrm{i} \circ \varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{n+1}$. Dacă notăm $S = A_1^2 + \cdots + A_{n+1}^2$, atunci, într-un punct $\overline{x} \in \mathbb{S}^m$, câmpul de bitensiune al aplicaţiei φ are următoarea expresie:

$$\begin{aligned} \tau_2(\varphi)_{\overline{x}} = & -4\left(m+5-4X^t S X\right)\left(\mathrm{tr} A_1, \ldots, \mathrm{tr} A_{n+1}\right) \\ & + 4\left((m+3)(m+5) - 6(m+5) X^t S X + 8\left(X^t S X\right)^2\right)\Phi(\overline{x}) \\ & + 32\left(X^t A_1 S X, \ldots, X^t A_{n+1} S X\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Observăm că, condiţia $S = \alpha I_{m+1}$, pentru o constantă reală $\alpha > 1$, este echivalentă cu faptul că $|\mathrm{d}\varphi|^2$ este constantă. Mai precis, $|\mathrm{d}\varphi|^2 = 4\alpha - 4$. În acest caz, dacă φ nu este armonică, atunci imaginea $\varphi(\mathbb{S}^m)$ este conţinută într-o hipersferă mică din $\mathbb{S}^n$.

Din Ecuaţia (4.5) şi din faptul că $\overset{o}{\Delta} F$ este constant, obţinem

Propoziţia 4.8. *([6]) Fie φ o formă pătratică cu densitate de energie constantă. Atunci, φ este propriu biarmonică dacă şi numai dacă pe $\mathbb{S}^m$ avem*

$$e(\varphi) = \frac{m+1}{2}. \tag{4.6}$$

Propoziţia 4.9. *([6]) Fie $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, unde $n = 2, 4, 8$, multiplicarea ortogonală dată de numere complexe, cuaternioni sau octonioni. Atunci, forma pătratică $\varphi_\lambda : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^{n+1}$, obţinută prin restricţia lui $F_\lambda : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ definită prin*

$$F_\lambda(\overline{z}, \overline{w}) = \left(|\overline{z}|^2 + \lambda |\overline{w}|^2, \sqrt{2(1-\lambda)} P(\overline{z}, \overline{w}), \sqrt{1-\lambda^2} |\overline{w}|^2\right),$$

este o aplicaţie propriu biarmonică dacă şi numai dacă $\lambda = 0$. În acest caz, până la o transformare ortogonală a sferei domeniu şi/sau a sferei ţintă, φ_0 este compoziţia fibrării armonice Hopf

$$H : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

urmată de incluziunea biarmonică

$$\mathrm{i} : \mathbb{S}^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \to \mathbb{S}^{n+1}.$$

Observaţia 4.10. Mai multe exemple de forme pătratice propriu biarmonice între sfere pot fi obţinute prin aplicarea Teoremei 1.17 formelor pătratice armonice între sfere obţinute în [59].

În general, atunci când aplicația $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ este restricția unei forme pătratice $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, datorită omogenității, F trebuie să îndeplinească anumite condiții pe $\mathbb{R}^{m+1}$ (vezi [64]). Următoarele trei rezultate de clasificare se bazează pe aceste proprietăți ale lui F.

Teorema 4.11. *([6]) Până la transformări ortogonale ale domeniului și/sau ale codomeniului, singura formă pătratică propriu biarmonică $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^n$, pentru $n \geq 2$, se obține prin restricția formei pătratice $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n+1}$, definită prin*

$$F(x, y) = \left(x^2,\ c^1 y^2 + 2\gamma^1 xy,\ \dots,\ c^n y^2 + 2\gamma^n xy\right),$$

unde coeficienții c^i şi γ^i sunt constante reale pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, care satisfac condițiile

$$\left(c^1\right)^2 + \cdots + (c^n)^2 = 1, \quad c^1\gamma^1 + \cdots + c^n\gamma^n = 0,$$

și

$$\left(\gamma^1\right)^2 + \cdots + (\gamma^n)^2 = \frac{1}{2}.$$

Mai mult, imaginea aplicației φ este cercul de rază $1/\sqrt{2}$ din $\mathbb{S}^n$.

Propoziţia 4.12. *([6]) Nu există nicio formă pătratică propriu biarmonică de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^1$, pentru $m \geq 1$.*

Teorema 4.13. *([6]) Nu există nicio formă pătratică propriu biarmonică de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^2$, pentru $m \geq 2$.*

Teorema 4.14. *([6]) Până la transformări omotetice ale domeniului și/sau ale codomeniului, singura formă pătratică propriu biarmonică de la $\mathbb{S}^m$ la $\mathbb{S}^3$, pentru $m \geq 2$, este fibrarea Hopf $\psi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2\left(1/\sqrt{2}\right)$ urmată de incluziunea canonică în $\mathbb{S}^3$.*

Toate exemplele cunoscute de forme pătratice propriu biarmonice sugerează următorul rezultat (vezi [6]).

Problemă deschisă. Dacă $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ este o formă pătratică propriu biarmonică, atunci, până la o izometrie a lui $\mathbb{S}^n$, primele n componente ale lui φ sunt polinoame armonice pe $\mathbb{R}^{m+1}$ și formează o aplicație $\psi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$.

4.2 DENSITATEA DE ENERGIE A FORMELOR PĂTRATICE BIARMONICE

În această secțiune, mai întâi demonstrăm că o aplicație pătratică biarmonică are densitatea de energie constantă. Notăm că, în cadrul demonstrației, calculele pentru coeficientii anumitor polinoame au fost realizate folosind *Mathematica*®.

Teorema 4.15. *([5]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ o formă pătratică. Atunci, φ este propriu biarmonică dacă și numai dacă densitatea sa de energie $e(\varphi)$ este constantă și egală cu $(m+1)/2$.*

Din Teoremele 4.7 și 4.15 deducem

Corolarul 4.16. *([5]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ o formă pătratică propriu biarmonică. Atunci,* $\left|\overset{o}{\Delta} F\right|^2 = 2\,(m+1)^2$.

Ca o consecință directă a Propoziției 4.8, putem enunța următorul rezultat:

Propoziţia 4.17. *Fie $F_1 : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n_1+1}$ și $F_2 : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n_2+1}$ două forme pătratice, astfel încât restricțiile lor $\varphi_1 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1}$, respectiv $\varphi_2 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_2}$ sunt forme pătratice propriu biarmonice. Atunci, restricția φ a formei pătratice cu valori în $\mathbb{R}^{n_1+n_2+2}$, $F = (\cos\beta\, F_1,\ \sin\beta\, F_2)$, unde β este o constantă reală, este propriu biarmonică.*

Observaţia 4.18. Notăm că o versiune a Propoziției 4.17 a apărut în [6].

Observaţia 4.19. Există forme pătratice cu densitate de energie constantă care nu sunt nici biarmonice, nici armonice.

4.3 CLASIFICAREA COMPLETĂ A FORMELOR PĂTRATICE BIARMONICE

Folosind rezultatele prezentate mai sus, putem oferi acum un răspuns afirmativ la problema deschisă formulată la finalul primei secțiuni a acestui capitol, care clasifică toate formele pătratice propriu biarmonice.

Teorema 4.20. *([5]) Dacă $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ este o formă pătratică propriu biarmonică, atunci, până la o izometrie a lui $\mathbb{S}^n$, primele n componente ale lui φ formează o aplicație armonică $\psi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$.*

În cazul formelor pătratice, Propoziția 2.7 are o formă mai rigidă, implicând reducerea codimensiunii pentru aplicația φ.

Propoziţia 4.21. *([5]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ o aplicație pătratică propriu biarmonică. Presupunem că imaginea lui φ este conținută într-o hipersferă mică $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ a lui $\mathbb{S}^n$. Atunci, $r \geq 1/\sqrt{2}$. Mai mult,*

1. *dacă $r = 1/\sqrt{2}$, atunci aplicaţia $\psi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$ determinată de φ este armonică;*
2. *dacă $r > 1/\sqrt{2}$, atunci φ stă în $\mathbb{S}^{n-2}\left(1/\sqrt{2}\right) \subset \mathbb{S}^{n-1}(r)$ şi $\psi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n-2}\left(1/\sqrt{2}\right)$ este armonică.*

În continuare, prezentăm două aplicații ale Teoremei 4.20, obținând rezultate de clasificare.

Folosind rezultatul lui Calabi privind unicitatea (până la izometrii ale domeniului și/sau codomeniului) sferelor rotunde minimale compacte de dimensiune 2 în $\mathbb{S}^n$, adică unicitatea sferelor Borüvka, care sunt sfere rotunde minimale de dimensiune 2 în $\mathbb{S}^n$, $n = 2n'$, care au curbura secţională $K = 2/(n'(n'+1))$ (vezi [23] şi, de asemenea, [20,42]), obținem

Teorema 4.22. *([5]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^n$ o formă pătratică completă. Presupunem că φ este omotetică. Atunci, φ este propriu biarmonică dacă și numai dacă $n = 5$, $\varphi\left(\mathbb{S}^2\right) \subset \mathbb{S}^4\left(1/\sqrt{2}\right)$, iar, până la omotetii ale domeniului și codomeniului, $\psi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^4\left(1/\sqrt{2}\right)$ este aplicația Veronese.*

Folosind rezultatul de clasificare al lui G. Tóth privind toate aplicațiile armonice complete de la $\mathbb{S}^3$ la $\mathbb{S}^n$, din [59], putem enunța

Teorema 4.23. *([5]) Aplicații pătratice complete și propriu biarmonice de la $\mathbb{S}^3$ în $\mathbb{S}^n$ există numai dacă $3 \leq n \leq 9$ și $n \neq 4$. Mai mult, dacă $\varphi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^n$ este o astfel de aplicație, atunci există $U \in O(4)$, $V \in O(n+1)$ și o matrice simetrică pozitiv definită $B \in \mathcal{S}^2\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ astfel încât*

$$V \circ \varphi \circ U = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} B \circ \varphi_n, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

unde $\varphi_n : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^n$ este definită prin

$$\varphi_n\left(\overline{x}\right) = \begin{cases} \left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 - \left(x^4\right)^2, 2\left(x^1x^3 - x^2x^4\right), 2\left(x^1x^4 + x^2x^3\right)\right), & n = 2 \\ \left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 - \left(x^4\right)^2, 2x^1x^3, 2x^1x^4, 2x^2x^3, 2x^2x^4\right), & n = 4 \\ \left(\left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2, \left(x^3\right)^2 - \left(x^4\right)^2, 2x^1x^2, \sqrt{2}\left(x^1x^3 + x^2x^4\right),\right. & \\ \qquad \left.\sqrt{2}\left(x^2x^3 - x^1x^4\right), 2x^3x^4\right), & n = 5 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 - \left(x^4\right)^2\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right),\right. & \\ \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(x^3\right)^2 - \left(x^4\right)^2\right), \sqrt{2}x^1x^2, \sqrt{3}\left(x^1x^3 + x^2x^4\right), & \\ \qquad\qquad \left.\sqrt{3}\left(x^2x^3 - x^1x^4\right), \sqrt{2}x^3x^4\right), & n = 6 \\ \left(\left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2, \left(x^3\right)^2 - \left(x^4\right)^2, 2x^1x^2, \sqrt{2}x^1x^3, \sqrt{2}x^1x^4,\right. & \\ \qquad \left.\sqrt{2}x^2x^3, \sqrt{2}x^2x^4, 2x^3x^4\right), & n = 7 \\ \varphi_{\lambda_2}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right), (\varphi_{\lambda_2} = \text{ o imersie minimală standard}) & n = 8 \end{cases}$$

Pe baza rezultatelor prezentate, am putea fi tentați să credem că, dacă o formă pătratică propriu biarmonică este conținută într-o hipersferă mică $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \left\{\sqrt{1-r^2}\right\}$ din $\mathbb{S}^n$, atunci $r = 1/\sqrt{2}$, iar aplicația corespunzătoare ψ este o aplicație armonică.

Cu alte cuvinte, ne putem pune următoarea întrebare: dacă imaginea lui φ este conținută într-un hiperplan $(\Pi) : \left\langle \overline{N}, \overline{y} \right\rangle = \alpha$, rezultă că distanța $\mathrm{d}(O, \Pi)$ este $1/\sqrt{2}$? Răspunsul este negativ, în sensul că, dacă $\overline{N}$ este coliniar cu $\overset{o}{\Delta} F$, atunci $\mathrm{d}(O, \Pi) = 1/\sqrt{2}$; însă dacă $\overline{N}$ nu este coliniar cu $\overset{o}{\Delta} F$, atunci $\mathrm{d}(O, \Pi) \neq 1/\sqrt{2}$.

4.4 CLASIFICAREA COMPLETĂ A FORMELOR PĂTRATICE λ-BIARMONICE

Motivați de rezultatul de rigiditate obținut pentru formele pătratice biarmonice, ne putem întreba dacă există un rezultat similar și în cazul λ-biarmonic. Răspunsul este afirmativ, iar în această secțiune prezentăm rezultatul. Mai întâi, pentru formele pătratice λ-biarmonice, deducem formula de caracterizare, iar apoi demonstrăm că o formă pătratică este o aplicație propriu λ-biarmonică dacă și numai dacă densitatea sa de energie este o constantă specifică. Folosind acest rezultat, enunțăm o teoremă de rigiditate care leagă formele pătratice propriu λ-biarmonice cu cele armonice.

Folosind Teoremele (3.2) și (4.7), din Ecuația (1.2) obținem

Teorema 4.24. *([3]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ o formă pătratică. Atunci, câmpul său de λ-bitensiune este dat de*

$$\begin{aligned}\tau_{2,\lambda}(\varphi)_{\overline{x}} = & -2\left(2m+10-8X^tSX+\lambda\right)\left(\mathrm{tr}A_1, \mathrm{tr}A_2, \ldots, \mathrm{tr}A_{n+1}\right)\\ & +\Big(4(m+3)(m+5)+2\lambda(m+3)-\left(24(m+5)+4\lambda\right)X^tSX\\ & +32\left(X^tSX\right)^2\Big)\Phi(\overline{x})+32\left(X^tA_1SX, X^tA_2SX, \ldots, X^tA_{n+1}SX\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Teorema 4.25. *([3]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ o formă pătratică între sfere, cu $m \geq 2$. Atunci, φ este propriu λ-biarmonică dacă și numai dacă are densitate de energie constantă $e(\varphi) = (m+1)/2 + \lambda/4$ şi $|\lambda| < 2(m+1)$.*

Prezentăm în continuare rezultatul principal al acestei secțiuni.

Teorema 4.26. *([3]) Dacă $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ este o formă pătratică propriu λ-biarmonică, cu $|\lambda| < 2(m+1)$, atunci, până la o izometrie a lui $\mathbb{S}^n$, primele n componente ale lui φ formează o aplicație armonică*

$$\psi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{4(m+1)}}\right).$$

Propoziţia 4.27. *([3]) Fie $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ o formă pătratică propriu λ-biarmonică, cu $|\lambda| < 2(m+1)$. Presupunem că imaginea lui φ este conținută într-o hipersferă mică $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ a lui $\mathbb{S}^n$. Atunci, $r \geq \sqrt{1/2+\lambda/(4(m+1))}$. Mai mult,*

1. *dacă $r = \sqrt{1/2+\lambda/(4(m+1))}$, atunci aplicaţia*

$$\psi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{4(m+1)}}\right)$$

determinată de φ este armonică;

2. *dacă* $r > \sqrt{1/2 + \lambda/(4(m+1))}$, *atunci* φ *stă în* $\mathbb{S}^{n-2}\left(\sqrt{1/2 + \lambda/(4(m+1))}\right) \subset \mathbb{S}^{n-1}(r)$ *şi aplicaţia*

$$\psi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n-2}\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4(m+1)}}\right)$$

determinată de φ *este armonică.*

5

APLICAȚII POLINOMIALE BIARMONICE ÎN SFERE

În prima secțiune a acestui capitol studiem aplicațiile diagonale $\varphi = \mathrm{i} \circ (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1+n_2+1}$, unde i reprezintă incluziunea canonică a produsului standard $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ în $\mathbb{S}^{n_1+n_2+1}$, iar $\varphi_1 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$, $\varphi_2 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, cu $r_1^2 + r_2^2 = 1$, sunt aplicații polinomiale omogene de grade k_1 şi, respectiv, k_2. Mai întâi, calculăm câmpul de bitensiune al aplicației φ. Apoi, ca aplicație, construim aplicații propriu biarmonice folosind două forme armonice de grade k_1 și, respectiv, k_2. În acest caz, $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$, iar densitățile de energie ale aplicațiilor φ_1 și φ_2 trebuie să fie diferite.

În a doua secțiune a acestui capitol analizăm cazul aplicațiilor produs $\varphi = \mathrm{i} \circ (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{S}^{m_1} \times \mathbb{S}^{m_2} \to \mathbb{S}^{n_1+n_2+1}$, unde i este incluziunea canonică a spațiului produs standard $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ în $\mathbb{S}^{n_1+n_2+1}$, iar $\varphi_1 : \mathbb{S}^{m_1} \to \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$, $\varphi_2 : \mathbb{S}^{m_2} \to \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, cu $r_1^2 + r_2^2 = 1$, sunt aplicații polinomiale omogene de grade k_1 și, respectiv, k_2. Sub ipoteza biarmonicității proprii, se obține că $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$ și, de asemenea, că densitățile de energie ale aplicațiilor φ_1 și φ_2 trebuie să fie diferite.

Ideea de a obține aplicații biarmonice prin combinarea a două aplicații armonice își are originea în [22, 50], unde astfel de construcții au fost studiate în contextul imersiilor izometrice și al submersiilor riemanniene. Interesant este faptul că, atât în acele cazuri, cât și în cel tratat aici, razele sunt egale cu $1/\sqrt{2}$. Totuși, tehnica folosită în cazul nostru este complet diferită de cele utilizate în [22, 50].

Majoritatea rezultatelor prezentate aici sunt originale și apar, de asemenea, în [2].

5.1 APLICAȚII DIAGONALE ÎNTRE SFERE

Ca aplicație a Teoremei 2.1, considerăm cazul particular în care

$$\varphi = \mathrm{i} \circ (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n, \tag{5.1}$$

unde $n = n_1 + n_2 + 1$, i este incluziunea canonică a produsului standard $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ în $\mathbb{S}^n$, iar aplicațiile φ_1 și φ_2 sunt date conform diagramelor de mai jos,

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{m+1} \arrow[r, "F_1"] & \mathbb{R}^{n_1+1} \\
\mathbb{S}^m \arrow[u, "\mathrm{i}"] \arrow[ur, "\Phi_1"] \arrow[r, "\varphi_1"'] & \mathbb{S}^{n_1}\left(r_1\right) \arrow[u, "\mathrm{i}_1"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{m+1} \arrow[r, "F_2"] & \mathbb{R}^{n_2+1} \\
\mathbb{S}^m \arrow[u, "\mathrm{i}"] \arrow[ur, "\Phi_2"] \arrow[r, "\varphi_2"'] & \mathbb{S}^{n_2}\left(r_2\right) \arrow[u, "\mathrm{i}_2"']
\end{tikzcd}
$$

unde $r_1^2 + r_2^2 = 1$, iar F_1 și F_2 sunt forme de grade k_1 şi, respectiv, k_2, adică pe $\mathbb{R}^{m+1}$ avem $\left|F_1\left(\overline{x}\right)\right|^2 = r_1^2 \left|\overline{x}\right|^{2k_1}$, respectiv $\left|F_2\left(\overline{x}\right)\right|^2 = r_2^2 \left|\overline{x}\right|^{2k_2}$. Atunci, pentru φ, avem următoarea diagramă:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{m+1} \arrow[r, "F = \left(F_1, F_2\right)"] & \mathbb{R}^{n_1+n_2+2} \\
\mathbb{S}^m \arrow[u, "\mathrm{i}"] \arrow[ur, "\Phi = \left(\Phi_1, \Phi_2\right)"] \arrow[r, "\varphi = \mathrm{i} \circ \left(\varphi_1, \varphi_2\right)"'] & \mathbb{S}^{n_1+n_2+1} \arrow[u, "\mathrm{i}"']
\end{tikzcd}
$$

Teorema 5.1. *([2]) Câmpul de tensiune al aplicației φ definită în Ecuația (5.1) este dat de*

$$
\begin{aligned}
\tau\left(\varphi\right) = -\overset{o}{\Delta} F + \Bigg(& \left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}} F\right|^2 - k_1^2 r_1^2 - k_2^2 r_2^2 + k_1\left(1 - m - k_1\right) \right) \Phi_1, \\
& \left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}} F\right|^2 - k_1^2 r_1^2 - k_2^2 r_2^2 + k_2\left(1 - m - k_2\right) \right) \Phi_2 \Bigg).
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

Corolarul 5.2. *([2]) Dacă $\overset{o}{\Delta} F_1 = 0$ și $\overset{o}{\Delta} F_2 = 0$, atunci aplicația φ definită în Ecuația (5.1) este armonică dacă și numai dacă $k_1 = k_2$.*

Corolarul 5.3. *([2]) Dacă $F_1 : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n_1+1}$ și $F_2 : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n_2+1}$ sunt forme de grade k_1 şi, respectiv, k_2, fiecare de grad minim în clasa sa, astfel încât restricțiile lor $\varphi_1 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1}\left(r_1\right)$ și $\varphi_2 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_2}\left(r_2\right)$ sunt armonice, atunci aplicația φ definită în Ecuația (5.1) este armonică dacă și numai dacă $k_1 = k_2$.*

Teorema 5.4. *([2]) Fie $\varphi_1 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1}\left(r_1\right)$ și $\varphi_2 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_2}\left(r_2\right)$ două aplicații armonice cu densități de energie constante, astfel încât $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Atunci aplicația*

$$
\varphi = \mathrm{i} \circ \left(\varphi_1, \varphi_2\right) : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1+n_2+1},
$$

este armonică dacă şi numai dacă $\left|\mathrm{d}\varphi_1\right|^2 / r_1^2 = \left|\mathrm{d}\varphi_2\right|^2 / r_2^2$.

Teorema 5.5. *([2]) Câmpul de bitensiune al aplicației φ definită în Ecuația (5.1) este dat de*

$$
\begin{aligned}
\tau_2(\varphi) =& \overset{o}{\Delta}\overset{o}{\Delta} F \\
&+ \Big(2\left(mk_1 + k_1^2 - 3k_1 - m + 3\right)\overset{o}{\Delta}F_1 + k_1^2\left(m + k_1 - 1\right)^2\Phi_1, \\
&2\left(mk_2 + k_2^2 - 3k_2 - m + 3\right)\overset{o}{\Delta}F_2 + k_2^2\left(m + k_2 - 1\right)^2\Phi_2\Big) \\
&+ 2\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2 - k_1^2 r_1^2 - k_2^2 r_2^2\right) \\
&\cdot\left(-\overset{o}{\Delta}F_1 + k_1\left(1 - m - k_1\right)\Phi_1, -\overset{o}{\Delta}F_2 + k_2\left(1 - m - k_2\right)\Phi_2\right) \\
&+ \Bigg\{-2\overset{o}{\Delta}\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2\right) - 2\left|\overset{o}{\nabla}\,\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2 + \left|\overset{o}{\Delta}F\right|^2 \\
&+2\left(m + 2k_1 - 3\right)\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F_1\right|^2 + 2\left(m + 2k_2 - 3\right)\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F_2\right|^2 \\
&-r_1^2k_1^2\left(m^2 + 4mk_1 - 6m + 5k_1^2 - 7k_1 + 5\right) - 2k_1\left(m + k_1 - 1\right)\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F_1\right|^2 \\
&-r_2^2k_2^2\left(m^2 + 4mk_2 - 6m + 5k_2^2 - 7k_2 + 5\right) - 2k_2\left(m + k_2 - 1\right)\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F_2\right|^2 \\
&+2\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2 - k_1^2r_1^2 - k_2^2r_2^2\right)^2\Bigg\}\Phi + 2\overset{o}{\mathrm{d}}F\left(\overset{o}{\operatorname{grad}}\left(\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F\right|^2\right)\right) \\
&- 4\left(\left(k_1 - 1\right)\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F_1\right|^2 + \left(k_2 - 1\right)\left|\overset{o}{\mathrm{d}}F_2\right|^2\right)\left(k_1\Phi_1, k_2\Phi_2\right).
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Teorema 5.6. *([2]) Dacă $F_1 : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n_1+1}$ și $F_2 : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n_2+1}$ sunt două forme armonice de grade k_1, respectiv k_2, atunci aplicația φ definită în Ecuația (5.1) este propriu biarmonică dacă și numai dacă $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$ și $k_1 \neq k_2$.*

Observaţia 5.7. Teorema de mai sus poate fi privită ca un caz particular al unui rezultat mai general stabilit recent în [18] (vezi Teorema 1.3). Totuși, în [18], autorul utilizează o metodă diferită într-un cadru mai general, în timp ce în această lucrare, Teorema 5.6 rezultă ca o aplicație a Teoremei 5.5.

Observaţia 5.8. Notăm că, dacă $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$, condiția $k_1 \neq k_2$ este echivalentă cu $e(\varphi_1) \neq e(\varphi_2)$.

Corolarul 5.9. *([2]) Dacă $F_1 : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n_1+1}$ și $F_2 : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n_2+1}$ sunt forme de grade k_1, respectiv k_2, fiecare de grad minim în clasa sa, astfel încât restricțiile lor $\varphi_1 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1}$ și $\varphi_2 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_2}$ sunt armonice, atunci aplicația φ definită în Ecuația (5.1) este propriu biarmonică dacă și numai dacă $k_1 \neq k_2$ și $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$.*

Teorema 5.10. *([2]) Fie $\varphi_1 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ și $\varphi_2 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ două aplicații armonice cu densități de energie constante, astfel încât $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Atunci, aplicația*

$$\varphi = \mathrm{i} \circ (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n_1+n_2+1},$$

este propriu biarmonică dacă și numai dacă $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$ și $e(\varphi_1) \neq e(\varphi_2)$.

Ca aplicație a Teoremei 5.6, construim o nouă familie de aplicații propriu biarmonice pornind de la imersii minimale standard (vezi, de exemplu, [13, 25, 32]).

Fie $\left\{\Phi_1, \ldots, \Phi_{n(k)}\right\}$ o bază ortonormată față de produsul scalar uzual al spațiului vectorial al armonicelor sferice de ordin k, unde

$$n(k) = (m + 2k - 1)\left((m + k - 2)!\right) / \left(k!\,(m-1)\right).$$

Considerăm aplicația

$$\Phi = c(k)\left(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n(k)}\right) : \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^{n(k)},$$

unde $c(k)$ este o constantă pozitivă ce va fi aleasă corespunzător. Imaginea aplicației Φ se află într-o sferă $\mathbb{S}^{n(k)-1}(r)$, unde raza este $r = \sqrt{m/(k(m+k-1))}$ și putem scrie $\Phi = \mathrm{i} \circ \varphi$, unde $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n(k)-1}(r)$ este o aplicație armonică, iar $\mathrm{i} : \mathbb{S}^{n(k)-1}(r) \to \mathbb{R}^{n(k)}$ este incluziunea canonică. Deoarece transformările omotetice ale metricilor domeniului sau codomeniului păstrează armonicitatea și biarmonicitatea, putem presupune că φ este o aplicație ce ia valori în $\mathbb{S}^{n(k)-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$.

Teorema 5.11. *([2]) Fie $k_1 \neq k_2$ două numere întregi nenegative şi fie*

$$\varphi_1 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n(k_1)-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{și} \quad \varphi_2 : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n(k_2)-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

două aplicații armonice construite ca mai sus. Atunci, aplicația

$$\varphi = i \circ (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^{n(k_1)+n(k_2)-1}$$

este propriu biarmonică.

5.2 APLICAȚII PRODUS ÎN SFERE

Încurajați de rezultatele pozitive ale metodei noastre inițiale, adoptăm o abordare diferită, urmărind extinderea constatărilor anterioare într-un context mai larg. Considerăm acum cazul particular în care

$$\varphi = \mathrm{i} \circ (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{S}^{m_1} \times \mathbb{S}^{m_2} \to \mathbb{S}^{n_1+n_2+1}, \tag{5.4}$$

unde $n = n_1 + n_2 + 1$, i este incluziunea canonică a produsului standard $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ în $\mathbb{S}^n$, iar aplicațiile φ_1 și φ_2 sunt date conform diagramelor de mai jos.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{m_1+1} \arrow[r, "F_1"] & \mathbb{R}^{n_1+1} \\
\mathbb{S}^{m_1} \arrow[u, "\mathrm{i}"] \arrow[ur, "\Phi_1"] \arrow[r, "\varphi_1"'] & \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \arrow[u, "\mathrm{i}_1"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{m_2+1} \arrow[r, "F_2"] & \mathbb{R}^{n_2+1} \\
\mathbb{S}^{m_2} \arrow[u, "\mathrm{i}"] \arrow[ur, "\Phi_2"] \arrow[r, "\varphi_2"'] & \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \arrow[u, "\mathrm{i}_2"']
\end{tikzcd}
$$

unde $r_1^2 + r_2^2 = 1$, iar F_1 și F_2 sunt forme de grade k_1, respectiv k_2, astfel încât pe $\mathbb{R}^{m_1+1}$, respectiv $\mathbb{R}^{m_2+1}$, avem $|F_1(\overline{x})|^2 = r_1^2 |\overline{x}|^{2k_1}$, respectiv $|F_2(\overline{x})|^2 = r_2^2 |\overline{x}|^{2k_2}$. Atunci, pentru aplicația φ avem următoarea diagramă:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{m_1+m_2+1} \arrow[r, "F = (F_1, F_2)"] & \mathbb{R}^{n_1+n_2+2} \\
\mathbb{S}^{m_1} \times \mathbb{S}^{m_2} \arrow[u, "\mathrm{i}"] \arrow[ur, "\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)"] \arrow[r, "\varphi = \mathrm{i} \circ (\varphi_1, \varphi_2)"'] & \mathbb{S}^{n_1+n_2+1} \arrow[u, "\mathrm{i}"']
\end{tikzcd}
$$

Teorema 5.12. *([2]) Considerăm aplicația φ definită în Ecuația (5.4), astfel încât F_1 și F_2 sunt forme armonice. Atunci, φ este propriu biarmonică dacă și numai dacă $r_1 = r_2 = 1/\sqrt{2}$ și $e(\varphi_1) \neq e(\varphi_2)$.*

Observaţia 5.13. Deși cadrul nostru implică forme armonice de ordin k, afirmațiile obținute privind razele sferelor și densitatea de energie prezintă asemănări cu Teorema 2.3 din [50] și Teorema 3.11 din [22], unde sunt studiate, respectiv, imersii și submersii. Metodele noastre sunt independente de cele din referințele menționate, însă concluziile reflectă un tipar geometric comparabil.

EXTENSII

Această teză oferă perspective noi în teoria aplicațiilor biarmonice, în special prin studiul aplicațiilor polinomiale între sfere. Cu toate acestea, rămân mai multe direcții interesante de explorat și de extindere a rezultatelor obținute:

1. **Aplicații polinomiale de grad superior:** Având la dispoziție rezultatele noastre de clasificare pentru aplicațiile polinomiale omogene biarmonice între sfere de grad $k = 2$, este firesc să investigăm biarmonicitatea aplicațiilor polinomiale de grad superior în condiții similare. De exemplu, ne putem întreba dacă există familii de aplicații polinomiale omogene biarmonice de la $\mathbb{S}^3$ la $\mathbb{S}^3$ cu grad din ce în ce mai mare. O astfel de analiză ar putea implica comportamente mai complexe ale densității de energie și teoreme de clasificare mai bogate.

2. **Densitatea de energie a aplicațiilor polinomiale omogene biarmonice între sfere:** Se știe că aplicațiile polinomiale omogene biarmonice de grad $k = 2$ între sfere au densitate de energie constantă. Pentru cazuri specifice de grad mic, precum $k = 3, 4, 5$, folosind tehnica din demonstrația Propoziției 3.5, se poate demonstra că o astfel de aplicație biarmonică trebuie să aibă densitate de energie constantă. Aceasta conduce în mod natural la o întrebare mai generală și fundamentală: Are orice aplicație polinomială omogenă biarmonică între sfere densitate de energie constantă? Răspunsul la această întrebare ar umple un gol important în teorie și ar oferi o înțelegere aprofundată asupra structurii acestor aplicații.

3. **Structura aplicațiilor polinomiale biarmonice între sfere:** Având rezultatul de clasificare pentru aplicațiile polinomiale omogene biarmonice de grad $k = 2$ între sfere și tehnica de construcție a aplicațiilor biarmonice diagonale, o întrebare naturală este dacă toate aplicațiile polinomiale biarmonice între sfere provin din aplicații armonice, fie direct, fie prin combinații și construcții specifice. Un răspuns afirmativ ar aduce o perspectivă mai profundă asupra structurii fundamentale a acestor aplicații și a legăturii lor cu armonicitatea.

Sperăm ca metodele și rezultatele prezentate aici să inspire cercetări viitoare care să aprofundeze înțelegerea teoretică și să identifice noi aplicații ale aplicațiilor biarmonice în geometria diferențială și nu numai.

BIBLIOGRAFIE

[1] R. Ambrosie, *Some remarks on biharmonic quadratic maps between spheres*, Sci. Stud. Res. Ser. Math. Inform., 33 (2023), no. 1, 5–20.

[2] R. Ambrosie, *New constructions of biharmonic polynomial maps between spheres*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, to appear.

[3] R. Ambrosie, *Harmonicity and biharmonicity of quadratic maps between spheres*, Contemp. Math., 821 (2025), 1–22.

[4] R. Ambrosie, *Biharmonic homogeneous polynomial maps of degree* 3 *between spheres*, in preparation.

[5] R. Ambrosie, C. Oniciuc, *The energy density of biharmonic quadratic map between spheres*, Differ. Geom. Appl., 93 (2024), Paper No. 102096, 12pp.

[6] R. Ambrosie, C. Oniciuc, Y.-L. Ou, *Biharmonic homogeneous polynomial maps between spheres*, Results Math. 78 (2023), no. 4, Paper No. 159, 40 pp.

[7] S. Andronic, S. Nistor, *Gap results for biharmonic submanifolds in spheres*, J. Math. Anal. Appl. 548 (2025), no. 1, Paper No. 129378, 34 pp.

[8] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic function theory*, Springer New York, NY, 2001.

[9] P. Baird, A. Fardoun, S. Ouakkas, *Liouville-type theorems for biharmonic maps between Riemannian manifolds*, Adv. Calc. Var. 3 (2010), no. 1, 49–68.

[10] P. Baird, A. Fardoun, S. Ouakkas, *Biharmonic maps from biconformal transformations with respect to isoparametric functions*, Differential Geom. Appl. 50 (2017), 155–166.

[11] P. Baird, D. Kamissoko, *On constructing biharmonic maps and metrics*, Ann. Global Anal. Geom. 23 (2003), no. 1, 65–75.

[12] P. Baird, Y.-L. Ou, *Biharmonic conformal maps in dimension four and equations of Yamabe-type*, J. Geom. Anal. 28 (2018), no. 4, 3892–3905.

[13] P. Baird, J.C. Wood, *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, London Mathematical Society Monographs (N.S.), 29, (Oxford University Press, Oxford, 2003).

[14] J.M. Balado-Alves, A. Siffert, *Construction of r-harmonic submanifolds*, 2024, arXiv:2404.02535.

[15] A. Balmuş, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic maps between warped product manifolds*, J. Geom. Phys. 57 (2007), 2, 449–466.

[16] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1986.

[17] V. Branding, *More Weakly Biharmonic Maps from the Ball to the Sphere*, J. Geom. Anal. (2025) 35, 23.

[18] V. Branding, *Remarks on constructing biharmonic and conformal biharmonic maps to spheres*, 2025, arXiv:2501.08804.

[19] V. Branding, C. Oniciuc, *Unique continuation theorems for biharmonic maps*, Bull. London Math. Soc. 51 (2019), no. 4, 603–621.

[20] R.L. Bryant, *Minimal surfaces of constant curvature in S^n*, Trans. Amer. Math. Soc. 290 (1985), no. 1, 259–271.

[21] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of* $\mathbb{S}^3$, Internat. J. Math., Vol. 12, No. 8 (2001) 867–876.

[22] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math. 130 (2002), 109–123.

[23] E. Calabi, *Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres*, J. Differential Geometry 1 (1967), 111–125.

[24] M. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Boston, 1992.

[25] M. Do Carmo, N. Wallach, *Minimal Immersions of Spheres into Spheres*, Ann. of Math., 2nd Ser., 93 (1971), no. 1, 43–62.

[26] E. Cartan, *Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques*, Math. Z. 45 (1939), 335–367.

[27] S. Chang, *On quadratic forms between spheres*, Geom. Dedicata 70 (1998), no. 2, 111–124.

[28] S. Chang, L. Wang, P. Yang, *A regularity theory of biharmonic maps*, Comm. Pure Appl. Math. 52 (1999), no. 9, 1113–1137.

[29] S.S. Chern, M. Do Carmo, S. Kobayashi, *Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length*

[30] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, Inc., 1990.

[31] J. Eells, L. Lemaire, *Selected Topics in Harmonic Maps*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol.50, American Mathematical Society, Providence, RI, 1983,v+85 pp.

[32] J. Eells, A. Ratto, *Harmonic maps and minimal immersions with symmetries. Methods of ordinary differential equations applied to elliptic variational problems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. iv+228 pp.

[33] J. Eells, J.H. Sampson, *Energie et deformations en geometrie differentielle*, Ann. Inst. Fourier 14 (1964), fasc. 1, 61–69.

[34] J. Eells, J.H. Sampson, *Variational Theory in Fibre Bundles*, Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, 1965, pp.22–33.

[35] H.I. Eliasson, *Introduction to global calculus of variations*, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1974, pp. 113–135.

[36] D. Ferus, H. Karcher, H.F. Münzner, *Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen.(German)[Clifford algebras and new isoparametric hypersurfaces]*, Math. Z.177(1981), no.4, 479–502.

[37] D. Fetcu, C. Oniciuc, *Biharmonic and biconservative hypersurfaces in space forms*, Contemp. Math., vol. 777(2022), 65–90.

[38] R. Fueter, *Zur Theorie der Brandtschen Quaternionenalgebren*, Mathematische Annalen 110 (1935), 650–661.

[39] H. He, H. Ma, F. Xu, *On eigenmaps between spheres*, Bull. London Math. Soc. 35 (2003), no. 3, 344-–354.

[40] G.Y. Jiang, *2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), 130–144.

[41] G.Y. Jiang. *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A7(4) (1986), 389–402.

[42] K. Kenmotsu, *Minimal surfaces with constant curvature in 4-dimensional space forms*, Proc. Amer. Math. Soc. 89 (1983), no. 1, 133–138.

[43] S.G. Krantz, H.R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser Boston, MA, (2012).

[44] Y.B. Ku, *Interior and boundary regularity of intrinsic biharmonic maps to spheres* Pacific J. Math. 234 (2008), no. 1, 43–67.

[45] K.Y. Lam, *Some new results on composition of quadratic forms*, Invent. Math. 79 (1985), no. 3, 467–474.

[46] L. Lemaire, *Minima and critical points of the energy in dimension two*, in: Global Differential Geometry and Global Analysis, Berlin, 1979, in: Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 838, 1981, pp. 187–193.

[47] E. Loubeau, C. Oniciuc, *On the biharmonic and harmonic indices of the Hopf map*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 5239–5256.

[48] S. Montaldo, C. Oniciuc, A. Ratto, *Rotationally symmetric biharmonic maps between models*, J. Math. Anal. Appl. 431 (2015), no. 1, 494–508.

[49] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.) 48 (2002), no. 2, 237–248.

[50] C. Oniciuc, *New examples of biharmonic maps in spheres*, Colloq. Math. 97 (2003), no. 1, 131–139.

[51] C. Oniciuc, *O Introducere în Teoria Aplicaţiilor Armonice*, Casa Editorial Demiurg, Iaşi, 2007.

[52] C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in space forms*, Habilitation Thesis (2012), www.researchgate.net, https://doi.org/10.13140/2.1.4980.5605.

[53] C. Oniciuc, Y.-L. Ou, *Unpublished note*, (2018).

[54] Y.-L. Ou, *Some constructions of biharmonic maps and Chen's conjecture on biharmonic hypersurfaces*, Journal of Geometry and Physics (2012), Volume 62, Issue 4, 751–762.

[55] Y.-L. Ou, *Bi-eigenmaps and biharmonic submanifolds in a sphere*, J. Geom. Phys. 180 (2022), Paper No. 104621, 5.

[56] Y.-L. Ou, B.-Y. Chen, *Biharmonic Submanifolds And Biharmonic Maps In Riemannian Geometry*, World Scientific, Hackensack, N. J., (2020).

[57] V. Pettinati, A. Ratto, *Existence and nonexistence results for harmonic maps between spheres*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 17 (1990), no. 2, 273–282.

[58] V. Tkachev, *A generalization of Cartan's theorem on isoparametric cubics*, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 8, 2889–2895.

[59] G. Toth, *Classification of quadratic harmonic maps of S^3 into spheres*, Indiana U. Math. J., Col. 36, no.2 (1987) 231–239.

[60] G. Toth, *Quadratic Eigenmaps between Spheres*, Geom. Dedicata, 56 (1995), 35–52.

[61] C.Y. Wang, *Remarks on biharmonic maps into spheres*, Calc. Var. Partial Differential Equations 21 (2004), no. 3, 221–242.

[62] C. Wang, *Stationary biharmonic maps from $\mathbb{R}^m$ into a Riemannian manifold*, Comm. Pure Appl. Math. 57 (2004), no. 4, 419–444.

[63] Z.-P. Wang, Y.-L. Ou, H.-C. Yang, *Biharmonic maps from a 2-sphere*, J. Geom. Phys. 77 (2014), 86–96.

[64] R. Wood, *Polynomial Maps from Spheres to Spheres*, Invent. Math. 5, 163–168 (1968).

[65] F. Wu, Y. Xiong, X. Zhao, *Classification of Quadratic Harmonic Maps of* $\mathbb{S}^7$ *into* $\mathbb{S}^7$, J. Geom. Anal. 25 (2015), 1992–2010.

[66] F. Wu, X. Zhao, *Non-existence of quadratic harmonic maps of* $\mathbb{S}^4$ *into* $\mathbb{S}^5$ *or* $\mathbb{S}^6$, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), no. 3, 1083–1091.

[67] P.Y.H. Yiu, *Quadratic forms between spheres and the nonexistence of sums of squares formulae*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 100 (1986), no. 3, 493–504.