UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA“ din IAŞI
ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ

Rezumatul tezei de doctorat

Studiul unor probleme de optimizare cu multifuncţii pe baza tehnicilor analizei variaţionale

Student:
Chelmuş Dumitru-Teodor

Coordonator:
prof. dr. Durea Marius

Iaşi 2021

Cuprins

Introducere

Frumuseţea teoriei optimizării provine, pe de o parte, din multitudinea de aplicaţii practice pe care le are şi, pe de altă parte, din prodigioasa colecţie de tehnici matematice care au fost dezvoltate de cercetători pentru a studia problemele specifice acesteia. Verbul "a optimiza" îşi are originea în latinescul optimum care înseamnă "cel mai bun". Calculul diferenţial pentru funcţii de o variabilă reală, introdus de Isaac Newton şi, independent, de Gottfried Leibniz, a devenit unealta primară în studiul problemelor de optimizare. Teorema lui Fermat şi teorema multiplicatorilor Lagrange reprezintă condiţii necesare pentru extremele locale ale unei funcţii derivabile definite pe spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}$. Apariţia problemelor de optimizare în care obiectivul este o funcţie nenetedă sau o multifuncţie a generat nevoia generalizării teoriei deja existente care, în fond, se baza exclusiv pe proprietatea de diferenţiabilitate a funcţiei obiectiv. Prin urmare s-au dezvoltat concepte precum conuri tangente, conuri normale, subgradienţi pentru funcţii (ne)convexe etc. care au fost utilizate pentru a dezvolta calculul subdiferenţial şi construcţia de derivate asociate multifuncţiilor.

Analiza variaţională a cunoscut o dezvoltare seminificativă în ultimi 50 de ani prin introducerea unei suite de tehnici şi unelte bazate pe studiul sistematic al unor concepte precum conuri tangente şi conuri normale la o mulţime. Mai mult, optimizarea unor probleme cu grad sporit de generalitate din diverse contexte practice, precum economie, teoria jocurilor, control optimal etc., a generat o necesitate de a generaliza procedeul clasic de diferenţiere a funcţiilor scalare şi vectoriale. Acest studiu a condus la generalizarea rezultatelor clasice privind teoria diferenţiabilităţii care a generat noi teoreme de medie, principii de separare şi principii de extremalitate. Astfel s-a conturat perspectiva, unanim acceptată de cercetători, conform căreia aceste rezultate sunt foarte importante în demersul realizării unui studiu unitar al funcţiilor, multifuncţiilor şi mulţimilor.

Cadrul de lucru al studiului prezentat în teză este cel al spaţiilor vectoriale normate. Inspiraţi de anumite idei extrase din studiul unor probleme de optimizare din teoria locaţiei şi programare matematică, unde unele direcţii sunt mai importante decât altele (fiind numite direcţii fundamentale), am introdus prin prezenta lucrare o noţiune de minim direcţional pentru aplicaţii. Eficienţa

Pareto direcţională este un concept natural şi flexibil care se diferenţiază de conceptul standard de eficienţă Pareto prin faptul că în spaţiul de plecare este considerată numai o mulţime de direcţii care pornesc din punctul de referinţă în locul unei bile în jurul punctului. Apoi, observăm în cel mai simplu caz, al funcţiilor cu valori reale (de variabilă reală), cum condiţiile necesare de optimalitate naturale sunt date de teorema lui Fermat într-unul din capetele intervalului. Mai general, avem în vedere şi versiunile corespunzătoare unilaterale ale teoremei lui Fermat pentru funcţii definite pe un interval cu valori reale care nu sunt neapărat diferenţiabile, dar care admit derivate unilaterale. Acest lucru ne dă un imbold de a lua în considerare o generalizare cuprinzătoare a acestui caz, şi anume, probleme de optimizare în care funcţia de minimizat, numită funcţie obiectiv, este înlocuită cu o multifuncţie şi constrângerea este descrisă folosind imaginea inversă a unui con printr-o altă multifuncţie. Pentru studiul acestui caz general, adaptăm noţiunea clasică de con tangent la contextul direcţional şi considerăm mai multe tipuri de proprietăţi de regularitate direcţională a multifuncţiei obiectiv şi a celei care descrie restricţia. Această abordare ne permite să obţinem condiţiile necesare de optimalitate care, la rândul lor, generalizează prototipul teoremei lui Fermat menţionate mai sus. Mai mult, prezentăm şi condiţii de optimalitate folosindu-ne de conuri tangente şi coderivate. Atât pe spaţiile primale, cât şi pe cele duale, luăm în considerare mai multe situaţii referitoare la multifuncţia obiectiv şi multifuncţia restricţie, făcând apel la o serie de tehnici specifice de studiu, printre care amintim condiţiile generalizate de calificare, scalarizarea Gerstewitz, paradigma deschidere vs. minimalitate şi principiul extremal.

Capitolul 1 este dedicat unor subiecte preliminare care vor fi utilizate pe parcursul tezei. În deschiderea acestui capitol prezentăm câteva aspecte ce ţin de operaţii cu mulţimi, topologie şi analiză funţională, continuând cu prezentarea ideilor de referinţă din teoria optimizării şi analiza variaţională alături de o serie de tehnici specifice acestor domenii de cercetare.

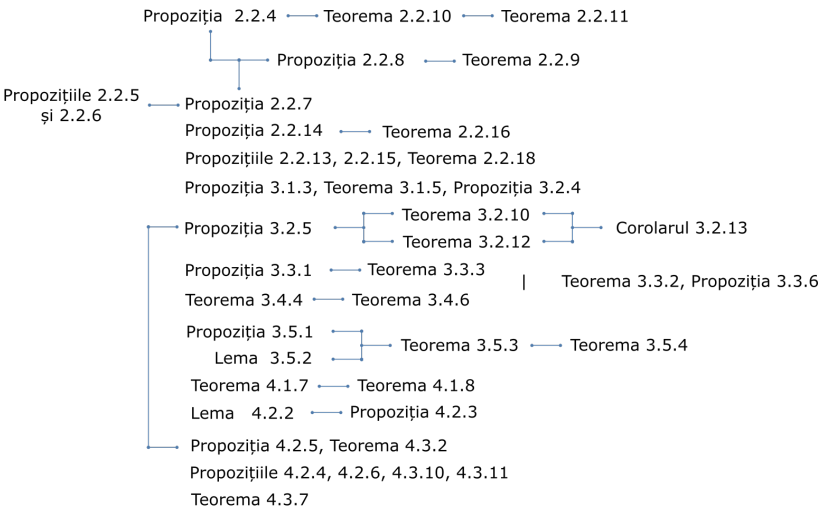
Capitolul 2 începe cu formularea problemei de optimizare abstractă multicriterială şi cu definirea conceptului de eficienţă direcţională pe care îl studiem în această teză. Sfârşitul primei secţiuni este dedicat unor comparaţii şi exemple relevante pentru studiul nostru. A doua secţiune tratează condiţiile de optim pentru conceptele menţionate anterior, fiind împărţită în două subsecţiuni. În primul rând, ne concentrăm pe obţinerea de condiţii de optim utilizând conuri tangente şi în acest sens adaptăm conceptul clasic de con tangent în sens Bouligand şi pe cea de derivată Bouligand a unei multifuncţii. În continuare, utilizând unele proprietăţi de regularitate metrică direcţională, prezentăm câteva rezultate ce conţin condiţii necesare de optim asociate, pe de o parte, unor probleme de optimizare cu multifuncţii şi restricţii cu inegalităţi generalizate, iar pe de altă parte, unor probleme de optimizare neliniare netede. În al doilea rând, tratăm problema determinării condiţiilor necesare de optim utilizând conuri normale Mordukhovich.

Capitolul 3 conţine patru tipuri principale de rezultate: penalizare exactă de tip Clarke pentru probleme de optimizare scalară şi vectorială, penalizare exactă de tip Clarke pentru probleme de optimizare cu multifuncţii, condiţii necesare de optim pentru minime direcţionale şi condiţii necesare de optim pentru minime direcţionale aproximative. Mai mult, pe parcusul acestui capitol introducem o variantă modificată a noţiunii de minim direcţional din Capitolul 2 (conul de ordine este generat de o mulţime de direcţii fixate a priori), utilizăm o procedură de dilatare a conurilor în spaţiul de plecare şi studiem conceptul de minim direcţional aproximativ.

Ultimul capitol, Capitolul 4, este dedicat minimelor pentru mulţimi şi aplicaţii multivoce dintr-un punct de vedere care ia în considerare unele direcţii speciale legate în punctul de referinţă considerat în locul abordării clasice care ia în considerare toate direcţiile. În plus, suntem interesaţi de o analiză atentă a mai multor tipuri de soluţii direcţionale (tari, slabe, aproximative) în sensul stabilităţii lor sub impactul unor perturbări. Ultima secţiune a Capitolului 4 conţine două tipuri de rezultate: stabilitatea punctelor de minim şi păstrarea criticalităţii. Un ingredient important este procedura de dilatare a conurilor introdusă şi studiată în Capitolul 3. Mai mult, în discuţia referitoare la criticalitate, au fost utilizate mai multe metode elaborate din analiza variaţională şi din calculul diferenţial generalizat.

În concluzie, această teză se concentrează asupra studiului unor probleme de optimizare scalară, vectorială sau multicriterială utilizând teoria clasică a conurilor tangente şi analiza variaţională modernă. Studiul propus în această teză are intenţia de a continua efortul depus de mai mulţi autori în ultimul deceniu pentru a investiga fenomenele direcţionale din programarea matematică. Mai mult, ne propunem să arătăm puterea mai multor instrumente bazate pe proprietăţile de regularitate direcţională dezvoltate recent.

Diagrama de mai jos prezintă rezultatele originale din lucrarea de faţă care au fost preluate din lucrările: [8, 6, 7, 5].


Propoziția 2.2.4
Teorema 2.2.10
Teorema 2.2.11
Propoziția 2.2.8
Teorema 2.2.9
Propozițiile 2.2.5 și 2.2.6
Propoziția 2.2.7
Propoziția 2.2.14
Teorema 2.2.16
Propozițiile 2.2.13, 2.2.15, Teorema 2.2.18
Propoziția 3.1.3, Teorema 3.1.5, Propoziția 3.2.4
Propoziția 3.2.5
Teorema 3.2.10
Teorema 3.2.12
Corolarul 3.2.13
Propoziția 3.3.1
Teorema 3.3.3
Teorema 3.3.2, Propoziția 3.3.6
Teorema 3.4.4
Teorema 3.4.6
Propoziția 3.5.1
Lema 3.5.2
Teorema 3.5.3
Teorema 3.5.4
Teorema 4.1.7
Teorema 4.1.8
Lema 4.2.2
Propoziția 4.2.3
Propoziția 4.2.5, Teorema 4.3.2
Propozițiile 4.2.4, 4.2.6, 4.3.10, 4.3.11
Teorema 4.3.7

1 Preliminarii

Cuprins

Capitolul de faţă este dedicat unor definiţii şi rezultate preliminare din analiza funcţională şi analiza neliniară precum: conuri tangente, conuri normale şi unele concepte de diferenţiabilitate generalizată utilizate în următoarele capitole. Toate materialele prezentate sunt preluate din [35, 2, 31, 19, 1, 9] şi referinţele bibliografice din acestea.

1.1 Definiții și rezultate de bază

Fie X un spaţiu vectorial peste corpul numerelor reale. Notăm că toate spaţiile vectoriale utilizate în lucrarea de faţă sunt spaţii vectoriale peste corpul $\mathbb{R}$.

Dacă Ω_1, Ω_2 sunt submulţimi nevide ale lui X, suma Minkowski a lui Ω_1 şi Ω_2 este

$$\Omega_1 + \Omega_2 := \{\omega_1 + \omega_2 \mid \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}.$$

Dacă $x \in X, a \in \mathbb{R}$ şi $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nevidă, atunci $x + \Omega_1 := \Omega_1 + x := \{x\} + \Omega_1$, $A\Omega_1 := \{\alpha\omega_1 \mid \omega_1 \in \Omega_1, \alpha \in A\}$, and $a\Omega_1 := \{a\}\Omega_1 = \{a\omega \mid \omega \in \Omega_1\}$. Prin convenţie, $A + \varnothing := \varnothing$, $a \cdot \varnothing := \varnothing$, şi $\varnothing \cdot \Omega := \varnothing$. Date două elemente $x_1, x_2 \in X$, segmentul închis $[x_1, x_2]$ este definit prin:

$$[x_1, x_2] := \{(1-\lambda)\, x_1 + \lambda x_2 \mid \lambda \in [0,1]\}\,.$$

Dacă $\lambda \in (0,1)$ în definiţia de mai sus, obţinem segmentul deschis (x_1, x_2). O mulţimea nevidă $\Omega \subset X$ se numeşte convexă dacă $[\omega_1, \omega_2] \subset \Omega$ oricare ar fi $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$.

Fie Ω o submulţimea nevidă a lui X. Mulţimea

$$\operatorname{conv} \Omega := \bigcap \{C \mid \Omega \subset C \subset X \text{ şi } C \text{ este convexă}\}$$

este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulţimea convexă care conţine pe Ω şi se numeşte înfăşurătoarea convexă a lui Ω.

Considerăm $(X, \|\cdot\|_X)$ un spaţiu normat peste $\mathbb{R}$. Dacă nu există risc de confuzie, pentru simplitate vom nota $\|\cdot\|_X$ prin $\|\cdot\|$. Peste tot în lucrarea aceasta, când $X = \mathbb{R}^n$, norma cu care vom înzestra spaţiul X va fi norma euclidiană. Dacă $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sunt spaţii liniare normate, atunci produsul cartezian $X \times Y$ este de asemenea spaţiu liniar normat în raport cu norma

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y\,.$$

Toate spaţiile liniare considerate în această lucrare sunt normate dacă nu se fac alte presupuneri.

Fie $x \in X$ şi $r \in (0, +\infty)$. Bila deschisă şi bila închisă din X de centru x şi rază r sunt mulţimile definite prin

$$B_X(x,r) := \{x_1 \in X \mid \|x - x_1\| < r\}$$

şi

$$D_X(x,r) := \{x_1 \in X \mid \|x - x_1\| \le r\}\,,$$

respectiv. Vom considera de asemenea cazul $r = +\infty$ şi în această situaţie avem $B_X(x,r) = D_X(x,r) = X$. Notăm cu B_X bila unitate deschisă $B_X(0,1)$ şi cu D_X bila unitate închisă $D_X(0,1)$. Sfera unitate din X, notată cu S_X, este mulţimea acelor $x \in X$ cu proprietatea $\|x\| = 1$. Topologia lui X pe care o vom utiliza în această lucrare este cea indusă de normă. Interiorul topologic, închiderea şi frontiera mulţimii A sunt notate cu $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$ şi $\operatorname{bd} A$, respectiv. Ca de obicei, dat $x \in X$, notăm prin $\mathcal{V}(x)$ sistemul fundamental de vecinătăţi al lui x.

Reamintim că X^* este dualul topologic al lui X şi are o structură de spaţiu liniar normat în raport cu operaţiile algebrice uzuale şi este înzestrat cu norma duală definită după cum urmează: pentru $x^* \in X^*$,

$$\|x^*\|_* := \sup\{|\langle x^*, x\rangle| \mid x \in X, \|x\| \le 1\}.$$

Cu toate acestea, pentru că nu există pericol de confuzie, notăm $\|\cdot\|_*$ cu $\|\cdot\|$. Alternativ, vom nota $\langle x^*, x\rangle$ cu $x^*(x)$. Notăm topologia slabă a lui X cu w şi topologia slab-stelat a lui X^* cu w^*.

Funcţia distanţă asociată mulţimii $\Omega \subset X$ este definită prin

$$d_\Omega : X \to \mathbb{R}, \quad d_\Omega(x) := \inf\{\|x - \omega\| \mid \omega \in \Omega\}.$$

Prin convenţie, $d(x, \varnothing) := +\infty$. Presupunem că Ω este nevidă. Funcţia d_Ω este 1-Lipschitz pe X, i.e.,

$$|d_\Omega(x_1) - d_\Omega(x_2)| \le \|x_1 - x_2\|,$$

oricare ar fi $x_1, x_2 \in X$. Pentru $\Omega_1, \Omega_2 \subset X$, definim excesul lui Ω_1 relativ la mulţimea Ω_2 prin

$$e(\Omega_1, \Omega_2) := \sup\{d(\omega_1, \Omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1\}.$$

Este convenabil să definim $e(\varnothing, \Omega_2) := 0$, pentru orice Ω_2, şi $e(\Omega_1, \varnothing) := +\infty$, pentru orice mulţime nevidă Ω_1.

Fie Y spaţiu liniar normat. Notăm prin $\mathbb{R}_+$ mulţimea numerelor reale pozitive.

Definiţia 1.1.1
O mulţime nevidă $K \subset Y$ se numeşte con dacă

$$\mathbb{R}_+ K \subset K,$$

i.e., pentru orice $x \in K$ şi $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda x \in K$. Conul K se numeşte

- *propriu dacă $K \neq \{0\}$ şi $K \neq X$,*
- *punctat dacă $K \cap -K = \{0\}$, i.e., K nu conţine drepte,*
- *solid dacă $\operatorname{int} K \neq \varnothing$.*

Conul K este convex dacă şi numai dacă $K + K \subset K$.

Fie Ω o submulţime nevidă a lui X. Mulţimea

$$\operatorname{cone}\Omega := \bigcap \{K \mid \Omega \subset K \subset X \text{ şi } K \text{ este un con}\}$$

este cel mai mic con (în sensul incluziunii) care conţine pe Ω şi se numeşte înfăşurătoarea conică a lui Ω. Mulţimea Ω este un con dacă şi numai dacă $\Omega = \operatorname{cone}\Omega$.

Conurile joacă un rol important în teoria optimizării din două motive principale:

- există o clasă de relaţii determinate de conurile din X care induc (pre)ordini pe X care permit definirea unor concepte de extrem local pe X în raport cu acestea (vezi [23] pentru detalii);
- cu ajutorul conurilor se pot aproxima mulţimi (vezi [27] pentru detalii); mai precis, conurile pot fi un substitut bun pentru spaţiile tangente când se lucrează cu obiecte mai nenetede.

Exemplul 1.1.2
Fie $K \subset X$ un con propriu şi convex. Mulţimea

$$K^+ := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle \geq 0, \text{ oricare ar fi } x \in K\}$$

se numeşte conul dual pozitiv a lui K. Se poate arăta cu uşurinţă că dacă $y \in \operatorname{int} K$ (presupus nevid) şi $y^* \in K^* \setminus \{0\}$, atunci $\langle y^*, y\rangle > 0$. Polara negativă a lui K, notată cu K^-, este definită prin

$$K^- := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle \leq 0, \text{ oricare ar fi } x \in K\}.$$

Remarcăm că are loc egalitatea $K^+ = -K^-$.

Necesitate extinderii conceptului clasic de minim (pentru funcţii cu valori reale) la conceptul de eficienţă Pareto a prilejuit considerarea conurilor de ordine. Mai precis, un con convex induce pe un spaţiu liniar o relaţie de preordine, care este compatibilă cu structura liniară a spaţiului pe care se lucrează.

Teorema 1.1.3
Fie X un spaţiu liniar şi $K \subset X$ un con. Relaţia

$$\mathcal{R}_K := \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_2 - x_1 \in K\}$$

este reflexivă şi, oricare ar fi $x, x_1, x_2 \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{R}_+$, avem

$$x_1 \mathcal{R}_K x_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x_1 + x)\mathcal{R}_K(x_2 + x) \\ \lambda x_1 \mathcal{R}_K \lambda x_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Mai mult, K este convex dacă şi numai dacă $\mathcal{R}_K$ este tranzitivă şi, respectiv, K este punctat dacă şi numai dacă $\mathcal{R}_K$ este antisimetrică. Reciproc, dacă $\mathcal{R}$ este o relaţie reflexivă pe X care satisface relaţiile (1.1), atunci $K := \{x \in X \mid 0\mathcal{R}x\}$ este un con şi $\mathcal{R} = \mathcal{R}_K$.

Remarca 1.1.4
Atunci când conul este punctat şi convex această relaţie devine o ordine parţială pe X (pentru detalii, vezi [19, Theorem 2.1.13]). Deci, pentru K con convex punctat, utilizăm notaţia $x_1 \leq_K x_2$ (sau, mai simplu, $x_1 \leq x_2$ când nu apar confuzii) în loc de $x_1 \mathcal{R}_K x_2$. Când $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, putem defini de asemenea relaţia de ordine parţială strictă $<_K$ prin $x_1 <_K x_2$ dacă şi numai dacă $x_2 - x_1 \in \operatorname{int} K$.

În continuare prezentăm concepul de minim principal de la care porneşte studiul de faţă. Notăm că relaţiile de ordine parţială induse de conuri (chiar şi cele cu interiorul vid) sunt esenţiale.

Definiția 1.1.5
Fie X un spaţiu liniar ordonat de un con propriu convex K şi $\Omega \subset X$ o submulţime nevidă.

(i) *Elementul $\overline{x} \in \Omega$ se numeşte minim Pareto al lui Ω în raport cu K, şi scriem $\overline{x} \in \operatorname{Min}(\Omega, K)$, dacă*

$$(\Omega - \overline{x}) \cap (-K) \subset K.$$

(ii) *Presupunem că $\operatorname{int} K \neq \varnothing$. Elementul $\overline{x} \in \Omega$ se numeşte minim Pareto slab al lui Ω în raport cu K, şi scriem $\overline{x} \in \operatorname{WMin}(\Omega, K)$, dacă*

$$(\Omega - \overline{x}) \cap (-\operatorname{int} K) = \varnothing.$$

Remarca 1.1.6
În cazul particular când K este punctat, avem că $\overline{x} \in \mathrm{Min}(\Omega, K)$ dacă şi numai dacă

$$(\Omega - \overline{x}) \cap (-K) = \{0\}.$$

Ultima relaţie înseamnă că nu există $x \in \Omega$ cu $x \neq \overline{x}$ astfel încât $x - \overline{x} \in -K$, i.e., $\overline{x}$ este un element minimal în raport cu relaţia de ordine parţială indusă de conul K.

Remarca 1.1.7
Se poate arăta uşor că, dacă mulţimea K este un con solid, atunci $\mathrm{Min}(\Omega, K) \subset \mathrm{WMin}(\Omega, K)$. Dacă interiorul conului de ordine este vid, atunci noţiunea de minim Pareto slab este inutilizabilă. Din acest motiv, folosind un con convex care include pe K şi are interior nevid, s-a definit un nou concept de eficienţă cu care să lucrăm. Mai exact, elementul $\overline{x} \in A$ se numeşte minim propriu al lui Ω în raport cu K, şi notăm $\overline{x} \in \mathrm{PMin}\,(\Omega, K)$, dacă există un con propriu convex $\widetilde{K}$ cu proprietatea că $K \setminus \{0\} \subset \mathrm{int}\,\widetilde{K}$ astfel încât $\overline{x} \in \mathrm{Min}\left(\Omega, \widetilde{K}\right)$. Se observă uşor că

$$\mathrm{PMin}\,(\Omega, K) \subset \mathrm{Min}(\Omega, \widetilde{K}) \subset \mathrm{WMin}(\Omega, \widetilde{K}),$$

i.e., toate tehnicile utilizate pentru minime slabe funcţionează şi pentru minime proprii (pentru detalii, vezi [3]). Notăm că există multe situaţii când conul de ordine nu este solid, de exemplu, conul de ordine natural din spaţiul Lebesgue $L^p, 1 \leq p < \infty$.

Ultima parte a acestei secţiuni este dedicată prezentării unor notaţii şi noţiuni ce ţin de aplicaţiile multivoce. Fie X şi Y două mulţimi nevide. O aplicaţie $F : X \to 2^Y$ se numeşte multifuncţie şi notăm prin $F : X \rightrightarrows Y$. Următoarele mulţimi sunt de interes în cadrul studiului din lucrarea de faţă, adică domeniul lui F, imaginea lui F, şi graficul lui F:

$$\mathrm{Dom}\,F := \{x \in X \mid F(x) \neq \varnothing\},$$

$$\mathrm{Im}\,F := \{y \in Y \mid \exists x \in X : y \in F(x)\} = \bigcup_{x \in X} F(x),$$

şi, respectiv,

$$\mathrm{Gr}\,F := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

Considerăm Ω o submulţime nevidă a lui X. Atunci, imaginea lui Ω prin F

este

$$F(\Omega) := \{y \in Y \mid \exists \omega \in \Omega : \ y \in F(\omega)\} = \bigcup_{\omega \in \Omega} F(\omega).$$

Deseori este convenabil să identificăm o multifuncţie cu graficul ei, i.e. o multifuncţie F este caracterizată prin graficul său. Inversa multifuncţiei F este $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ definită prin

$$F^{-1}(y) := \{x \in X \mid y \in F(x)\}.$$

Pentru X, Y spaţii liniare normate, prezentăm în cele ce urmează două concepte de limită pentru multifuncţii. Dată multifuncţia $F : X \rightrightarrows Y$, se defineşte limita inferioară în sensul Painlevé-Kuratowski a lui F în $\overline{x} \in \operatorname{cl} \operatorname{dom} F$ prin

$$\operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} F(x) := \left\{ y \in Y \mid \lim_{x \to \overline{x}} d(y, F(x)) = 0 \right\}$$

şi limita superioară în sensul Painlevé-Kuratowski a lui F în $\overline{x} \in \operatorname{cl} \operatorname{dom} F$ prin

$$\operatorname*{Limsup}_{x \to \overline{x}} F(x) := \left\{ y \in Y \mid \liminf_{x \to \overline{x}} d(y, F(x)) = 0 \right\}.$$

Se observă că $\overline{x} \in \operatorname{int} \operatorname{dom} F$ ori de câte ori $\operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} F(x)$ este nevid. Următorul rezultat oferă o caracterizare cu şiruri a celor două limite pentru multifuncţii (vezi [35, Proposition 3.1.1] pentru detalii).

Teorema 1.1.8
Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $\overline{x} \in \operatorname{cl} \operatorname{dom} F$. Atunci limita inferioară şi limita superioară în sensul Painlevé-Kuratowski ale lui F în $\overline{x}$ sunt mulţimi închise şi

$$\operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} F(x) \subset \operatorname{cl} F(x) \subset \operatorname*{Limsup}_{x \to \overline{x}} F(x). \tag{1.2}$$

În plus,

$$\operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} F(x) = \left\{ y \in Y \mid \forall (x_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \overline{x}, \exists (y_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} y, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0 : y_k \in F(x_k) \right\}$$

şi

$$\operatorname*{Limsup}_{x \to \overline{x}} F(x) = \left\{ y \in Y \mid \exists (x_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \overline{x}, \ \exists (y_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} y, \ \forall k \in \mathbb{N} : y_k \in F(x_k) \right\}.$$

Când studiem probleme de optimizare, regularitatea (multi)funcţiei obiectiv este esenţială în vederea obţinerii condiţiilor de optim. În această lucrare vom utiliza o gamă largă de proprietăţi de regularitate precum continuitate (vezi monografia [25] pentru mai multe detalii), deschidere cu rată liniară, regularitate metrică, proprietate Aubin şi proprietate de tip Lipschitz (pentru mai multe detalii a se consulta monografiile [25, 28, 9]).

Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $\Lambda \subset Y$ o mulţime nevidă. Se defineşte

- imaginea inversă slabă a lui Λ prin F drept mulţimea
$$F^{-1}(\Lambda) := \{x \in X \mid F(x) \cap \Lambda \neq \varnothing\} = \bigcup_{y \in \Lambda} F^{-1}(y).$$
- imaginea inversă tare a lui Λ prin F drept mulţimea
$$F^{+1}(\Lambda) := \{x \in X \mid F(x) \subset \Lambda\}.$$

Definiţia 1.1.9
Fie X şi Y spaţii liniare normate. Considerăm $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu valori nevide.

(i) *Spunem că F este superior semicontinuă (ssc, pe scurt) dacă, pentru orice mulţime deschisă $\Lambda \subset Y$, $F^{+1}(\Lambda)$ este deschisă.*

(ii) *Spunem că F este inferior semicontinuă (isc, pe scurt) dacă, pentru orice mulţime deschisă $\Lambda \subset Y$, $F^{-1}(\Lambda)$ este deschisă.*

Fie $L > 0, F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. Atunci

- spunem că F este deschisă în $(\overline{x}, \overline{y})$ dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $r > 0$ astfel încât
$$B_Y(\overline{y}, r) \subset F(B_X(\overline{x}, \varepsilon)).$$
- spunem că F este deschisă cu rată liniară L în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$ dacă există $\varepsilon > 0$ şi vecinătăţile $U \in \mathcal{V}(\overline{x})$, $V \in \mathcal{V}(\overline{y})$ astfel încât, oricare ar fi $\rho \in (0, \varepsilon)$ şi $(x, y) \in \operatorname{Gr} F \cap [U \times V]$:
$$B_Y(y, \rho L) \subset F(B_X(x, \rho)). \tag{1.3}$$

- spunem că F are proprietatea Aubin, sau că este de tip Lipschitz, în jurul lui $(\overline{x},\overline{y})$ cu constanta L dacă există vecinătăţile $U\in\mathcal{V}(\overline{x}),V\in\mathcal{V}(\overline{y})$ astfel încât, oricare ar fi $x,u\in U$:

$$F(x)\cap V\subset F(u)+L\left\|x-u\right\|D_Y. \tag{1.4}$$

- spunem că F este metric regulată în jurul lui $(\overline{x},\overline{y})$ de constantă L dacă există vecinătăţile $U\in\mathcal{V}(\overline{x})$, $V\in\mathcal{V}(\overline{y})$ astfel încât, oricare ar fi $(x,y)\in U\times V$:

$$d(x,F^{-1}(y))\leq Ld(y,F(x)). \tag{1.5}$$

Teorema următoare conţine binecunoscutele legături dintre noţiunile de mai sus: a se vedea [28, Theorems 1.49, 1.52] şi [9, Theorems 3E.7, 3E.9] pentru mai multe detalii.

Teorema 1.1.10
Fie $F:X\rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $(\overline{x},\overline{y})\in\operatorname{Gr}F$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) *F este deschisă cu rată liniară în jurul lui $(\overline{x},\overline{y})$;*

(ii) *F^{-1} este de tip Lipschitz în jurul lui $(\overline{y},\overline{x})$;*

(iii) *F este metric regulată în jurul lui $(\overline{x},\overline{y})$.*

Există alte două proprietăţi de regularitate pentru multifuncţii care generează noi căi de investigare ale problemelor de optimizare (vezi [9] pentru detalii).

Fie $F:X\rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $(\overline{x},\overline{y})\in\operatorname{Gr}F$. Atunci

- spunem că F este calmă în $(\overline{x},\overline{y})$ dacă există o constantă K şi vecinătăţile $U\in\mathcal{V}(\overline{x}),V\in\mathcal{V}(\overline{y})$ astfel încât, oricare ar fi $x\in U$:

$$e\left(F\left(x\right)\cap V,F\left(\overline{x}\right)\right)\leq K\left\|x-\overline{x}\right\|. \tag{1.6}$$

- spunem că F este metric subregulată în $(\overline{x},\overline{y})$ dacă există o constantă K şi vecinătăţile $U\in\mathcal{V}(\overline{x}),V\in\mathcal{V}(\overline{y})$ astfel încât, oricare ar fi $x\in U$:

$$d(x,F^{-1}\left(\overline{y}\right))\leq Kd\left(\overline{y},F\left(x\right)\cap V\right). \tag{1.7}$$

Subregularitatea metrică a lui F caracterizează proprietatea de calm a inversei F^{-1} (vezi Teorema 1.1.10). Mai notăm că proprietatea de calm se poate rescrie astfel: F este calmă în $(\overline{x}, \overline{y})$ dacă şi numai dacă există $K' > K, U$ şi V, ca mai sus, astfel încât, oricare ar fi $x \in U$,

$$F(x) \cap V \subset F(\overline{x}) + K' \|x - \overline{x}\| D_Y.$$

Subregularitatea metrică admite de asemenea o rescriere echivalentă mai simplă în sensul că vecinătatea V poate fi înlăturată. Mai precis, F este metric subregulată în $(\overline{x}, \overline{y})$ dacă şi numai dacă există K şi U, ca mai sus, astfel încât, oricare ar fi $x \in U$,

$$d(x, F^{-1}(\overline{y})) \leq K d(\overline{y}, F(x)).$$

Notăm cu $\overline{\mathbb{R}}$ mulţimea numerelor reale la care adjuncţionăm simbolurile $-\infty$ şi $+\infty$. O funcţie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte o funcţie cu valori extinse. Când lucrăm cu funcţii cu valori extinse vom folosi câteva convenţii de calcul: $(+\infty) + (-\infty) = +\infty, 0 \cdot (+\infty) = +\infty$ and $(-\infty) \cdot 0 = 0$. Dată $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, domeniul lui f şi epigraficul lui f sunt definite prin

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\} \quad \text{şi} \quad \operatorname{epi} f := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}.$$

Spunem că f este proprie dacă $f(x) > -\infty$ şi $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$, i.e., f nu ia valoarea $-\infty$ şi f este finită în cel puţin un punct.

Spunem că f este inferior semicontinuă dacă $\operatorname{epi} f$ este mulţime închisă în $X \times \mathbb{R}$. Spunem că f este inferior semicontinuă în jurul lui $\overline{x}$ dacă f este inferior semicontinuă în fiecare punct dintr-o vecinătate a lui $\overline{x}$. Spunem că f este convexă dacă $\operatorname{epi} f$ este mulţime convexă în spaţiul produs $X \times \mathbb{R}$.

În cazul multifuncţiilor, conceptul de convexitate se extinde în mod natural. Mai precis, dat K un con convex punctat, spunem că $F : X \rightrightarrows Y$ este $K-$convexă dacă

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq_K \lambda F(x_1) + (1-\lambda) F(x_2), \tag{1.8}$$

pentru orice $x_1, x_2 \in X$ şi $\lambda \in (0,1)$.

Pe parcursul acestei lucrări vom studia două tipuri principale de probleme de optimizare pe care le vom prezenta mai jos împreună cu două concepte de eficienţă.

Fie X şi Y spaţii liniare normate, $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $K \subset Y$

un con convex. Considerăm problema de optimizare vectorială fără restricţii asociată lui F:

$$\min_K F(x) \quad \text{astfel încât } x \in X. \tag{P$_0$}$$

Minimul din problema de mai sus este înţeles în sensul definiţiei următoare: spunem că punctul $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este un punct de minim Pareto local pentru F pe X, sau pentru (P_0), sau soluţie locală Pareto a lui (P_0), dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât

$$(F(U) - \overline{y}) \cap (-K) \subset K.$$

Presupunem că $\operatorname{int} K \neq \varnothing$. Spunem că punctul $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este un minim Pareto slab local pentru F pe X dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât

$$(F(U) - \overline{y}) \cap (-\operatorname{int} K) = \varnothing.$$

Dacă alegem $U = X$, atunci se obţin versiunile globale de minim Pareto.

Alături de problema (P_0), vom studia următoarea problemă de optimizare vectorială cu restricţii geometrice

$$\min_K F(x) \quad \text{astfel încât} \quad x \in A, \tag{P}$$

unde $A \subset X$ este o mulţime nevidă. Când studiem astfel de probleme, definiţia conceptului de soluţie pentru problema (P) se obţine din definiţia de mai sus prin simpla înlocuire a lui U cu intersecţia dintre U şi A.

1.2 Conuri tangente. Derivatele unei multifuncţii

Conceptul de con tangent este o noţiune utilă în teoria optimizării care a permis cercetătorilor să extindă tehnicile de aproximare a funcţiilor neliniare prin intermediul funcţiilor liniare. De exemplu, fie X un spaţiu vectorial normat şi presupunem că $f : X \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă Fréchet în

$\overline{x} \in X$. Atunci avem

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle + o(\|h\|), \quad \|h\| \to 0$$

sau, informal, $f(\overline{x}+h)$ poate fi aproximată folosind expresia $f(\overline{x})+\langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle$, pentru $\|h\|$ suficient de mic. În plus, aplicaţia $\nabla f(\overline{x})$ este liniară ceea ce este strâns legat de faptul că mulţimea vectorilor tangenţi la o varietate diferenţiabilă (în sensul geometriei diferenţiale) are o structură de spaţiu liniară. În cazul în care f nu este suficient de netedă, aplicaţia liniară $\nabla f(\overline{x})$ este înlocuită cu derivata direcţională (care este doar pozitiv omogenă). Similar, în cazul în care varietatea cu care se lucrează nu este suficient de netedă, un substitut bun pentru spaţiul tangent este un con tangent.

În continuare definim câteva noţiuni de con tangent pe care le vom utiliza în lucrarea de faţă. Fie $M \subset X$ o mulţime nevidă, $\overline{x} \in X$ şi considerăm multifuncţia

$$\mathcal{R} := \mathcal{R}_{M,\overline{x}} : [0,+\infty) \rightrightarrows X, \quad \mathcal{R}(t) := \begin{cases} t^{-1}(M-\overline{x}), & t>0, \\ \varnothing, & t=0. \end{cases}$$

Notăm $x \to \overline{x}$ cu $x \in M$ prin $x \overset{M}{\to} \overline{x}$.

Definiţia 1.2.1
(i) *Conul tangent în sensul lui Bouligand la mulţimea M în $\overline{x}$ este mulţimea*

$$T_B(M,\overline{x}) := \operatorname*{Limsup}_{t\to 0, t>0} \mathcal{R}_{M,\overline{x}}(t) = \operatorname*{Limsup}_{t\to 0, t>0} t^{-1}(M-\overline{x}).$$

(ii) *Conul tangent în sensul lui Ursescu la mulţimea M în $\overline{x}$ este mulţimea*

$$T_U(M,\overline{x}) := \operatorname*{Liminf}_{t\to 0, t>0} \mathcal{R}_{M,\overline{x}}(t) = \operatorname*{Liminf}_{t\to 0, t>0} t^{-1}(M-\overline{x}).$$

(iii) *Conul tangent în sensul lui Clarke la mulţimea M în $\overline{x}$ este mulţimea*

$$T_C(M,\overline{x}) := \operatorname*{Liminf}_{t\to 0, t>0, x\overset{M}{\to}\overline{x}} \mathcal{R}_{M,x}(t) = \operatorname*{Liminf}_{t\to 0, t>0, x\overset{M}{\to}\overline{x}} t^{-1}(M-x).$$

Folosind relaţia (1.2), se obţine şirul de incluziuni

$$T_C(M,\overline{x}) \subset T_U(M,\overline{x}) \subset T_B(M,\overline{x}) \subset \operatorname{cl}(\operatorname{cone}(M-\overline{x})).$$

Mai notăm că $T_\star(M,\overline{x}) = T_\star(\operatorname{cl} M,\overline{x})$, unde $\star \in \{C,U,B\}$. Dacă $\overline{x} \in \operatorname{int} D$, atunci $T_\star(D,\overline{x}) = T_\star(D \cap M,\overline{x})$, unde $\star \in \{C,U,B\}$. Deseori vom utiliza caracterizarea cu şiruri a conurilor tangente enunţată în teorema de mai jos.

Teorema 1.2.2
Fie $M \subset X$ o mulţime nevidă şi $\overline{x} \in \operatorname{cl} M$. Atunci

- *$u \in T_B\,(M,\overline{x})$ dacă şi numai dacă*

$$\exists\,(t_k) \downarrow 0, \quad \exists\,(u_k) \to u, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad : \quad \overline{x} + t_k u_k \in M,$$

- *$u \in T_U\,(M,\overline{x})$ dacă şi numai dacă*

$$\forall\,(t_k) \downarrow 0, \quad \exists\,(u_k) \to u, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad : \quad \overline{x} + t_k u_k \in M,$$

- *$u \in T_C\,(M,\overline{x})$ dacă şi numai dacă*

$$\forall\,(t_k) \downarrow 0, \quad \forall (x_k) \stackrel{M}{\to} \overline{x}, \quad \exists\,(u_k) \to u, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad : \quad x_k + t_k u_k \in M,$$

unde prin $(t_k) \downarrow 0$ notăm şirul $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (0,+\infty)$ cu proprietatea $t_k \to 0$ pentru $k \to +\infty$.

Mai mult, $T_B\,(M,\overline{x})$ şi $T_U\,(M,\overline{x})$ sunt conuri închise, iar $T_C\,(M,\overline{x})$ este un con convex închis.

Considerăm $F : X \rightrightarrows Y$ şi $(\overline{x},\overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. Utilizând conul tangent $T_\star\,(M,\overline{x})$, unde $\star \in \{C,U,B\}$, se pot defini multifuncţii care să joace rolul de derivată a multifuncţiei F în $(\overline{x},\overline{y})$. Ilustrăm acest procedeu prin prezentarea definiţiei derivatei Bouligand.

Definiţia 1.2.3
Derivata Bouligand a lui F în $(\overline{x},\overline{y})$ este multifuncţia $D_B F\,(\overline{x},\overline{y}) : X \rightrightarrows Y$ definită prin

$$\operatorname{Gr} D_B F\,(\overline{x},\overline{y}) := T_B\,(\operatorname{Gr} F, (\overline{x},\overline{y}))\,,$$

i.e., $v \in D_B F(\overline{x},\overline{y})(u)$ dacă şi numai dacă există $(t_k) \downarrow 0$, $(u_k) \to u$, $(v_k) \to v$, astfel încât, pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$\overline{y} + t_k v_k \in F(\overline{x} + t_k u_k).$$

Dacă $F := f$, unde f este o funcţie, atunci vom omite scrierea lui $\overline{y} = f(\overline{x})$ din notaţia derivatei.

Pe de altă parte, schimbând şirul de cuatificatori din definiţia de mai sus din $(\exists, \exists, \exists)$ în $(\forall, \forall, \exists)$, se defineşte o derivată a lui F care nu interferează cu noţiune de con.

Definiția 1.2.4
Derivata Dini inferioară a lui F în $(\overline{x}, \overline{y})$ este multifuncţia $D_D F\left(\overline{x}, \overline{y}\right) : X \rightrightarrows Y$ definită prin $v \in D_D F(\overline{x}, \overline{y})(u)$ dacă şi numai dacă pentru orice $(t_k) \downarrow 0$ şi $(u_k) \to u$, există $(v_k) \to v$, astfel încât, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$,

$$\overline{y} + t_k v_k \in F(\overline{x} + t_k u_k).$$

Dacă $F := f$, unde f este o funcţie, atunci vom omite scrierea lui $\overline{y} = f(\overline{x})$ din notaţia derivatei.

Există multe rezultate cu privire la reguli de calcul pentru conurile tangente, iar cele ce urmează amintim unul din aceste rezultate pe care îl vom utiliza în Capitolul 2. Mai multe rezultate de acest tip de pot găsi în lucrarea [15].

Fie $f : X \to Y$ o funcţie şi $D \subset X$ o mulţime nevidă şi închisă. Spunem că f este metric subregulată în $(\overline{x}, f\left(\overline{x}\right)) \in D \times Y$ în raport cu D dacă există $s > 0$, $\mu > 0$ astfel încât, oricare ar fi $u \in B(\overline{x}, s) \cap D$,

$$d(u, f^{-1}(f(\overline{x})) \cap D) \leq \mu \left\| f(\overline{x}) - f(u) \right\|.$$

Teorema de mai jos, preluată din [15], ne oferă o formulă de calcul pentru conul tangent Bouligand la imaginea inversă a unei mulţimi printr-o funcţie diferenţiabilă Fréchet.

Teorema 1.2.5
Fie X, Y spaţii Banach, $D \subset X, E \subset Y$ mulţimi închise, $\varphi : X \to Y$ o funcţie continuu diferenţiabilă Fréchet şi $\overline{x} \in D \cap \varphi^{-1}(E)$. Presupunem că $\psi : X \times Y \to Y$, $\psi(x, y) := \varphi(x) - y$ este metric subregulată în $(\overline{x}, \varphi(\overline{x}), 0)$ în raport cu $D \times E$. Atunci

$$T_U(D, \overline{x}) \cap \nabla\varphi(\overline{x})^{-1}(T_B(E, \varphi(\overline{x}))) \subset T_B(D \cap \varphi^{-1}(E), \overline{x}).$$

1.3 Conuri normale. Subdiferențiale și coderivate

Conceptul de con normal într-un spaţiu Banach $(X, \|\cdot\|)$ ne permite să definim derivata unei funcţii sau a unei multifuncţii care sunt definite între spaţii duale. Derivatele definite în secţiunea anterioară reprezintă construcţii specifice spaţiilor primale, însă tot ceea ce urmează are la bază o construcţie în spaţii duale care se datorează lui Boris Mordukhovich şi colaboratorilor săi (vezi [28] pentru detalii). Deschidem această secţiune cu definiţia conceptului de con normal, apoi continuăm cu prezentarea unor proprietăţi de calcul pentru conuri normale, definirea subdiferenţialei unei funcţii şi construcţia coderivatei unei multifuncţii. Încheiem secţiunea cu principiul de extremalitate sau teorema de caracterizare a spaţiilor Asplund.

Fie X, Y spaţii Banach şi considerăm $\Omega \subset X$ o mulţime nevidă.

Definiția 1.3.1
Fixăm $\overline{x} \in \Omega$ şi $\varepsilon \geq 0$.

(i) *Mulţimea $\varepsilon-$normalelor la Ω în $\overline{x}$ este definită prin*

$$\widehat{N}_\varepsilon (\Omega, \overline{x}) := \left\{ x^* \in X^* \mid \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} \overline{x}} \frac{\langle x^*, u - \overline{x} \rangle}{\|u - \overline{x}\|} \leq \varepsilon \right\}. \tag{1.9}$$

Dacă $\varepsilon = 0$, elementele mulţimii (1.9) se numesc normale Fréchet şi mulţimea $\widehat{N}_0 (\Omega, \overline{x}) := \widehat{N} (\Omega, \overline{x})$ se numeşte conul normal Fréchet la Ω în $\overline{x}$. Dacă $\overline{x} \notin \Omega$, atunci definim $\widehat{N}_\varepsilon (\Omega, \overline{x}) := \varnothing$, oricare ar fi $\varepsilon \geq 0$.

(ii) *Presupunem că Ω este închisă în jurul lui $\overline{x}$[1]. Conul normal Mordukhovich la Ω în $\overline{x}$ este mulţimea*

$$N (\Omega, \overline{x}) := \left\{ x^* \in X^* \mid \exists (\varepsilon_n) \downarrow 0, x_n \xrightarrow{\Omega} \overline{x}, x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*, \forall n \in \mathbb{N} : x_n^* \in \widehat{N}_{\varepsilon_n} (\Omega, x_n) \right\},$$

Pentru $\overline{x} \notin \Omega$, folosim convenţia $N (\Omega, \overline{x}) := \varnothing$.

Fie X_1, X_2 spaţii Banach şi $\overline{x} := (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \subset X_1 \times X_2$ fixat arbitrar.

[1] O mulţime $\Omega \subset X$ se numeşte închisă în jurul lui $\overline{x} \in \Omega$ sau local închisă în jurul lui $\overline{x}$ dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât $\Omega \cap U$ este închisă.

Atunci
$$\widehat{N}(\Omega_1 \times \Omega_2, \overline{x}) = \widehat{N}(\Omega_1, \overline{x}_1) \times \widehat{N}(\Omega_2, \overline{x}_2)$$
şi
$$N(\Omega_1 \times \Omega_2, \overline{x}) = N(\Omega_1, \overline{x}_1) \times N(\Omega_2, \overline{x}_2).$$

Să remarcăm că $\widehat{N}(\Omega, \overline{x}) \subset N(\Omega, \overline{x})$ şi, dacă Ω este convexă, atunci
$$\widehat{N}(\Omega, \overline{x}) = N(\Omega, \overline{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, \omega - \overline{x}\rangle \leq 0, \quad \forall \omega \in \Omega\} = (\Omega - \overline{x})^-, \tag{1.10}$$
i.e., conul normal Fréchet şi conul normal Mordukhovich coincid cu conceptul de con normal din analiza convexă. În plus, dacă X este spaţiu liniar finit dimensional, atunci $\widehat{N}(\Omega, \overline{x}) = -(T_B(\Omega, \overline{x}))^+$.

Dacă X este spaţiu liniar finit dimensional, atunci are loc formula de reprezentare
$$N(\Omega, \overline{x}) = \operatorname*{Limsup}_{x \to \overline{x}} \widehat{N}(\Omega, x), \tag{1.11}$$
oricare ar fi $\overline{x} \in \Omega$. În cazul spaţiilor infinit dimensional rezultatul rămâne valabil doar dacă X este spaţiu Asplund.

Reamintim că un spaţiu Banach X se numeşte Asplund dacă orice funcţie continuă şi convexă pe o mulţime deschisă şi convexă $U \subset X$ este diferenţiabilă Fréchet pe o submulţime densă a lui U.

Deci, dacă X este un spaţiu Asplund şi Ω este o mulţime local închisă în jurul lui $\overline{x} \in \Omega$, atunci
$$\begin{aligned} N(\Omega, \overline{x}) &= \operatorname*{Limsup}_{x \xrightarrow{\Omega} \overline{x}} \widehat{N}(\Omega, x) \\ &= \left\{x^* \in X^* \mid \exists (x_n) \xrightarrow{\Omega} \overline{x}, (x_n^*) \xrightarrow{w^*} x^*, \forall n \in \mathbb{N} : x_n^* \in \widehat{N}(\Omega, x_n)\right\}. \end{aligned}$$

Conceptul de aliere a fost introdus de Jean Paul Penot şi colaboratorii săi în [30] şi [26] cu scopul de a obţine reguli de calcul pentru conuri normale Fréchet.

Definiţia 1.3.2
Dat spaţiul normat X şi submulţimile închise $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k$, $k \geq 2$, ale lui X, spunem că $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ sunt aliate în $\overline{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ldots \cap \Omega_k$ dacă, pentru

orice

$$(x_{in}) \xrightarrow{\Omega_i} \overline{x}, \quad x_{in}^* \in \widehat{N}(\Omega_i, x_{in}), \quad i \in \overline{1,k},$$

cu proprietatea $(x_{1n}^* + ... + x_{kn}^*) \to 0$, *avem* $(x_{in}^*) \to 0$ *oricare ar fi* $i \in \overline{1,k}$.

Propoziţia 1.3.3
Presupunem că X *este un spaţiu Asplund. Fie* $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k$, $k \geq 2$, *submulţimi nevide şi închise ale lui* X, *unde* $k \geq 2$. *Dacă submulţimile* $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_k$ *sunt aliate în* $\overline{x}$, *atunci există* $r > 0$ *astfel încât, oricare ar fi* $\varepsilon > 0$ *şi* $x \in [\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap ... \cap \Omega_k] \cap B(\overline{x}, r)$, *există* $x_i \in \Omega_i \cap B(x, \varepsilon)$, $i \in \overline{1,k}$ *astfel încât*

$$\widehat{N}(\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap ... \cap \Omega_k, x) \subset \widehat{N}(\Omega_1, x_1) + ... + \widehat{N}(\Omega_k, x_k) + \varepsilon D_{X^*}.$$

Noţiunea de subdiferenţială a unei funcţii nenetede a luat naştere în mod natural odată cu studierea unor probleme de optimizare în care funcţia obiectiv nu este diferenţiabilă, drept urmare teorema clasică a lui Fermat nu mai poate fi utilizată. Pentru a compensa acest neajuns, utilizând conuri normale se pot defini aşa numitele subdiferenţiale ale unei funcţii care sunt generalizări ale conceptului de derivată a unei funcţii netede (vezi [28] şi [4] pentru detalii).

Definiţia 1.3.4
Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie şi* $\overline{x} \in X$ *astfel încât* $|f(\overline{x})| < +\infty$.

(i) *Subdiferenţiala Fréchet a lui* f *în* $\overline{x}$ *este mulţimea*

$$\widehat{\partial} f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in \widehat{N}(\operatorname{epi} f, (\overline{x}, f(\overline{x})))\}.$$

Pentru $|f(\overline{x})| = +\infty$, *definim* $\widehat{\partial} f(\overline{x}) := \varnothing$.

(ii) *Subdiferenţiala Mordukhovich a lui* f *în* $\overline{x}$ *este mulţimea*

$$\partial f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N(\operatorname{epi} f, (\overline{x}, f(\overline{x})))\}.$$

Pentru $|f(\overline{x})| = +\infty$, *definim* $\partial f(\overline{x}) := \varnothing$.

Remarca 1.3.5
Dacă $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *este finită în* $\overline{x} \in X$, *atunci* $\widehat{\partial} f(\overline{x}) \subset \partial f(\overline{x})$. *În cazul particular în care* f *este convexă, atunci* ∂f *şi* $\widehat{\partial} f$ *coincide cu subdiferenţiala Fenchel din analiza convexă.*

Remarca 1.3.6
În cazul neted, să zicem pentru $f : X \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^1 *pe* X, *subdiferenţialele definite mai sus se reduc la mulţimea* $\{\nabla f(\overline{x})\}$.

În continuare prezentăm trei rezultate importante care fac apel la subdiferenţialele definite anterior: o teoremă de reprezentare a conurilor normale, o teoremă de tip Fermat şi o regulă de sumare exactă pentru subdiferenţiala Mordukhovich.

Teorema 1.3.7
Fie X un spaţiu Banach, $\Omega \subset X$ o mulţime nevidă şi închisă şi $\overline{x} \in \Omega$. Atunci

$$\widehat{\partial} d\left(\overline{x}, \Omega\right) = \widehat{N}\left(\Omega, \overline{x}\right) \cap D_{X^*}$$

şi

$$N\left(\Omega, \overline{x}\right) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial d\left(\overline{x}, \Omega\right), \quad \widehat{N}\left(\Omega, \overline{x}\right) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \widehat{\partial} d\left(\overline{x}, \Omega\right).$$

Teorema 1.3.8 (teorema lui Fermat generalizată)
Fie X un spaţiu Banach. Presupunem că $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ are un minim local în $\overline{x} \in X$ şi $f\left(\overline{x}\right) < +\infty$. Atunci

$$0 \in \widehat{\partial} f\left(\overline{x}\right) \subset \partial f\left(\overline{x}\right).$$

Fie $\Omega \subset X$ o mulţime nevidă, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $\ell_f \geq 0$. Spunem că f este Lipschitz de modul ℓ_f pe Ω dacă f este finită pe Ω şi, oricare ar fi $x_1, x_2 \in \Omega$,

$$\left|f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right| \leq \ell_f \left\|x_1 - x_2\right\|. \tag{1.12}$$

Spunem că f este Lipschitz în jurul lui $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ de modul $\ell_f \geq 0$ dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât, oricare ar fi $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \cap B\left(\overline{x}, \varepsilon\right)$, relaţia (1.12) este adevărată.

Teorema 1.3.9 (exact sum rule)
Fie X un spaţiu Asplund şi fie $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât f este Lipschitz în jurul lui $\overline{x} \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$, iar g este i.s.c. în jurul lui $\overline{x}$. Atunci

$$\partial\left(f + g\right)\left(\overline{x}\right) \subset \partial f\left(\overline{x}\right) + \partial g\left(\overline{x}\right).$$

În această lucrare vom avea nevoie de proprietăţi suplimentare pentru mulţimi din spaţii Banach astfel încât să fie asigurată echivalenţa dintre convergenţa slab-* şi convergenţa în normă a $\varepsilon-$normalelor. Astfel de proprietăţi sunt utile în vederea obţinerii condiţiilor de optim pentru probleme de optimizare cu restricţii. În acest sens avem următoarea definiţie.

Definiția 1.3.10
O mulţime $\Omega \subset X$ se numeşte secvenţial normal compactă (abreviat SNC) în $\overline{x} \in \Omega$ dacă pentru orice şir $(\varepsilon_k, x_k, x_k^*) \in [0, \infty) \times \Omega \times X^*$ care satisface condiţiile

$$(\varepsilon_k) \downarrow 0, \quad (x_k) \to \overline{x}, \quad x_k^* \in \widehat{N}_{\varepsilon_k}(\Omega, x_k), \quad \text{şi} \quad (x_k^*) \stackrel{w^*}{\to} 0, \tag{1.13}$$

avem $(x_k^*) \to 0$ pentru $k \to \infty$. Spunem că Ω are proprietatea (SNC) dacă Ω este (SNC) în fiecare punct al ei.

Dacă X este un spaţiu Asplund, atunci putem alege, în definiţia de mai sus, $\varepsilon_k = 0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. În particular, dacă $\Omega := K$ este un con convex închis, proprietatea (SNC) a lui Ω în 0 se scrie sub forma

$$\left[(x_k^*) \subset K^+, \quad (x_k^*) \stackrel{w^*}{\to} 0\right] \quad \Rightarrow \quad (x_k^*) \to 0.$$

Orice con convex închis cu interior nevid are proprietatea (SNC) în 0.

Folosind proprietatea (SNC) a fost posibilă obţinerea următoarei reguli exacte de calcul pentru conuri normale.

Propoziția 1.3.11
Fie X un spaţiu Asplund. Presupunem că $\Omega_1, \Omega_2 \subset X$ sunt închise în jurul lui $\overline{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ şi că fie Ω_1, fie Ω_2 este (SNC) în $\overline{x}$. Dacă $N(\overline{x}, \Omega_1) \cap -N(\overline{x}, \Omega_2) = \{0\}$, atunci

$$N(\overline{x}, \Omega_1 \cap \Omega_2) \subset N(\overline{x}, \Omega_1) + N(\overline{x}, \Omega_2).$$

Mai jos sunt prezentate construcţiile coderivatelor asociate unei multifuncţii.

Definiția 1.3.12
Fie X şi Y spaţii Banach. Considerăm $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu domeniul nevid.

(i) *Dat $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ şi $\varepsilon \geq 0$, $\varepsilon-$coderivata lui F în $(\overline{x}, \overline{y})$ este multifuncţia $\widehat{D}_\varepsilon^* F(\overline{x}, \overline{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$ definită prin*

$$\widehat{D}_\varepsilon^* F(\overline{x}, \overline{y})(y^*) := \left\{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in \widehat{N}_\varepsilon(\operatorname{Gr} F, (x, y))\right\},$$

oricare ar fi $y^* \in Y^*$. Pentru $\varepsilon = 0$, multifuncţia definită mai sus se numeşte pre-coderivata sau coderivata Fréchet a lui F în $(\overline{x}, \overline{y})$ şi o notăm cu $\widehat{D}^* F(\overline{x}, \overline{y})$.

(ii) *Dat* $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathrm{Gr}\, F$, *coderivata Mordukhovich a lui* F *în* $(\overline{x},\overline{y})$ *este multifuncţia* $D^*F\,(\overline{x},\overline{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$ *definită prin*

$$D^*F\,(\overline{x},\overline{y})\,(y^*) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in N\,(\mathrm{Gr}\, F, (\overline{x},\overline{y}))\}\,,$$

oricare ar fi $y^* \in Y^*$.

Următoarea teoremă este o teoremă de tip Fermat, extrasă din lucrarea [14]. Reamintim că multifuncţia epigraf a lui $F : X \rightrightarrows Y$ este

$$\widetilde{F} : X \rightrightarrows Y, \quad \widetilde{F}\,(x) := F\,(x) + K,$$

unde $K \subset Y$ este un con convex, închis şi punctat.

Teorema 1.3.13
Fie X, Y *spaţii Asplund,* $F : X \rightrightarrows Y$ *o multifuncţie şi* $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathrm{Gr}\, F$ *un punct de minim Pareto local pentru* F.

(i) *Presupunem că mulţimea* K *este (SNC) în* 0. *Dacă* $\mathrm{Gr}\, F$ *este închis în jurul lui* $(\overline{x},\overline{y})$, *atunci există* $y^* \in K^+ \setminus \{0\}$ *astfel încât*

$$0 \in D^*F(\overline{x},\overline{y})(y^*).$$

(ii) *Presupunem că mulţimea* K *este (SNC) în* 0. *Dacă* $\mathrm{Gr}\, \widetilde{F}$ *este închis în jurul lui* $(\overline{x},\overline{y})$, *atunci există* $y^* \in K^+ \setminus \{0\}$ *astfel încât*

$$0 \in D^*\widetilde{F}(\overline{x},\overline{y})(y^*).$$

Tehnicile de scalarizare sunt utilizate în teoria optimizării pentru a obţine condiţii de optim pentru probleme de optimizare vectorială prin transformarea acestora în probleme de optimizare scalară. Prezentăm în continuare funcţia lui Gerstewitz împreună cu proprietăţile de bază ale acesteia care ne vor permite, în Capitolul 2, să folosim procedeul de scalarizare cu acelaşi nume (vezi [18], [19, 10, 32] şi referinţele acestora).

Fie Y un spaţiu liniar normat şi $\varnothing \neq K \subset Y$ un con convex, închis, solid. Fie $e \in \mathrm{int}K$ fixat arbitrar. Definim funcţia lui Gerstewitz $s_{K,e} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$

$$s_{K,e}(y) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in te - K\}. \tag{1.14}$$

Teorema 1.3.14
Fie $K \subset Y$ *un con convex, închis şi solid. Atunci*

(i) *oricare ar fi* $e \in \operatorname{int} K$, *funcţia* $s_{K,e}$ *este finită, convexă şi continuă;*

(ii) *oricare ar fi* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi* $e \in \operatorname{int} K$,

$$\{y \in Y \mid s_{K,e}(y) < \lambda\} = \lambda e - \operatorname{int} K \quad \text{şi} \quad \{y \in Y \mid s_{K,e}(y) = \lambda\} = \lambda e - \operatorname{bd} K. \tag{1.15}$$

(iii) *funcţia* $s_{K,e}$ *este subliniară şi* $K-$*monotonă*[2]*;*

(iv) *oricare ar fi* $u \in Y$ *şi* $e \in \operatorname{int} K$, *subdiferenţiala Fenchel* $\partial^F s_{K,e}(u)$ *este nevidă şi*

$$\partial^F s_{K,e}(u) = \{v^* \in K^+ \mid v^*(e) = 1, v^*(u) = s_{K,e}(u)\}. \tag{1.16}$$

Încheiem acest capitol introductiv cu enunţarea principiului extremal care va juca un rol important în lucrarea de faţă.

Definiţia 1.3.15
Fie $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$, $k \geq 2$, *submulţimi nevide ale lui* X *şi considerăm* $\overline{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ldots \cap \Omega_k$. *Spunem că* $\overline{x}$ *este punct extremal local al sistemului de mulţimi* $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k\}$ *dacă există şirurile* $(a_{in}) \subset X, i \in \overline{1,k}$, *şi o vecinătate* U *a lui* $\overline{x}$ *astfel încât* $(a_{in}) \to 0$ *pentru* $n \to +\infty$ *şi*

$$\bigcap_{i=1}^{k} (\Omega_i - a_{in}) \cap U = \varnothing,$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ *suficient de mare. În acest caz, spunem că* $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \overline{x}\}$ *este sistem extremal în* X.

Definiţia 1.3.16
Fie $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ *şi* $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \overline{x}\}$ *un sistem extremal în* X.

(i) *Spunem că* $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \overline{x}\}$ *satisface principiul* $\varepsilon-$*extremal dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $x_i \in \Omega_i \cap D(\overline{x}, \varepsilon)$ *şi* $x_i^* \in X^*$ *astfel încât*

$$x_i^* \in \widehat{N}_\varepsilon(\Omega_i, x_i), \quad i \in \overline{1,k}$$

$$x_1^* + x_2^* + \ldots + x_k^* = 0, \quad \|x_1^*\| + \|x_2^*\| + \ldots + \|x_k^*\| = 1. \tag{1.17}$$

[2]Spunem că o funcţie $f : Y \to \mathbb{R}$ este $K-$monotonă dacă oricare ar fi $y_1, y_2 \in Y$ cu proprietatea $y_2 - y_1 \in K$ (i.e., $y_1 \leq_K y_2$) avem $f(y_1) \leq f(y_2)$.

(ii) *Spunem că* $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \overline{x}\}$ *satisface principiul extremal aproximativ dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $x_i \in \Omega_i \cap D(\overline{x}, \varepsilon)$ *şi*

$$x_i^* \in \widehat{N}(\Omega_i, x_i) + \varepsilon D_{X^*}, \quad i \in \overline{1,k}.$$

astfel încât relaţia (1.17) să fie adevărată.

(iii) *Spunem că* $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \overline{x}\}$ *satisface principiul extremal exact dacă există normalele*

$$x_i^* \in N(\Omega_i, x_i), \quad i \in \overline{1,k}.$$

astfel încât relaţia (1.17) să fie adevărată.

Spunem că principiul $\varepsilon-$*extremal (extremal aproximativ sau extremal exact) are loc în* X*, dacă orice sistem extremal* $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \overline{x}\}$ *satisface acest principiu în* X*, unde mulţimile* Ω_i *sunt închise în jurul lui* $\overline{x}$*.*

Teorema 1.3.17
Fie X *un spaţiu Banach. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) X *este un spaţiu Asplund.*

(ii) *Principiul extremal aproximativ are loc în* X*.*

(iii) *Principiul* $\varepsilon-$*extremal are loc în* X*.*

2 Minime direcționale

Cuprins

În acest capitol prezentăm câteva noţiuni de eficienţă Pareto direcţională împreună cu o serie de exemple şi câteva rezultate privind condiţii de optim atât în spaţii primale, cât şi în spaţii duale. Obiectele matematice specifice teoriei optimizării utilizate în acest capitol sunt conurile tangente, derivata Bouligand, derivata inferioară Dini, funcţia timp minimal, conuri normale, iar metoda scalarizării, incompatibilitatea dintre deschidere şi eficienţă Pareto şi principiul extremal reprezintă principalele tehnici care au fost utilizate în demonstraţiile rezultatelor. Rezultatele prezentate în acest capitol sunt originale şi sunt publicate în lucrarea [8].

2.1 Eficiență Pareto direcțională

Fie X şi Y spaţii liniare normate peste $\mathbb{R}$. Pe parcursul acestui capitol K este un con închis, convex, punctat şi propriu. Dată multifuncţia $F : X \rightrightarrows Y$, considerăm următoarea problemă de optimizare cu restricţii geometrice

$$\min\nolimits_K F(x) \quad \text{subject to} \quad x \in A, \tag{P}$$

unde $A \subset X$ este o mulţime nevidă şi închisă.

Pentru o astfel de problemă, conceptul de soluţie este descris în definiţia de mai jos.

Definiția 2.1.1

(i) *Elementul* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (A \times Y)$ *se numeşte punct de minim Pareto local pentru* F *pe* A, *dacă există o vecinătate* U *a lui* $\overline{x}$ *astfel încât*

$$(F(U \cap A) - \overline{y}) \cap (-K) = \{0\}. \tag{2.1}$$

(ii) *Presupunem că* $\operatorname{int} K$ *este nevid. Elementul* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (A \times Y)$ *se numeşte puncte de minim Pareto slab local pentru* F *pe* A, *dacă există o vecinătate* U *a lui* $\overline{x}$ *astfel încât*

$$(F(U \cap A) - \overline{y}) \cap (-\operatorname{int} K) = \varnothing. \tag{2.2}$$

Literatura de specialitate dedicată minimelor Pareto şi a variaţiunilor acestora este amplă, iar pentru a susţine această afirmaţie recomandăm cititorului să consulte lucrările [19, 22, 34, 20, 24] şi referinţele din acestea.

Fie $L \subset S_X$ o mulţime nevidă şi închisă (de direcţii). Studiul nostru începe prin înlocuirea mulţimii A cu intersecţia dintre A şi mulţimea $[\overline{x} + \operatorname{cone} L]$. Mai departe sunt redate două concepte de eficienţă Pareto direcţională care fac obiectul principal de studiu al acestui capitol.

Definiția 2.1.2

Fie $L \subset S_X$ *o mulţime nevidă şi închisă.*

(i) *Elementul* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (A \times Y)$ *se numeşte punct de minim Pareto direcţional local pentru* F *pe* A *în raport cu* L *dacă există o vecinătate* U *a lui* $\overline{x}$ *astfel încât*

$$(F(U \cap A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) - \overline{y}) \cap (-K) \subset K. \tag{2.3}$$

(ii) *Presupunem că* $\operatorname{int} K$ *este nevid. Elementul* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (A \times Y)$ *se numeşte punct de minim Pareto slab direcţional local pentru* F *pe* A *în raport cu* L *dacă există o vecinătate* U *a lui* $\overline{x}$ *astfel încât*

$$(F(U \cap A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) - \overline{y}) \cap (-\operatorname{int} K) = \varnothing. \tag{2.4}$$

Comparând (2.3) cu (2.1) şi (2.4) cu (2.2), atunci conceptele de minim Pareto direcţional corespund situaţiei în care mulţimea restricţiilor are forma

$A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]$ (care depinde de punctul $\overline{x}$). În particular, (2.3) se reduce la (2.1) şi (2.4) se reduce la (2.2) pentru $L := S_X$.

Remarca 2.1.3
Dacă $U = X$ în definiţia de mai sus, atunci se obţin versiunile globale ale conceptelor de minim definite mai sus.

În continuare avem câteva exemple. Acolo unde spaţiul de sosire este $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$, atunci vom considera mereu $K := \mathbb{R}^n_+$.

Exemplul 2.1.4
Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare. Atunci, orice element $\overline{x} \in \mathbb{R}$ este un minim direcţional pentru f pe $\mathbb{R}$ în raport cu $L := \{+1\}$, dar nu este un minim local pentru f.

Exemplul 2.1.5
Considerăm funcţia $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f_1(x, y) := x^2 - y^2$. Elementul $(0, 0)$ este un punct critic de tip şa, prin urmare $(0, 0)$ nu este un punct de minim local. Cu toate acestea, acesta este un minim direcţional pentru f_1 pe $\mathbb{R}^2$ în raport cu $L = \{-1, 1\} \times \{0\}$ deoarece pentru orice $(x, y) \in (0, 0) + \operatorname{cone} L = \mathbb{R} \times \{0\}$, avem $f_1(x, y) \geq f_1(0, 0)$. Analog, $(0, 0)$ este un punct de maxim direcţional pentru f_1 pe $\mathbb{R}^2$ în raport cu $L = \{0\} \times \{-1, 1\}$.

Exemplul 2.1.6
Fie $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ şi $L := \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$. Definim $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ prin

$$f_5(x, y) := \begin{cases} \left(\theta_2 - \arctan \frac{y}{x}\right)\left(\arctan \frac{y}{x} - \theta_1\right), & \textit{if } x \neq 0 \textit{ and } (x > 0 \textit{ or } y \geq 0), \\ 0, & \textit{if } x = 0, \\ -1, & \textit{if } x < 0 \textit{ or } y < 0. \end{cases}$$

Atunci, se arată cu uşurinţă că punctul $(0, 0)$ este un minim direcţional pentru f_5 pe $\mathbb{R}^2$ în raport cu L.

Exemplul 2.1.7
Fie $f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definită prin $f_7(x) := (2x, x)$ şi K înfăşurătoarea conică a mulţimii $\operatorname{conv}\{(1, 0), (1, 1)\}$. Se deduce uşor că $\overline{x} := 0$ este un minim direcţional pentru f_7 pe $\mathbb{R}$ în raport cu $L := \{+1\}$, dar $\overline{x}$ nu este un punct de minim Pareto local pentru f_5.

2.2 Condiții de optim via geometrie variațională

Această secţiune conţine rezultate prin care se stabilesc condiţii de optim utilizând:

- conuri tangente (vezi Secţiunea 1.2);
- conuri normale (vezi Secţiunea 1.3).

Punctul de start îl constitue Teorema lui Fermat pentru funcţii cu valori reale diferenţiabile în unul din capetele intervalului pe care este definită. Mai precis, dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie pentru care a este un punct de minim local pentru f (i.e., un punct de minim direcţional în raport cu $L := \{+1\}$), şi f este diferenţiabilă în a, atunci

$$f'(a) \geq 0,$$

şi, similar, dacă b este un punct de minim local pentru f (i.e., un punct de minim direcţional în raport cu $L := \{-1\}$), şi f este diferenţiabilă în b, atunci $f'(b) \leq 0$.

2.2.1 Condiții de optim via conuri tangente

Studiul din această lucrare începe, la fel ca în cazul clasic al problemelor de optimizare scalară, cu definirea unei "aproximări" a mulţimii punctelor fezabile cu vectori tangenţi. Apoi vom prezenta câteva condiţii de optim pentru minimele direcţionale, iar pentru a face posibil acest lucru se utilizează derivata Bouligand direcţională şi derivata Dini.

Definiția 2.2.1
Fie $A \subset X$ o mulţime nevidă şi $L \subset S_X$ o mulţime nevidă şi închisă. Atunci conul tangent Bouligand la A în $\overline{x} \in A$ în raport cu L este mulţimea

$$T_B^L(A, \overline{x}) := \left\{ u \in X \mid \exists (u_n) \xrightarrow{\text{cone}\, L} u, \exists (t_n) \xrightarrow{(0,\infty)} 0, \forall n \in \mathbb{N} : \ \overline{x} + t_n u_n \in A \right\}.$$

Definiţia 2.2.2
Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o aplicaţie multivocă, $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ şi $L \subset S_X$, $M \subset S_Y$ mulţimi nevide şi închise. Derivata Bouligand a lui F în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu mulţimile L şi M este multifuncţia $D_B^{L,M} F(\overline{x}, \overline{y}) : X \rightrightarrows Y$ definită prin echivalenţa $v \in D_B^{L,M} F(\overline{x}, \overline{y})(u)$ dacă şi numai dacă există şirurile $(u_n) \stackrel{\text{cone}\, L}{\longrightarrow} u, (v_n) \stackrel{\text{cone}\, M}{\longrightarrow} v, (t_n) \stackrel{(0,\infty)}{\longrightarrow} 0$ astfel încât pentru orice n,

$$\overline{y} + t_n v_n \in F(\overline{x} + t_n u_n).$$

În aceeaşi manieră se adaptează la cazul direcţional şi alte derivate utilizate în studiul problemelor vectoriale. Primul rezultat original al lucrării de faţă este redat mai jos.

Propoziţia 2.2.3
Utilizând notaţiile introduse, dacă $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este un punct de minim Pareto slab direcţional local pentru F pe A în raport cu L, atunci

$$D_D F(\overline{x}, \overline{y})(T_B^L(A, \overline{x})) \cap (-\operatorname{int} K) = \varnothing.$$

Mai mult, dacă $A = X$, atunci

$$D_B^{L,S_Y} F(\overline{x}, \overline{y})(X) \cap (-\operatorname{int} K) = \varnothing.$$

Mai departe vom introduce în studiul de faţă câteva proprietăţi de regularitate direcţională pentru multifuncţii care constau în adaptarea proprietăţilor de regularitate clasice ce au fost prezentate în Secţiunea 1.2 (vezi [13, 21] pentru detalii). Definirea acestor proprietăţi nu ar fi fost posibilă fără a face apel la funcţia timp minimal a cărei definiţie o amintim mai jos (vezi [12, 29] pentru detalii).

Considerăm $\varnothing \neq \Omega \subset X$ o mulţime închisă şi $\varnothing \neq L \subset X$. Funcţia timp minimal asociată lui Ω şi L este definită prin

$$\tau_L(x, \Omega) := \inf \{t \geq 0 \mid (x + tL) \cap \Omega \neq \varnothing\}.$$

Prin convenţie $\tau_L(x, \varnothing) = +\infty$, oricare ar fi x şi L. Dacă $L = S_X$, atunci funcţia timp minimal coincide cu funcţia distanţă asociată lui Ω. Dacă $L = \{0\}$, atunci funcţia timp minimal coincide cu funcţia indicatoare asociată lui Ω. Cel mai util caz pentru demersul studiului nostru este acela când $L \subset S_X$, caz în care τ_L se numeşte funcţia timp minimal direcţională în raport cu L.

Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie, $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F, \emptyset \neq L \subset S_X$, şi $\emptyset \neq M \subset S_Y$. În [9, Section 3.8, 3H], autorii au subliniat ideea că proprietatea de calm a multifuncţiei F^{-1} este echivalentă cu proprietatea de subregularitate metrică a multifuncţiei F. În contextul direcţional, definiţia celor două proprietăţi de regularitate ale lui F sună astfel:

- F este calmă direcţional în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu L şi M dacă există $\alpha > 0$, şi vecinătăţile U a lui $\overline{x}$ şi V a lui $\overline{y}$ astfel încât pentru orice $x \in U$,

$$\sup_{y \in F(x) \cap V} \tau_M(y, F(\overline{x})) \leq \alpha \tau_L(\overline{x}, x).$$

  În particular, pentru $U = B(\bar{x}, \varepsilon)$, spunem că F este $(\varepsilon, \alpha)-$calmă direcţional în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu L şi M.

- F este metric subregulată direcţional în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu L şi M dacă există $\alpha > 0$ şi vecinătaţile U a lui $\overline{x}$ şi V a lui $\overline{y}$ astfel încât pentru orice $x \in U$,

$$\tau_L(x, F^{-1}(\overline{y})) \leq \alpha \tau_M(\overline{y}, F(x) \cap V). \tag{2.5}$$

  În particular, pentru $U = B(\bar{x}, \varepsilon)$, spunem că F este $(\varepsilon, \alpha)-$metric subregulată direcţional în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu L şi M.

Echivalenţa de care am amintim mai sus este descrisă în rezultatul de mai jos.

Propoziţia 2.2.4
Multifuncţia F este metric subregulată direcţional în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu L şi M dacă şi numai dacă F^{-1} este calmă direcţional în $(\overline{y}, \overline{x})$ în raport cu M şi L.

Proprietatea de calm direcţional a fost utilizată pentru a obţine o evaluare pentru conul tangent Bouligand direcţional la o valoare a unei multifuncţii în funcţie de imaginea lui 0 prin derivata Bouligand direcţională a aceleaşi multifuncţii.

Propoziţia 2.2.5
Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie, $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$, $L \subset S_X$ şi $M \subset S_Y$ submulţimi nevide şi închise. Atunci

$$T_B^M(F(\overline{x}), \overline{y}) \subset D_B^{L,M} F(\overline{x}, \overline{y})(0).$$

Mai mult, dacă F este calmă direcţional în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu L şi M, şi cone M *este convexă, atunci are loc egalitatea.*

Considerăm acum situaţia în care $G : X \rightrightarrows Z$ este o multifuncţie, $Q \subset Z$ este un con punctat, convex şi închis, caz în care mulţimea restricţiilor problemei (P) este

$$A := \{x \in X \mid 0 \in G(x) + Q\}.$$

Această situaţie standard acoperă cazul clasic al problemelor de optimizare cu restricţii reprezentate prin egalităţi şi inegalităţi.

În continuare enunţăm primele rezultate care oferă condiţii necesare de tip Fritz-John şi de tip Karush-Kuhn-Tucker pentru problema (P) în două situaţii speciale în care:

- presupunem că $F : X \rightrightarrows Y$ şi $G : X \rightrightarrows Z$ sunt funcţii diferenţiabile Fréchet, notate prin f şi g respectiv (situaţie care acoperă probleme de optimizare cu funcţii netede (Teorema 2.2.6 şi Teorema 2.2.7).
- pe lângă f, g funcţii diferenţiabile Fréchet, presupunem că $Y = \mathbb{R}^k, Z = \mathbb{R}^p$, unde $k, p \in \mathbb{N}^*$, şi $Q = \mathbb{R}^m_+ \times \{0\}^n$ cu $m, n \in \mathbb{N}^*, m+n = p$ (Teorema 2.2.8).

Teorema 2.2.6
Presupunem că $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ *şi* $\overline{x} \in A := \widetilde{g}^{-1}(0)$ *este un punct de minim Pareto direcţional slab local pentru f pe A în raport cu L. În plus, presupunem că mulţimea* cone L *este convexă şi $\widetilde{g}$ este metric subregulată direcţional în $(\overline{x}, 0)$ în raport cu L şi S_Z. Atunci, dacă cel puţin una din condiţiile de mai jos are loc:*

(i) $\operatorname{int} Q \neq \emptyset$ *sau* $\operatorname{int}\{(\nabla f(\overline{x})(u), \nabla g(\overline{x})(u) \mid u \in \operatorname{cone} L\} \neq \emptyset$;

(ii) *Y şi Z sunt spaţii finit dimensionale,*

există $y^* \in K^+$, $z^* \in Q^+$, $(y^*, z^*) \neq 0$ astfel încât, oricare ar fi $u \in \operatorname{cone} L$,

$$\left(y^* \circ \nabla f(\overline{x}) + z^* \circ \nabla g(\overline{x})\right)(u) \geq 0.$$

Dacă, în plus, există $u \in \operatorname{cone} L$ astfel încât

$$\nabla g(\overline{x})(u) \in \operatorname{int} Q \neq \emptyset \quad \textit{or} \quad \nabla g(\overline{x})(\operatorname{cone} L) = Z,$$

atunci $y^* \neq 0$.

Teorema 2.2.7
Presupunem că X, Z *sunt spaţii Banach,* K *este solid şi* $\overline{x} \in g^{-1}(-Q)$ *este un minim Pareto direcţional slab local pentru* f *pe* $g^{-1}(-Q)$ *în raport cu* L. *Mai mult, presupunem că*

$$\psi : X \times Z \to Z, \quad \psi(x, z) := g(x) - z$$

este metric subregulată direcţional în $(\overline{x}, g(\overline{x}), 0)$ *în raport cu* $(\overline{x} + \operatorname{cone} L) \times -Q$. *Atunci, oricare ar fi* $u \in \operatorname{cone} L$ *cu* $\nabla g(\overline{x})(u) \in T_B(-Q, g(\overline{x}))$,

$$\nabla f(\overline{x})(u) \cap (-\operatorname{int} K) = \varnothing.$$

Următorul rezultat corespunde celei de-a doua situaţii considerate mai sus în care funcţiile f, g sunt diferenţiabile Fréchet, Y este spaţiu finit dimensional şi Q este un con dintr-un spaţiu finit dimensional. Acest lucru înseamnă că problema (P) devine o problemă de optimizare netedă cu număr finit de restricţii de tip inegalităţi şi egalităţi. Este convenabil să notăm cu μ_i, unde $i \in \overline{1, m}$, primele m componente ale funcţiei g şi cu ν_j, unde $j \in \overline{1, n}$, următoarele n coordonate ale funcţiei g.

Menţionăm că următorul rezultat a fost obţinut aplicând tehnica scalarizării via funcţionala lui Gerstewitz în cazul special în care conul de ordine este solid. În plus, reciproca acestuia a fost de asemenea demonstrată în cazul convex.

Teorema 2.2.8
Presupunem că X *este un spaţiu Banach,* $e \in \operatorname{int} K$ *şi* $\overline{x} \in g^{-1}(-Q)$ *este un punct de minim Pareto slab local pentru* f *pe* $g^{-1}(-Q)$ *în raport cu* L. *Presupunem că:*

(i) $\operatorname{cone} L$ *este convexă;*

(ii) $\psi : X \times Z \to Z$, $\psi(x, z) := g(x) - z$ *este metric subregulată în* $(\overline{x}, g(\overline{x}), 0)$ *în raport cu* $[\overline{x} + \operatorname{cone} L] \times -Q$;

(iii) $\nabla \nu\left(\overline{x}\right)\left(X\right) = \mathbb{R}^n$, *unde* $\nu := \left(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n\right)$;

(iv) *există* $\overline{u} \in \operatorname{int} \operatorname{cone} L$ *astfel încât* $\nabla \mu_i\left(\overline{x}\right)\left(\overline{u}\right) < 0$ *oricare ar fi* $i \in I(\overline{x}) := \{i \in \overline{1, m} : \mu_i(\overline{x}) = 0\}$ *şi* $\nabla \nu\left(\overline{x}\right)\left(\overline{u}\right) = 0$.

Atunci există $y^* \in K^+ \backslash \{0\}$, $\lambda_i \geq 0$ *pentru* $i \in \overline{1, m}$ *şi* $\beta_j \in \mathbb{R}$ *pentru* $j \in \overline{1, n}$

astfel încât

$$0 \in y^* \circ \nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla \mu_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \nabla \nu_j(\overline{x}) + L^- \tag{2.6}$$

şi

$$\lambda_i \mu_i(\overline{x}) = 0, \quad \forall i \in \overline{1,m}. \tag{2.7}$$

Propoziția 2.2.9
Presupunem că X este un spaţiu Banach, $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, $\operatorname{cone} L$ *este convexă, f este $K-$convexă, $\mu_i, i \in \overline{1,m}$, sunt convexe şi $\nu_j, j \in \overline{1,n}$, sunt afine. Dacă există $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$ şi $y^* \in K^+ \setminus \{0\}$ astfel încât relaţiile (2.6) şi (2.7) au loc, atunci $\overline{x}$ este un punct de minim Pareto slab direcţional global pentru f pe $g^{-1}(-Q)$ în raport cu L.*

2.2.2 Condiții de optim via conuri normale

Rezultatele de optim pentru minime direcţionale pe care le-am obţinut în această secţiune au făcut uz de conurile normale Fréchet şi Mordukhovich (vezi Section 1.3 pentru detalii).

Schema de lucru utilizată în studiul nostru, atât în capitolul curent cât şi în următoarele, este compusă din următori paşi:

- definim o noţiune de deschidere direcţională pentru o multifuncţie $F : X \rightrightarrows Y$ (vezi [13] pentru detalii)
- demonstrăm incompatibilitatea dintre proprietatea de deschidere direcţională şi minimul Pareto direcţional (vezi [14] pentru detalii).

Alternativ, pentru a deduce condiţii necesare de optim vom utiliza o tehnică ce are la bază principiul extremal.

Reamintim definiţia deschiderii direcţionale şi apoi vom enunţa rezultatul de incompatibilitate anunţat mai sus. Considerăm $F : X \rightrightarrows Y$, $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$, $L \subset S_X$ şi $M \subset S_Y$ mulţimi nevide. Spunem că F este deschisă direcţional în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu L şi M dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $r > 0$ astfel încât

$$B(\overline{y}, r) \cap [\overline{y} - \operatorname{cone} M] \subset F(B(\overline{x}, \varepsilon) \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]).$$

Reamintim că multifuncţia epigraf asociată lui $F : X \rightrightarrows Y$ este definită prin

$$\widetilde{F} : X \rightrightarrows Y, \quad \widetilde{F}(x) := F(x) + K,$$

unde $K \subset Y$ este un con punctat, închis şi convex.

Propoziţia 2.2.10
Dacă $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este un punct de minim Pareto direcţional local pentru F în raport cu L, atunci, oricare ar fi $C \subset S_Y$ cu $C \cap (K \setminus -K) \neq \varnothing$, multifuncţia $\widetilde{F}$ nu este deschisă direcţional în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu L şi C. În particular, F nu este deschisă direcţional în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu L şi C.

Acum, folosind propoziţia anterioară, obţinem următoarea condiţie de optim.

Teorema 2.2.11
Presupunem că X şi Y sunt spaţii finit dimensionale, $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este un punct de minim Pareto direcţional local pentru F în raport cu L, cone L *este convexă, $u \in \operatorname{int} K \cap S_Y$, şi multifuncţia $\widetilde{F}$ are graficul închis şi este Lipschitz în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$. Atunci există $x^* \in X^*$şi $y^* \in K^+$ astfel încât $x^*(\ell) \geq 0$, oricare ar fi $\ell \in L$, astfel încât $y^*(u) = 1$ şi*

$$x^* \in D^* \widetilde{F}(\overline{x}, \overline{y})(y^*).$$

Remarca 2.2.12
Dacă $L = S_X$, i.e. $(\overline{x}, \overline{y})$ este minim Pareto, condiţia de optim de mai sus nu este altceva decât regula lui Fermat generalizată (vezi [14, Theorem 3.11]): există $y^* \in K^+ \setminus \{0\}$ cu

$$0 \in D^* \widetilde{F}(\overline{x}, \overline{y})(y^*).$$

Încheiem secţiunea cu un rezultat care oferă o condiţie necesară de optim pentru probleme de optimizare cu restricţii iar pentru acest lucru folosim o tehnică ce are la bază principiul extremal (vezi Teoremă 1.3.17).

Teorema 2.2.13
Fie X, Y spaţii Asplund. Fie $A \subset X$ şi $L \subset S_X$ mulţimi nevide şi închise şi $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (A \times Y)$ astfel încât $\operatorname{Gr} F$ este închis în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$. Presupunem că au loc următoarele proprietăţi:

(i) *F este de tip Lipschitz în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$;*

(ii) $K \backslash -K \neq \varnothing$ *şi* K *este (SNC) în* 0*;*

(iii) *mulţimile* A *şi* $\overline{x} + \operatorname{cone} L$ *sunt aliate în* $\overline{x}$*.*

Dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ *este punct de minim Pareto direcţional local pentru* F *pe* A *în raport cu* L*, atunci există* $y^* \in K^+ \backslash \{0\}$ *astfel încât*

$$0 \in D^* F(\overline{x}, \overline{y})(y^*) + N(A, \overline{x}) + N(\operatorname{cone} L, 0).$$

3 Penalizare exactă și condiții de optim pentru eficiență direcțională

Cuprins

Tehnicile de penalizare au început să devină din ce în ce mai utilizate de către cercetători în studiul problemelor de optimizare încă din anii 80. Acest lucru i se datorează, într-o mare măsură, lui Francis Clarke care a descoperit o tehnică, cu o aplicabilitate nesperat de prodigioasă, cu ajutorul căreia a obţinut condiţii de optimalitate pentru probleme scalare cu restricţii.

Acest capitol este dedicat studiului unor probleme de optimizare cu multifuncţii folosind tehnici de penalizare. Minimele Pareto direcţionale aproximative, introduse în a patra secţiune a capitolului curent, oferă o nouă perspectivă asupra eficienţei Pareto direcţionale care capătă formă odată cu condiţiile de optim deduse utilizând, din nou, tehnici de penalizare. Rezultatele prezentate în cele ce urmează sunt preluate din lucrările [8, 6, 5].

3.1 Teoreme de penalizare pentru probleme de optimizare scalară

În secţiunea curentă sunt prezentate două rezultate care oferă condiţii necesare de optim pentru probleme de optimizare cu restricţii în care funcţia obiectiv are valori scalare, respectiv valori vectoriale. Înainte de a le enunţa, reamintim cadrul de lucru în care s-au obţinut rezultatele noastre.

Fie $f : X \to Y$ o funcţie şi Y un spaţiu normat ordonat de un con convex propriu $K \subset Y$. Considerăm problema

$$\min_K f(x) \quad \text{astfel încât} \quad x \in A,$$

unde $A \subset X$ şi $L \subset S_X$ sunt mulţimi nevide şi închise. Conform cu [33], spunem că f este $K-$Lipschitz în jurul lui $\overline{x} \in X$ de modul $\ell_f > 0$, dacă există $\varepsilon > 0$ şi un element $e \in K \cap S_Y$ astfel încât, oricare ar fi $x_1, x_2 \in B(\overline{x}, \varepsilon)$,

$$f(x_2) - f(x_1) + \ell_f \|x_2 - x_1\| e \in K.$$

Propoziţia 3.1.1
Fixăm $Y := \mathbb{R}$. Fie $\overline{x} \in A$ un minim direcţional local pentru f pe A în raport cu L. Presupunem că f este Lipschitz în jurul lui $\overline{x}$ şi $\operatorname{cone} L$ este convexă. În plus, presupunem că $N(A, \overline{x}) \cap (L^+) = \{0\}$ şi că fie A, fie $\overline{x} + \operatorname{cone} L$ este (SNC) în $\overline{x}$. Atunci avem

$$0 \in \partial f(\overline{x}) + N(A, \overline{x}) + L^-.$$

Teorema 3.1.2
Fie $\overline{x} \in A$ un minim direcţional local pentru f pe A în raport cu $L \subset S_X$. Presupunem că:

(i) *f este $K-$Lipschitz în jurul lui $\overline{x}$ de modul ℓ_f şi fie e un element din $K \cap S_Y$ determinat de proprietatea Lipschitz a lui f;*

(ii) *K este (SNC) în 0;*

(iii) *$\operatorname{cone} L$ este convexă, $N(A, \overline{x}) \cap (L^+) = \{0\}$ şi fie mulţimea A, fie mulţimea $\operatorname{cone} L$ este (SNC) în 0.*

Atunci, oricare ar fi $\ell > \ell_f$, există $y^* \in K^+ \setminus \{0\}$ şi $x^* \in D^* f(\overline{x})(y^*)$ astfel *încât*

$$-x^* \in N(A,\overline{x}) + L^- \quad \text{şi} \quad \|x^*\| \leq \ell y^*(e)\,.$$

3.2 Rezultate de penalizare pentru POV

3.2.1 O altă perspectivă asupra minimelor direcționale

Ideea de bază pe care o exploatăm în continuare provine, pe de o parte, din egalitatea mulţimilor K şi cone S_K, unde $S_K := S_Y \cap K$, şi, pe de altă parte, din faptul că pentru a obţine condiţii de optim, uneori, este suficient să considerăm doar direcţii din mulţimea S_K (vezi [8, Propoziţia 3.16]). Considerăm următoarea definiţie.

Definiția 3.2.1
Fie $L \subset S_X$ şi $M \subset S_Y$ mulţimea nevide şi închise. Fie $(\overline{x},\overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (A \times Y)$. Elementul $(\overline{x},\overline{y})$ se numeşte punct de $(L,M)-$minim Pareto direcţional local pentru F pe A dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât

$$(F(U \cap A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) - \overline{y}) \cap - \operatorname{cone} M \subset \operatorname{cone} M.$$

Notăm mulţimea punctelor de $(L,M)-$minim Pareto direcţional local pentru F pe A cu $\operatorname{Min}(F,A;L,M)$.

O altă idee care a dus la considerarea definiţiei de mai sus este de a permite o mai mare flexibilitate relaţiei de ordine cu ajutorul căreia se defineşte noţiunea de eficienţă. Aceasta îşi are sursa de inspiraţie în conceptul de regularitate direcţională introdus şi studiat în lucrarea [13]. De fapt, noţiunea de $(L,M)-$minim oferă posibilitatea de a lucra cu o mulţime de direcţii (şi nu cu un con K) cu ajutorul căreia construim conul de ordine necesar definirii noţiunii de eficienţă. Notăm că un (L,M) $-$minim Pareto direcţional coincide cu un minim Pareto direcţional (definit în Capitolul 2) atunci când mulţimea cone M este convexă.

Exemplul 3.2.2
Fie $a > 0$ şi multifuncţia $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ definită prin

$$F(x) := \begin{cases} \{x\} \times \left[-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2}\right] & , \quad x \in [-a, a] \\ \mathbb{R}^2 & , \quad x \in [-a, a]^c \end{cases}$$

Considerăm $A = [-a, a]$ şi $M = S_{\mathbb{R}^2} \cap \mathbb{R}^2_+$. Se deduce cu uşurinţă că

$$\operatorname{Min}(F, A; \{-1, +1\}, M) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a, 0], y = -\sqrt{a^2 - x^2}\right\},$$

$$\operatorname{Min}(F, A; \{+1\}, M) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a, a], y = -\sqrt{a^2 - x^2}\right\}$$

şi

$$\operatorname{Min}(F, A; \{-1\}, M) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a, 0], y = -\sqrt{a^2 - x^2}\right\}.$$

O relaţie de forma

$$(F(D(\overline{x}, \varepsilon) \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) - \overline{y}) \cap - \operatorname{cone} M = \{0\},$$

pentru un $\varepsilon > 0$, se poate scrie în mod echivalent sub forma

$$F(D(\overline{x}, \varepsilon) \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) \cap (\overline{y} - \operatorname{cone} M) = \{\overline{y}\}.$$

Acum, observăm că

$$D(\overline{x}, \varepsilon) \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L] = \overline{x} + (\varepsilon D_X \cap \operatorname{cone} L) = \overline{x} + \varepsilon [0, 1] L$$

şi această scriere sugerează să studiem mulţimea $D_L := [0, 1] L$. Pentru $\varepsilon \in (0, 1)$, definim $\varepsilon-$lărgirea lui L ca fiind

$$L_\varepsilon = \{x \in S_X \mid d(x, L) \leq \varepsilon\}.$$

Rezultatul de mai jos cumulează o serie de proprietăţi imediate ale mulţimii D_L şi a $\varepsilon-$lărgirii lui L.

Propoziția 3.2.3
Fie $\emptyset \neq L \subset S_X$ şi $\varepsilon > 0$. Atunci:

(i) *L este închisă dacă şi numai dacă D_L este închisă şi dacă şi numai dacă $\operatorname{cone} L$ este închisă;*

(ii) *L este compactă dacă şi numai dacă D_L este compactă;*

(iii) *dacă L este slab compactă, atunci D_L este slab compactă;*

(iv) *L_ε este închisă;*

(v) $\operatorname{cone} L \setminus \{0\} \subset \operatorname{int} \operatorname{cone} L_\varepsilon$;

(vi) *avem*

$$\bigcap_{\delta>0} L_\delta = \operatorname{cl} L, \quad \bigcap_{\delta>0} D_{L_\delta} = D_{\operatorname{cl} L},$$

şi dacă L este închisă, atunci

$$\bigcap_{\delta>0} \operatorname{cone} L_\delta = \operatorname{cone} L.$$

(vii) *D_L este convexă dacă şi numai dacă* $\operatorname{cone} L$ *este convexă.*

Acum, în lumina flexibilităţii oferite de cadrul nostru în care studiem diverse grade de eficienţă Pareto, discutăm despre posibilitatea definirii unor concepte de eficienţă aproximativă şi proprie (vezi [34] pentru o discuţie din cazul standard). Pentru a menţine prezentarea cât mai concisă, vom da o definiţie a unui concept de minim direcţional pentru problema fără restricţii (P_0) care cuprinde ambele versiuni de minim. Mai precis, definim un concept de minim

- propriu în spaţiul X în sensul lui Henig (vezi [19, p. 110]) datorită utilizării unei lărgiri a conului $\operatorname{cone} M$ (vezi Propoziţia 3.2.3);
- aproximativ în spaţiul Y datorită unei perturbări într-o direcţia arbitrară din spaţiul Y.

Definiţia 3.2.4
Fie $L \subset S_X$ şi $M \subset S_Y$ mulţimi nevide închise. Spunem că $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este un $(L, M)-$minim Pareto propriu în X şi aproximativ în Y direcţional local pentru F dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$, un element $v \in M$ şi două constante $\varepsilon, \delta > 0$ astfel încât

$$(F(U \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L_\varepsilon]) - \overline{y}) \cap (-\operatorname{cone} M - \delta v) = \varnothing.$$

Ilustrăm conceptul definit mai sus printr-un rezultat care oferă o condiţie suficientă care asigură faptul că un minim aproximativ poate fi privit ca un minim aproximativ propriu.

Propoziția 3.2.5
Fie $L \subset S_X$ şi $M \subset S_Y$ mulţimi închise şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}\, F$. Presupunem că există un element $v \in M$ şi constantele $\delta > 0, \rho > 0$ astfel încât

$$(F(D(\overline{x}, \rho) \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) - \overline{y}) \cap (-\operatorname{cone} M - \delta v) = \varnothing.$$

Dacă F este superior semicontinuă şi are valori nevide, şi L este compactă, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$(F(D(\overline{x}, \rho) \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L_\varepsilon]) - \overline{y}) \cap (-\operatorname{cone} M - \delta v) = \varnothing.$$

3.2.2 Rezultate de penalizare exactă

În continuare vom prezenta condiţii necesare de optim pentru problema

$$\min\nolimits_K F(x) \quad \text{astfel încât} \quad x \in A, \tag{P}$$

unde $A \subset X$ este o mulţime nevidă şi închisă. Toate rezultate au fost obţinute prin intermediul tehnicii de penalizare de tip Clarke adaptată pentru probleme cu multifuncţii. Merită menţionat că aceste rezultate pot fi adaptate atât pentru minime aproximative, cât şi pentru minime proprii. În această secţiune ne concentrăm atenţia doar asupra $(L, M)-$minimelor Pareto direcţionale locale.

Teorema 3.2.6
Fie $L \subset S_X$ şi $M \subset S_Y$ mulţimi nevide şi închise astfel încât $M \cap -M = \varnothing$ şi $\operatorname{cone} M$ este convexă. Fie $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}\, F \cap (A \times Y)$ un punct de $(L, M)-$minim Pareto local pentru problema (P). Presupunem că:

(i) *$A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]$ este local închisă în $\overline{x}$;*

(ii) *există $\ell > 0$, $e \in M$ şi U o vecinătate a lui $\overline{x}$ astfel încât, oricare ar fi $(x', x'') \in (U \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) \times (U \cap A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L])$,*

$$F(x') + \ell \|x' - x''\| e \subset F(x'') + \operatorname{cone} M. \tag{3.1}$$

Atunci, oricare ar fi $\ell' > \ell$, $(\overline{x}, \overline{y})$ este punct de $(L, M)-$minim Pareto *direcţional local pentru problema fără restricţii*

$$\min_K F(x) + \ell' d\,(x, A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L])\, e.$$

Pentru următorul rezultat de penalizare, considerăm problema (P) unde mulţimea restricţiilor este de forma $G^{-1}(-Q)$, unde $G : X \rightrightarrows Z$ este o multifuncţie şi $Q \subset Z$ este un con închis convex propriu. Notăm problema (P) cu acest tip de restricţii cu (P_G).

Teorema 3.2.7
Fie $L \subset S_X$ o mulţime nevidă închisă astfel încât $\operatorname{cone} L$ este convexă, $M \subset S_Y$ o mulţime nevidă închisă astfel încât $M \cap -M = \varnothing$ şi $\operatorname{cone} M$ este convexă. Fie $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (\tilde{G}^{-1}(0) \times Y)$ un punct de $(L, M)-$minim Pareto direcţional local pentru problema (P_G). Presupunem că:

(i) *există $\ell > 0, e \in M$ şi U o vecinătate a lui $\overline{x}$ astfel încât, oricare ar fi $(x', x'') \in (U \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) \times \big(U \cap G^{-1}(-Q) \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]\big)$,*

$$F(x') + \ell \|x' - x''\|\, e \subset F(x'') + \operatorname{cone} M.$$

(ii) *$\tilde{G}^{-1}$ este calmă direcţional în $(0, \overline{x})$ în raport cu S_Q şi L de constantă $\alpha > 0$.*

Atunci, oricare ar fi $\alpha' > \alpha$, punctul $((\overline{x}, 0), \overline{y})$ este un punct de $((L, S_Q), M)$ -minim Pareto direcţional local pentru multifuncţia

$$(x, z) \rightrightarrows F(x) + \ell\alpha' \|z\|\, e$$

pe mulţimea $\operatorname{Gr} \tilde{G}$.

Combinând Teorema 3.2.6 şi Teorema 3.2.7, obţinem un rezultat autentic de penalizare pentru problema (P_G).

Corolarul 3.2.8
Fie $L \subset S_X$ o mulţime nevidă închisă astfel încât $\operatorname{cone} L$ este convexă, $M \subset S_Y$ o mulţime nevidă închisă astfel încât $M \cap -M = \varnothing$ şi $\operatorname{cone} M$ este convexă. Fie $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (\tilde{G}^{-1}(0) \times Y)$ un punct de $(L, M)-$minim Pareto direcţional local pentru problema (P_G). Presupunem că:

(i) *există* $\ell > 0, e \in M$ *şi* U *o vecinătate a lui* $\overline{x}$ *astfel încât, oricare ar fi* $(x', x'') \in (U \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) \times \big(U \cap \tilde{G}^{-1}(-Q \cup Q) \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]\big)$,

$$F(x') + \ell \|x' - x''\| e \subset F(x'') + \operatorname{cone} M.$$

(ii) $\tilde{G}^{-1}$ *este calmă direcţional în* $(0, \overline{x})$ *în raport cu* S_Q *şi* L *de constantă* $\alpha > 0$.

(iii) $\operatorname{Gr} \tilde{G} \cap ([\overline{x} + \operatorname{cone} L] \times Q)$ *este local închisă în* $(\overline{x}, 0)$.

Atunci, oricare ar fi $\alpha' > \alpha$ *şi* $\lambda > \max\{\ell, \ell\alpha'\}$, *punctul* $((\overline{x}, 0), \overline{y})$ *este un* $((L, S_Q), M)-$*minim Pareto direcţional local (fără restricţii) pentru multifuncţia*

$$X \times Z \ni (x, z) \rightrightarrows F(x) + \ell\alpha' \|z\| e + \lambda d((x, z), \operatorname{Gr} \tilde{G} \cap [(x + \operatorname{cone} L) \times Q]).$$

3.3 Condiţii de optim pentru eficienţă Pareto direcţională cu restricţii

Rezultatul principal al acestei secţiuni este Teorema 3.3.2 care reprezintă o condiţie necesară de optim pentru problema (P_G). Acest rezultat a fost obţinut prin exploatarea incompatibilităţii dintre proprietatea de deschidere a multifuncţiilor şi minimele Pareto direcţionale şi, în plus faţă de Capitolul 2, utilizând conul normal Fréchet. Definim $\tilde{F} : X \rightrightarrows Y$ prin $\tilde{F}(x) := F(x) + \operatorname{cone} M$ şi considerăm multifuncţia $\big(\tilde{F}, \tilde{G}\big) : X \rightrightarrows Y \times Z$,

$$\big(\tilde{F}, \tilde{G}\big)(x) := \tilde{F}(x) \times \tilde{G}(x).$$

Avem următorul rezultat.

Propoziţia 3.3.1
Fie $L \subset S_X$ *o mulţime nevidă închisă,* $M \subset S_Y$ *o mulţime nevidă închisă astfel încât* $M \cap -M = \varnothing$ *şi* $\operatorname{cone} M$ *este convexă. Fie* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (G^{-1}(-Q) \times Y)$ *şi* $\bar{q} \in Q \cap -G(\overline{x})$. *Dacă* $(\overline{x}, \overline{y})$ *este un* $(L, M)-$*minim Pareto direcţional local*

pentru problema (P_G), *atunci există o vecinătate* U *a lui* $\overline{x}$ *astfel încât*

$$\left[\left(\tilde{F},\tilde{G}\right)(U\cap[\overline{x}+\operatorname{cone}L])-(\overline{y},-\overline{q})\right]\cap(-\operatorname{cone}M\times -Q)\subset\{0\}\times -Q.$$

Prin urmare, oricare ar fi vecinătăţile V *a lui* $\overline{y}$ *şi* W *a lui* $-\bar{q}$, *şi oricare ar fi* $(v,q)\in M\times(Q\backslash\{0\})$, *incluziunea*

$$(V\times W)\cap[(\overline{y},-\bar{q})-\operatorname{cone}\{v,q\}]\subset\left(\tilde{F},\tilde{G}\right)(U\cap[\overline{x}+\operatorname{cone}L])$$

nu poate avea loc.

Utilizând contrara reciprocei unui rezultat de deschidere direcţională pentru o multifuncţie de tip epigraf preluat din [16, Theorem 3.7] şi incompatibilitatea dintre deschiderea direcţională şi eficienţa direcţională, avem următorul rezultat de tip Fritz John pentru $(L,M)-$minime Pareto direcţionale locale ale problemei (P_G).

Teorema 3.3.2
Fie X,Y,Z *spaţii finit dimensionale,* $L\subset S_X$, $M\subset S_Y$ *mulţimi nevide închise astfel încât* $\operatorname{cone}L,\operatorname{cone}M$ *sunt convexe şi* $M\cap -M=\varnothing$. *Fie* $(\overline{x},\overline{y})\in\operatorname{Gr}F\cap(G^{-1}(-Q)\times Y)$ *şi* $\bar{q}\in Q\cap -G(\overline{x})$. *Presupunem că* $\operatorname{int}\operatorname{cone}M\neq\varnothing$ *şi* $\operatorname{int}Q\neq\varnothing$ *şi fixăm* $(v,q)\in\operatorname{int}\operatorname{cone}M\times\operatorname{int}Q$. *Presupunem că*

(i) $\operatorname{Gr}F$ *şi* $\operatorname{Gr}G$ *sunt local închise în* $(\overline{x},\overline{y})$ *şi* $(\overline{x},-\bar{q})$, *respectiv;*

(ii) F *şi* G *sunt Lipschitz în jurul lui* $(\overline{x},\overline{y})$ *şi* $(\overline{x},-\bar{q})$, *respectiv.*

Dacă $(\overline{x},\overline{y})$ *este un punct de* $(L,M)-$*minim Pareto direcţional local pentru problema* (P_G), *atunci există* $x^*\in L^+$, $y^*\in(\operatorname{cone}M)^+$, $z^*\in Q^+$ *astfel încât* $(y^*,z^*)(v,q)=1$ *şi*

$$x^*\in D^*F(\overline{x},\overline{y})(y^*)+D^*G(\overline{x},-\bar{q})(z^*).$$

Remarca 3.3.3
În cazul particular când $L=S_X$, *concluzia teoremei de mai sus se reduce la*

$$0\in D^*F(\overline{x},\overline{y})(y^*)+D^*G(\overline{x},-\bar{q})(z^*),$$

pentru $y^*\in(\operatorname{cone}M)^+$ *şi* $z^*\in Q^+$ *cu proprietatea* $(y^*,z^*)(v,q)=1$. *În acest caz particular, condiţia de tip Fritz John se obţine fără a presupune că ambele multifuncţii* F *şi* G *au proprietatea Lipschitz.*

3.4 Minime aproximative și penalizare exactă

În continuare, considerând notaţiile folosite în considerarea problemei (P), prezentăm câteva concepte de eficienţă direcţională aproximativă. Fie $Q \subset Y$ un con propriu, punctat, convex şi solid şi $L \subset S_X$ o mulţime nevidă închisă. Reamintim că $S_Q = S_Y \cap Q$.

Definiția 3.4.1
Fie $\varepsilon \in (0, \infty], \delta \in (0, \infty), c \in Q \setminus \{0\}, \varnothing \neq A \subset X$, *A închisă şi* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}F \cap (A \times Y)$.

(i) $(\overline{x}, \overline{y})$ *se numeşte* (ε, δ, c) *−minim Pareto direcţional aproximativ pentru F pe A în raport cu L, şi notăm* $(\overline{x}, \overline{y}) \in (\varepsilon, \delta, c) - \mathrm{DirMin}(F, A, L, Q)$, *dacă*

$$(F(B(\overline{x}, \varepsilon) \cap A \cap [\overline{x} + \mathrm{cone}L]) + \delta c - \overline{y}) \cap -Q = \varnothing.$$

(ii) $(\overline{x}, \overline{y})$ *se numeşte* (ε, δ) *−minim Pareto direcţional aproximativ pentru F pe A în raport cu L, şi notăm* $(\overline{x}, \overline{y}) \in (\varepsilon, \delta) - \mathrm{DirMin}(F, A, L, Q)$, *dacă*

$$(F(B(\overline{x}, \varepsilon) \cap A \cap [\overline{x} + \mathrm{cone}L]) + \delta S_Q - \overline{y}) \cap -Q = \varnothing.$$

Presupunem, în plus, $\mathrm{int}\, Q \neq \varnothing$.

(iii) $(\overline{x}, \overline{y})$ *se numeşte* (ε, δ, c) *−minim Pareto direcţional slab aproximativ pentru F pe A în raport cu L, şi notăm* $(\overline{x}, \overline{y}) \in (\varepsilon, \delta, c) - \mathrm{WDirMin}(F, A, L, Q)$, *dacă*

$$(F(B(\overline{x}, \varepsilon) \cap A \cap [\overline{x} + \mathrm{cone}L]) + \delta c - \overline{y}) \cap -\mathrm{int}Q = \varnothing.$$

(iv) $(\overline{x}, \overline{y})$ *se numeşte* (ε, δ) *−minim Pareto direcţional slab aproximativ pentru F pe A în raport cu L, şi notăm* $(\overline{x}, \overline{y}) \in (\varepsilon, \delta) - \mathrm{WDirMin}(F, A, L, Q)$, *dacă*

$$(F(B(\overline{x}, \varepsilon) \cap A \cap [\overline{x} + \mathrm{cone}L]) + \delta S_Q - \overline{y}) \cap -\mathrm{int}Q = \varnothing.$$

Exemplul 3.4.2
Ilustrăm printr-un exemplu definiţia de mai sus. Fie $\alpha > 0$. *Considerăm* $X = A = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$, $Q = \mathbb{R}^2_+$, $L = \{+1\}$, *definim multifuncţia* $F : X \rightrightarrows Y$

prin

$$F(x) := \begin{cases} \{x\} \times \{0\}, & \text{dacă} \quad x \in [-\alpha, 0] \\ \{x\} \times \left[-\sqrt{1-(x-1)^2}, \sqrt{1-(x-1)^2}\right], & \text{dacă} \quad x \in (0,2] \\ \mathbb{R}^2, & \text{dacă} \quad x \in [-\alpha, 2]^c \end{cases}.$$

Fie $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, şi $c \in S_{\mathbb{R}^2_+}$. Dacă $c \in S_{\mathbb{R}^2_+} \setminus \{(1,0)\}$, atunci $(\overline{x}, (\overline{x}, 0))$, oricare ar fi $\overline{x} \in [-\alpha, 0]$, este un $(\varepsilon, \delta, c)-$minim direcţional aproximativ pentru F pe A în raport cu L. Toate aceste puncte sunt de asemenea şi $(\varepsilon, \delta, c)-$minime slabe direcţionale aproximative.

Considerăm acum $c = (1,0)$ şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}F$ cu $\overline{x} \in [-\alpha, 0]$ şi $\overline{y} = (\overline{x}, 0)$.

Se disting două cazuri:

- *dacă $\delta > \alpha$, atunci $-\alpha + \delta > 0$ şi*

  $$(F(B(\overline{x}, \varepsilon) \cap A \cap [\overline{x} + \mathrm{cone}L]) + \delta c - \overline{y}) \cap -Q = \varnothing. \tag{3.2}$$

  Deci $(\overline{x}, (\overline{x}, 0))$ este un $(\varepsilon, \delta, c)-$minim direcţional aproximativ pentru F pe A în raport cu L.

- *dacă $\delta < \alpha$, atunci $-\alpha + \delta < 0$ şi*

  $$(F(B(\overline{x}, \varepsilon) \cap A \cap [\overline{x} + \mathrm{cone}L]) + \delta c - \overline{y}) \cap -\operatorname{int} Q = \varnothing.$$

  În plus, relaţia (3.2) nu are loc pentru $\overline{x} \in (-\alpha + \delta, 0)$. Deci, $(\overline{x}, (\overline{x}, 0))$ nu este un $(\varepsilon, \delta, c)-$minim direcţional aproximativ pentru F pe A în raport cu L, dar este un $(\varepsilon, \delta, c)-$minim direcţional slab aproximativ pentru F pe A în raport cu L.

Inspiraţi fiind de o tehnică de penalizare aplicată pentru probleme de optimizare vectorială din lucrarea [33], am obţinut un prim rezultat de penalizare pentru minime aproximative. Notăm că rezultatele următoare sunt similare cu cele din Secţiunea 3 (e.g., Teorema 3.2.10), însă este important de urmărit constantele care apar în definiţia eficienţei direcţionale aproximative.

Teorema 3.4.3
Fie $\varepsilon \in (0, \infty], \delta \in (0, \infty), \ell > 0, c \in S_Q$ şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}F \cap (A \times Y)$. Presupunem că $(\overline{x}, \overline{y})$ este un $(\varepsilon, \delta)-$minim Pareto direcţional aproximativ pentru F

pe mulţimea închisă A în raport cu L şi că

$$F(x'') + \ell \|x'' - x'\| c \subset F(x') + Q, \tag{3.3}$$

pentru orice $x', x'' \in B(\overline{x}, \varepsilon) \cap [\overline{x} + \mathrm{cone} L]$.

Atunci, oricare ar fi $\ell' > \ell$,

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in \left((\ell + \ell')^{-1} \ell\varepsilon, \delta\right) - \mathrm{DirMin}(F_0, X, L, Q),$$

unde $F_0 : X \rightrightarrows X, F_0(x) := F(x) + \ell' d(x, A \cap [\overline{x} + \mathrm{cone} L]) c$.

În cele ce urmează prezentăm un rezultat de penalizare pentru o problemă de optimizare cu restricţii reprezentate cu ajutorul multifuncţiilor. Deci mulţimea punctelor fezabile A este, la fel ca în Secţiunea 3, de forma $\tilde{G}^{-1}(0)$.

Teorema 3.4.4
Fie $\varepsilon \in (0, \infty], \delta \in (0, \infty), \ell > 0, m > 0, m' > m$ şi $c \in S_Q$. Fie $L \subset S_X$ o mulţime nevidă închisă astfel încât $\mathrm{cone} L$ este convexă şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr} F \cap (\tilde{G}^{-1}(0) \times Y)$. Presupunem că

(i) *$(\overline{x}, \overline{y})$ este un $(\varepsilon, \delta)-$minim Pareto direcţional aproximativ pentru problema (P_G);*

(ii) *oricare ar fi $x', x'' \in B(\overline{x}, \varepsilon) \cap [\overline{x} + \mathrm{cone} L]$,*

$$F(x'') + \ell \|x'' - x'\| c \subset F(x') + Q.$$

(iii) *$\tilde{G}$ este $\left(2^{-1}\varepsilon, m\right)-$metric subregulată direcţional în $(\overline{x}, 0)$ în raport cu S_Q şi L.*

Notăm $\lambda := \max\{\ell, \ell m'\}$. Atunci, oricare ar fi $\lambda' > \lambda$, există $\mu > 0$ astfel încât

$$((\overline{x}, 0), \overline{y}) \in (\mu, \delta) - \mathrm{DirMin}(H_0, X, L \times S_Q, Q),$$

unde $H_0 : X \times Z \rightrightarrows Y$ este definită prin

$$H_0(x, z) := F(x) + \ell m' \|z\| c + \lambda' d\left((x, z), \mathrm{Gr}\tilde{G} \cap ([\overline{x} + \mathrm{cone} L] \times Q)\right) c.$$

3.5 Condiții de optim pentru minime aproximative

Primul rezultat din această secţiune stabileşte incompatibilitatea dintre proprietatea de deschidere cu rată liniară (împreună cu regularitatea metrică sau proprietatea Aubin) şi noţiunea de minim. Acest rezultat rezidă, în esenţă, din faptul că proprietăţiile de regularitate (direcţională) ale multifuncţiei obiectiv nu fac distincţie între noţiunea de minim şi cea de maxim.

Propoziția 3.5.1
Fie $\varepsilon \in (0, \infty], \delta \in (0, \infty)$ şi $c \in S_Q$. Dacă $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr} F$ este un $(\varepsilon, \delta, c)-$minim Pareto direcţional aproximativ pentru problema

$$\min_K F(x) \quad x \in X,$$

atunci nu putem găsi un $\delta' > \delta$ astfel încât

$$B\left(\overline{y}, \delta'\right) \cap [\overline{y} - \mathrm{cone}\{c\}] \subset \tilde{F}\left(B\left(\overline{x}, \varepsilon\right) \cap [\overline{x} + \mathrm{cone} L]\right).$$

În această secţiune, am obţinut condiţii necesare de optim bazându-ne pe rezultatul de incompatibilitate din Propoziţia 3.5.1 şi un rezultat de deschidere pentru o multifuncţie de tip epigraf preluat din [16, Theorem 3.7]. Mai exact, pe de o parte, am demonstrat că nu este posibil pentru multifuncţia obiectiv să fie deschisă direcţional într-un punct de minim direcţional aproximativ. Pe de altă parte, după alegerea potrivită a unor constante şi utilizarea unor condiţii exprimate cu ajutorul mutiplicatorilor, vom demonstra că multifuncţia $\widetilde{F}$ poate fi deschisă direcţional în orice punct $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}\, F$. Luând contrara reciprocei în calcul, vom obţinem o condiţie necesară de optim, reprezentată cu ajutorul multiplicatorilor, pentru soluţii aproximative ale problemei de optimizare fără restricţii de forma

$$\min_K F(x) \quad \text{subject to} \quad x \in X.$$

Înainte de toate, prezentăm un rezultat auxiliar util în stabilirea condiţiilor necesare care revine, în esenţă, la alegerea potrivită a unor constante.

Lema 3.5.2
Considerăm $\psi, \varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$,

$$\psi(x) := (1 + x)^{-1/2} - (1 + x)^{-1}, \quad \varphi(x) := \psi(x) \cdot \left(\sqrt{1 + x} - 1\right).$$

Fie $\varepsilon \in (0, \infty]$ *şi* $\delta \in (0, \infty)$.

1. *Presupunem că* $\varepsilon \in \left(0, 4^{-1}\right)$. *Atunci sistemul de inecuaţii*

$$\begin{cases} \varphi(x) > \delta \\ \psi(x) < \varepsilon \end{cases} \tag{3.4}$$

   are (cel puţin) o soluţie, dacă

$$\sqrt{\delta} - \delta < \varepsilon \quad \text{şi} \quad \delta < \varepsilon.$$

   Reciproc, dacă există o soluţie a sistemului (3.4) în $(0, 3)$, *atunci* $\sqrt{\delta} - \delta < \varepsilon$.

2. *Presupunem că* $\varepsilon > 4^{-1}$. *Atunci sistemul de inecuaţii are o soluţie dacă şi numai dacă* $\delta \in (0, 1)$.

În ambele cazuri, există $\mu > 0$ *astfel încât orice* $x \in \left(\varphi^{-1}(\delta), \varphi^{-1}(\delta) + \mu\right)$ *este o soluţie a sistemului (3.4).*

Teorema 3.5.3
Fie X, Y *spaţii finit dimensionale,* $\varnothing \neq L \subset S_X$, $u \in \operatorname{int} Q \cap S_Q$, *şi* $F : X \rightrightarrows Y$ *o multifuncţie cu* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. *Fie* $\varepsilon \in (0, \infty]$ *şi* $\delta \in (0, \infty)$ *astfel încât sistemul (3.4) admite o soluţie. Fie* $d > 0$ *o soluţie. Presupunem că*

(i) $\operatorname{Gr} F \cap [D(\overline{x}, d) \times D(\overline{y}, d)]$ *este închisă;*

(ii) *oricare ar fi* $y^* \in Q^+$ *cu* $\langle y^*, u \rangle = 1$, *şi oricare ar fi* $(x, y) \in \operatorname{Gr} F \cap [B(\overline{x}, d) \times B(\overline{y}, d)]$, $z^* \in 2dB_{Y^*}, x^* \in \hat{D}^* F(x, y)(y^* + z^*)$, *există* $w \in L$ *astfel încât*

$$-\langle x^*, w \rangle \geq d \|y^* + z^*\|.$$

Atunci

$$B(\overline{y}, \delta) \cap [\overline{y} - \operatorname{cone}\{u\}] \subset \tilde{F}(B(\overline{x}, \varepsilon) \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]).$$

Rezultatul principal al acestei secţiuni este redat mai jos.

Teorema 3.5.4
Fie X, Y spaţii finit dimensionale, $\varnothing \neq L \subset S_X, \varnothing \neq Q \subset Y$ un con propriu, convex şi închis, $u \in \mathrm{int}Q \cap S_Q$, şi $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu graficul închis. Fie φ funcţia introdusă în Lema 3.5.2. Fie $\varepsilon \in (0, \infty]$ şi $\delta \in (0, \infty)$ astfel încât una din condiţiile de mai jos să fie satisfăcută:

(i) $\varepsilon > 4^{-1}$ *şi* $\delta \in [0, 1)$;

(ii) $\delta < \varepsilon$ *şi* $\sqrt{\delta} - \delta < \varepsilon$.

Presupunem că $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}F$ este un $(\varepsilon, \delta, u)-$minim Pareto direcţional aproximativ pentru problema

$$\min_K F(x) \quad x \in X.$$

Mai mult, presupunem că F are proprietatea Aubin pe $B(\overline{x}, 2\delta) \times B(\overline{y}, 2\delta)$. Atunci există $y^* \in Q^+$ cu $\langle y^*, u\rangle = 1$, şi

$$(x, y) \in \mathrm{Gr}F \cap \left[D\left(\overline{x}, \varphi^{-1}(\delta)\right) \times D\left(\overline{y}, \varphi^{-1}(\delta)\right)\right],$$

$z^* \in 2\varphi^{-1}(\delta) D_{Y^*}, x^* \in D^*F(x, y)(y^* + z^*)$ astfel încât, oricare ar fi $w \in L$, avem

$$-\langle x^*, w\rangle \leq \varphi^{-1}(\delta) \|y^* + z^*\|.$$

4 Stabilitatea punctelor de minim și a punctelor critice în cadrul direcțional

Cuprins

În acest capitol prezentăm câteva concepte de minime Pareto direcţionale pentru mulţimi care pot fi privite drept cazuri particulare de minime Pareto direcţionale pentru probleme de optimizare cu multifuncţii. Rezultatele principale din acest capitol sunt dedicate stabilităţii minimalităţii şi criticalităţii pentru probleme de optimizare vectoriale (abreviat POV). Toate rezultatele din acest capitol sunt preluate din articolul [7].

4.1 Minime Pareto direcționale pentru mulțimi

Aşa cum este notat în Definiţia 2.1.2 şi comentariile subsidiare, noţiunea de minim Pareto direcţional este motivată de studiul minimelor multifuncţiilor. Cu toate acestea, este posibil să se definească o noţiune omoloagă asociată mulţimilor. În această primă secţiune dăm o definiţie pentru noţiunea de minim pentru mulţimi şi oferim o serie de exemple şi condiţii necesare pentru astfel de minime.

Pe lângă conul punctat, propriu convex şi solid $K \subset (X, \|\cdot\|)$, considerăm de asemenea o mulţime nevidă închisă $L \subset S_X$. Considerăm conceptele următoare.

Definiția 4.1.1
Fie $A \subset X$ o mulţime nevidă, $c \in K \setminus \{0\}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$, şi $\overline{x} \in A$. Spunem că:

(i) *$\overline{x}$ este un punct de minim Pareto direcţional pentru A în raport cu L dacă*

$$(A - \overline{x}) \cap \operatorname{cone} L \cap -K = \{0\}\,; \tag{4.1}$$

(ii) *$\overline{x}$ este un punct de minim Pareto slab direcţional pentru A în raport cu L dacă*

$$(A - \overline{x}) \cap \operatorname{cone} L \cap -\operatorname{int} K = \varnothing; \tag{4.2}$$

(iii) *$\overline{x}$ este un punct de $(\varepsilon, c)-$minim Pareto direcţional pentru A în raport cu L dacă*

$$(A - \overline{x} + \varepsilon c) \cap \operatorname{cone} L \cap -K = \varnothing;$$

(iv) *$\overline{x}$ este un punct de $(\varepsilon, c)-$minim Pareto slab direcţional pentru A în raport cu L dacă*

$$(A - \overline{x} + \varepsilon c) \cap \operatorname{cone} L \cap -\operatorname{int} K = \varnothing.$$

Remarca 4.1.2
Se observă că minimele direcţionale din definiţia de mai sus sunt, de fapt, minime Pareto în raport cu conul de ordine $-K \cap \operatorname{cone} L$. Cu toate acestea, există câteva motive naturale care motivează această definiţie. De exemplu, o idee din spatele acestor concepte este că într-o anumită problemă dată ordinea este fixată de conul K şi, dacă un punct generic $\overline{x}$ nu este punct de minim în raport cu K, atunci căutăm o mulţime de direcţii care pot fi selectate astfel încât $\overline{x}$ să fie minim parţial (sau minim în raport cu conul $-K \cap \operatorname{cone} L$, unde L este mulţimea pe care o căutăm).

Remarca 4.1.3
Conceptele din definiţia de mai sus sunt, de fapt, minime Pareto direcţionale pentru multifuncţia $F : X \rightrightarrows X, F(x) := \{x\}$ pe A în raport cu L. Astfel că

o parte din rezultatele din această secţiune pot fi deduse din cele prezentate în Capitolul 2 şi Capitolul 3, dar există şi anumite particularităţi specifice.

Notăm mulţimea punctelor de minim Pareto direcţional pentru A în raport cu L cu $\text{DirMin}\,(A, L, K)$. Similar, pentru celelalte trei concepte din Definiţia 4.1.1, adoptăm notaţiile $\text{WDirMin}\,(A, L, K)$, $(\varepsilon, c)-\text{DirMin}\,(A, L, K)$ şi $(\varepsilon, c)-\text{WDirMin}\,(A, L, K)$, respectiv.

Acum dăm un exemplu care ilustrează noţiunea de minim din Definiţia 4.1.1.

Exemplul 4.1.4

Fie γ curba închisă a cărei reprezentare parametrică este

$$\begin{cases} x\,(t) = 2 + 2\cos t\,(1 - \sin t) \\ y\,(t) = \sin t\,(1 - \cos t) \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Notăm cu $\overline{\gamma}$ regiunea plană mărginită de imaginea curbei γ. Considerăm semiplanul $H := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq -x\}$. Fie $K = \mathbb{R}^2_+$, $\overline{x} := (0, 0)$ şi mulţimea de direcţii $L := \{(\cos t, \sin t) \mid t \in (\pi, 1.25\pi)\}$. Acum considerăm $A := H \cup (\overline{\gamma} \cap -H) \subset X := \mathbb{R}^2$. Observăm că $(A - \overline{x}) \cap \text{cone}\, L \cap -K = \{(0, 0)\} \subset K$ şi $(A - \overline{x}) \cap -K$ au puncte care nu se află în $K \setminus \{(0, 0)\}$. Prin urmare $\overline{x}$ este un minim Pareto direcţional pentru A în raport cu L, dar care nu este un minim Pareto pentru A. Similar, avem $(A - \overline{x}) \cap \text{cone}\, L \cap -\text{int}\, K = \varnothing$ şi $(A - \overline{x}) \cap -\text{int}\, K \neq \varnothing$, deci există puncte de minim Pareto slab direcţional care nu sunt puncte de minim Pareto slab.

Utilizând notaţiile din Definiţia 4.1.1, prezentăm câteva condiţii de optim pentru minime pentru mulţimi.

Teorema 4.1.5

Presupunem că $\text{cone}\, L \cap -\text{int}\, K \neq \varnothing$.

(i) *Dacă $\overline{x} \in A$ este un minim Pareto slab direcţional pentru A în raport cu L, atunci*

$$T_B^L(A, \overline{x}) \cap -\text{int}\, K = \varnothing.$$

(ii) *Dacă pentru $\overline{x} \in A$ avem*

$$T_B^L(\text{cl}(A + K), \overline{x})) \cap -\text{int}\, K = \varnothing,$$

atunci $\overline{x}$ este un minim Pareto slab direcţional pentru A în raport cu L.

Teorema 4.1.6
Presupunem că avem $\operatorname{cone} L \cap -K \neq \{0\}$ *. Dacă pentru $\overline{x} \in A$ avem*

$$T_B^L(\operatorname{cl}(A+K), \overline{x})) \cap -K \subset K,$$

atunci $\overline{x}$ este un minim Pareto direcţional pentru A în raport cu L.

4.2 Convergenţa minimelor pentru mulţimi

Fie $A, (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ submulţimi nevide ale lui X. În continuare vom folosi notaţiile:

$$\operatorname*{Liminf}_{n\to+\infty} A_n = \{x \in X \mid \exists\,(x_n)\,, x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \to x\}$$

şi

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to+\infty} A_n = \{x \in X \mid \exists\,(n_k)\,, \exists\,(x_{n_k})\,, x_{n_k} \in A_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \to x\}$$

Definiţia 4.2.1
Spunem că A este limita şirului (A_n) în sensul Painlevé-Kuratowski, notând $A_n \overset{P-K}{\to} A$, dacă au loc următoarele condiţii:

$$A \subset \operatorname*{Liminf}_{n\to+\infty} A_n \quad \text{şi} \quad \operatorname*{Limsup}_{n\to+\infty} A_n \subset A.$$

În plus, dacă are loc numai condiţia din stânga, atunci scriem $A_n \overset{P-K_-}{\to} A$, în timp ce dacă are loc numai condiţia din dreapta, atunci scriem $A_n \overset{P-K_+}{\to} A$.

De acum înainte presupunem că $A, (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mulţimi nevide şi închise, atâta vreme cât nu se fac presupuneri suplimentare. Prezentăm acum două rezultate de convergenţă ale unor şiruri de mulţimi care vor fi utilizate în rezultatele principale ale acestui capitol.

Lema 4.2.2
Presupunem că X este un spaţiu vectorial normat. Fie $\varnothing \neq L$ o submulţime închisă a lui S_X şi $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de mulţimi nevide şi închise ale lui S_X.

(i) *Dacă $L_n \overset{P-K_-}{\rightarrow} L$, atunci $\operatorname{cone} L_n \overset{P-K_-}{\rightarrow} \operatorname{cone} L$.*

(ii) *Dacă $L_n \overset{P-K_+}{\rightarrow} L$, atunci $\operatorname{cone} L_n \overset{P-K_+}{\rightarrow} \operatorname{cone} L$.*

Propoziţia 4.2.3
Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de submulţimi nevide şi închise din X, $A \subset X$ o mulţime nevidă şi închisă, şi $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de submulţimi nevide şi închise din X. Considerăm $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir astfel încât $x_n \in A_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi $x_n \to \overline{x} \in A$.
Dacă $A_n \overset{P-K_+}{\rightarrow} A$ şi $L_n \overset{P-K_+}{\rightarrow} L$, pentru $A \subset X$ şi $L \subset S_X$, Atunci

$$A_n \cap [x_n + \operatorname{cone} L_n] \overset{P-K_+}{\rightarrow} A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L].$$

În Secţiunea 3.2 a fost definită o noţiune de lărgire care utilizată judicios conduce la rezultate de convergenţă pentru minime Pareto pentru mulţimi. Iată câteva astfel de exemple redate în continuare.

Propoziţia 4.2.4
Fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de submulţimi nevide şi închise ale lui X, $A \subset X$ o mulţime nevidă şi închisă, L o submulţime nevidă şi închisă a lui S_X, $\varepsilon > 0$ şi $c \in K\setminus\{0\}$. Presupunem că $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ şi $A_n \overset{P-K}{\rightarrow} A$. Atunci, oricare ar fi, $\mu > 0$

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to+\infty} (\varepsilon, c) - \operatorname{WDirMin}(A_n, L_\mu, K) \subset (\varepsilon, c) - \operatorname{WDirMin}(A, L, K).$$

Propoziţia 4.2.5
Presupunem că $\operatorname{int} K \neq \varnothing$. Fie A o submulţime nevidă şi închisă a lui X, $c \in K \setminus \{0\}$, $\mu > 0$ şi L o mulţime nevidă şi închisă a lui S_X.

(i) *Fie $\varepsilon > 0$ şi $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon)$ un şir convergent către ε. Dacă (A_n) este un şir de submulţimi închise ale lui X astfel încât $A_n \overset{P-K}{\rightarrow} A$, atunci*

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to+\infty} (\delta_n, c) - \operatorname{WDirMin}(A_n, L_\mu, K) \subset (\varepsilon, c) - \operatorname{WDirMin}(A, L, K).$$

(ii) *Considerăm* $(\varepsilon_n) \subset (0, +\infty), \varepsilon_n \to 0.$ *Atunci*

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to+\infty} (\varepsilon_n, c) - \mathrm{WDirMin}\,(A, L_\mu, K) \subset \mathrm{WDirMin}\,(A, L, K)\,.$$

Remarca 4.2.6

Merită menţionat că rezultatele prezentate mai sus generalizează anumite rezultate din lucrarea [11] care, practic, corespund cazului $L = S_X$*.*

4.3 Rezultate de stabilitate pentru POV

Fie X şi Y spaţii vectoriale normate, $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $K \subset Y$ un con convex. Considerăm problema de optimizare abstractă fără restricţii asociată lui F:

$$\min\nolimits_K F(x) \quad x \in X. \tag{P}$$

În continuare, prezentăm câteva noţiuni de eficienţă direcţională.

Definiția 4.3.1

Fie Q *un con punctat convex din* Y*. Considerăm* $\varepsilon \in (0, +\infty)$*,* $c \in Q\setminus\{0\}$*,* $\varnothing \neq L \subset S_X$*,* $\varnothing \neq A \subset X$*,* A *închisă şi* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}\, F \cap (A \times Y)$*.*

(i) $(\overline{x}, \overline{y})$ *se numeşte minim direcţional pentru* F *pe* A *în raport cu* L*, şi notăm* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{DirMin}\,(F, A, L, Q)$*, dacă*

$$(F(A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) - \overline{y}) \cap -Q = \{0\}\,.$$

(ii) *Dacă* $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$*,* $(\overline{x}, \overline{y})$ *se numeşte minim slab direcţional pentru* F *pe* A *în raport cu* L*, şi notăm* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{WDirMin}\,(F, A, L, Q)$*, dacă*

$$(F(A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) - \overline{y}) \cap - \operatorname{int} Q = \varnothing.$$

(iii) $(\overline{x}, \overline{y})$ *se numeşte* (ε, c) *−minim direcţional pentru* F *pe* A *în raport cu* L*, şi notăm* $(\overline{x}, \overline{y}) \in (\varepsilon, c) - \mathrm{WDirMin}\,(F, A, L, Q)$*, dacă*

$$(F(A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) + \varepsilon c - \overline{y}) \cap -Q = \varnothing.$$

(iv) *Dacă* $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$, $(\overline{x}, \overline{y})$ *se numeşte* (ε, c) *−minim slab direcţional pentru* F *pe* A *în raport cu* L*, şi notăm* $(\overline{x}, \overline{y}) \in (\varepsilon, c) - \operatorname{WDirMin}(F, A, L, Q)$*, dacă*

$$(F(A \cap [\overline{x} + \operatorname{cone} L]) + \varepsilon c - \overline{y}) \cap - \operatorname{int} Q = \varnothing.$$

4.3.1 Stabilitatea eficienţei pentru POV

În această subsecţiune sunt notate câteva rezultate despre stabilitatea minimelor direcţionale sub acţiunea unei perturbări a multifuncţiei F sau a mulţimii punctelor fezabile A. Totul se încheie cu un exemplu care ilustrează teorema de stabilitate.

Teorema 4.3.2
Fie $F : X \rightrightarrows Y$ *o multifuncţie cu graficul închis,* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ *şi* $\mu > 0$*. Considerăm* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *un şir de submulţimi nevide şi închise ale lui* X*,* A *o mulţime nevidă şi închisă şi* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *un şir de multifuncţii definite de la* X *la* Y *astfel încât* F_n *are graficul închis, oricare ar fi* n*. Presupunem că* $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$ *şi alegem un şir de elemente* $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *astfel încât* $(x_n, y_n) \in \operatorname{WDirMin}(F_n, A_n, L_\mu, Q)$*, oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$*. Presupunem că:*

(i) $\operatorname{Gr} F_n \overset{P-K_-}{\to} \operatorname{Gr} F$ *şi* $A_n \overset{P-K_-}{\to} A$*;*

(ii) *oricare ar fi* $(x, y) \in \operatorname{Gr} F$*, există o vecinătate* V *a lui* y *astfel încât, oricare ar fi* $x'_n \to x$ *şi* $x''_n \to x$*, există* $(\lambda_n) \subset (0, +\infty)$ *cu* $\lambda_n \|x'_n - x''_n\| \to 0$ *pentru* $n \to +\infty$ *şi*

$$F_n(x'_n) \cap V \subset F_n(x''_n) + \lambda_n \|x'_n - x''_n\| D_Y,$$

pentru orice n *suficient de mare;*

(iii) *şirul* $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *este convergent la* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (A \times Y)$*.*

Dacă $\overline{y} \in \operatorname{WMin}(F(\overline{x}), Q)$*, atunci* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{WDirMin}(F, A, L, Q)$*.*

Exemplul 4.3.3
Fie $X = \mathbb{R}^2$*,* $Y = \mathbb{R}$*,* $Q = \mathbb{R}_+$*, şi* $A_n = A = \mathbb{R}^2$*. Fie*

$$L = \mathbb{R}^2_- \cap S_X$$

şi, pentru $\rho > 1$, *considerăm lărgirea*

$$C_\rho := \left\{\alpha\left(-1, \rho^{-1}\right) + \beta\left(\rho^{-1}, -1\right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+\right\}$$

care este, de fapt, $\mu-$*lărgirea mulţimii* L, *unde* $\mu = (1+\rho^2)^{-1/4}$. *Notăm că* $C_\rho = \operatorname{cone} L_\mu$ *şi* $\rho \to 0$ *pentru* $\mu \to \infty$. *Mai întâi, fie* $F_n : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ *definit prin* $F_n(a,b) = \left\{\frac{2}{n} - a - b\right\}$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă alegem* $(x_n, y_n) = \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), 0\right) \in \operatorname{Gr} F_n$, *atunci* $(x_n, y_n) \in \operatorname{WDirMin}(F_n, A_n, L_\mu, Q)$, *oricare ar fi* $\rho > 1$. *Apoi, considerăm* $F : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ *definită prin* $F(a,b) = -a-b$ *şi* $(\overline{x}, \overline{y}) = ((0,0), 0) \in \operatorname{Gr} F$. *Observăm că* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{WDirMin}(F, A, L, Q)$, *deci concluzia teoremei este satisfăcută în acest caz.*

Definim acum $F_n : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ *prin* $F_n(a,b) = \frac{2}{n} - a - b + \left(a - \frac{1}{n}\right)\left(b - \frac{1}{n}\right)$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}^*$. *Atunci* $(x_n, y_n) = \left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), 0\right) \in \operatorname{Gr} F_n$ *este element al mulţimii* $\operatorname{WDirMin}(F_n, A_n, L, Q)$, *dar nu este element al mulţimii*

$$\operatorname{WDirMin}(F_n, A_n, L_\mu, Q),$$

oricare ar fi $\mu > 0$. *Considerăm acum* $F : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ *definit prin* $F(a,b) = -a-b+ab$ *şi fie* $(\overline{x}, \overline{y}) \in ((0,0), 0) \in \operatorname{Gr} F$. *Observăm că* $(\overline{x}, \overline{y})$ *nu aparţine mulţimii* $\operatorname{WDirMin}(F, A, L, Q)$, *deşi restul ipotezelor din Teorema 4.3.2 sunt satisfăcute. Prin urmare, în Teorema 4.3.2 este esenţial să avem lărgirea* L_μ *în ipoteze.*

Remarca 4.3.4
În general, presupunerile pe care le găsim în literatura de specialitate care să asigure că limita unui şir convergent de minime pentru multifuncţii perturbate este un minim pentru multifuncţia obiectiv iniţială sunt destul de restrictive. De exemplu, în lucrarea [17], o ipoteză de lucru pentru teorema de stabilitate constă în existenţa limitei inferioare în sens Painlevé-Kuratowski pentru un şir de intersecţii de mulţimi care conţin multifuncţiile obiectiv (F_n) *şi mulţimile fezabile* (A_n). *În cazul de faţă am evitat condiţia convergenţei şirului de intersecţii.*

4.3.2 Stabilitatea criticalităţii pentru POV

În continuare, scopul nostru este de a aborda dintr-o altă perspectivă rezultatul de stabilitate din cadrul Teoremei 4.3.2. Ideea din spatele acestei abordări este că limita unui şir de minime direcţionale nu este în mod necesar un minim direcţional, dar poate fi, în condiţii suplimentare, un punct critic. Astfel rezultatul principal al acestei secţiuni nu ne spune altceva decât că limita unui şir de minime satisface o regulă generalizată de tip Fermat.

Teorema 4.3.5
Fie X, Y spaţii Asplund. Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu graficul închis şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. Considerăm un şir $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de multifuncţii cu grafic închis definite între X şi Y, $A \subset X$ şi $L \subset S_X$ mulţimi nevide închise. Presupunem că $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$ şi, oricare ar fi n, $(x_n, y_n) \in \operatorname{Gr} F_n \cap (A \times Y)$ este un minim Pareto direcţional slab pentru F_n pe A în raport cu L. Presupunem că:

(i) $(x_n, y_n) \to (\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (A \times Y)$;

(ii) *există $(\lambda_n) \subset (0, +\infty)$ cu $\lambda_n \|x_n - \overline{x}\| \to 0$ oricare ar fi $n \to +\infty$, astfel încât, oricare ar fi n,*

$$F([\overline{x} + \operatorname{cone} L] \cap A) \subset F_n((x_n + \operatorname{cone} L) \cap A) + \lambda_n \|x_n - \overline{x}\| D_Y,$$

(iii) *F este Lipschitz în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$;*

(iv) *mulţimile A şi $\overline{x} + \operatorname{cone} L$ sunt aliate în $\overline{x}$.*

Atunci există $y^* \in Q^+ \setminus \{0\}$ astfel încât

$$0 \in D^* F(\overline{x}, \overline{y})(y^*) + N(A, \overline{x}) + N(\operatorname{cone} L, 0).$$

În Definiţia 3.2.4 a fost definită o noţiune de minim propriu în raport cu o mulţimea de direcţii din spaţiu de intrare. Reamintim mai jos această definiţie, adaptând-o la contextul curent.

Definiţia 4.3.6
Fie $L \subset S_X$ o mulţime nevidă închisă. Spunem că $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este un $L-$minim Pareto direcţional propriu pentru F dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$(F(\overline{x} + \operatorname{cone} L_\varepsilon) - \overline{y}) \cap -Q = \{0\}.$$

Propoziţia 4.3.7
Fie F şi $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ multifuncţii cu grafic închis definite între spaţiile normate X şi Y, $(x_n, y_n) \in \operatorname{Gr} F_n$, oricare ar fi n şi $(x_n, y_n) \to (\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. Presupunem că, oricare ar fi n, (x_n, y_n) este un $L-$minim Pareto direcţional propriu F_n cu acelaşi $\varepsilon > 0$. Presupunem că $\operatorname{Gr} F_n \overset{P-K_-}{\to} \operatorname{Gr} F$. Dacă $\operatorname{int} Q \neq \varnothing$ şi $\overline{y} \in \operatorname{WMin}(F(\overline{x}), Q)$, atunci, oricare ar fi $\delta \in (0, \varepsilon)$, sistemul

$$\{\mathrm{Gr}\, F, [\overline{x} + \mathrm{cone}\, L_\delta] \times (\overline{y} - Q)\, , (\overline{x}, \overline{y})\}$$

este extremal.

Propoziţia 4.3.8
Fie F şi $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ multifuncţii cu grafic închis definite între spaţiile Asplund X şi Y, $(x_n, y_n) \in \mathrm{Gr}\, F_n$ oricare ar fi n şi $(x_n, y_n) \to (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}\, F$. Considerăm $(x_n, y_n) \in \mathrm{Gr}\, F_n$, oricare ar fi n, şi $(x_n, y_n) \to (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}\, F$. Presupunem că

(i) *oricare ar fi n, (x_n, y_n) este un $L-$minim Pareto direcţional propriu pentru F cu acelaşi $\varepsilon > 0$;*

(ii) $\mathrm{Gr}\, F_n \overset{P-K_-}{\to} \mathrm{Gr}\, F$;

(iii) *F este Lipschitz în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$;*

(iv) $\mathrm{int}\, Q \neq \emptyset$.

Atunci, oricare ar fi $\delta \in (0, \varepsilon)$, există $y^* \in Q^+ \setminus \{0\}$ astfel încât

$$0 \in D^* F\, (\overline{x}, \overline{y})\, (y^*) + N\, (\mathrm{cone}\, L_\delta, 0)\, .$$

Bibliografie

[1] Aliprantis, C. D., and Border, K. C. Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide. Springer, 2006.

[2] Aubin, J., and Frankowska, H. Set-Valued Analysis. Birkhäuser, 1990.

[3] Bao, T. Q., and Mordukhovich, B. S. Relative Pareto minimizers for multiobjective problems: Existence and optimality conditions. Mathematical Programming 122 (2010), 301–347.

[4] Boltyanski, Y., Martini, H., and Soltan, V. Geometric Methods and Optimization Problems, Combinatorial Optimization. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[5] Chelmuş, T. Exact penalization and optimality conditions for approximate directional minima (submitted).

[6] Chelmuş, T., and Durea, M. Exact penalization and optimality conditions for constrained directional Pareto efficiency. Pure and Applied Functional Analysis 5 (2020), 533–553.

[7] Chelmuş, T., and Durea, M. Stability of minimality and criticality in directional set-valued optimization problems. Positivity 34 (2021).

[8] Chelmuş, T., Durea, M., and Florea, E.-A. Directional Pareto efficiency: concepts and optimality conditions. Journal of Optimization Theory and Applications 182 (2019), 336–365.

[9] Dontchev, A., and Rockafellar, R. Implicit Functions and Solution Mappings. Springer, 2009.

[10] Durea, M. Estimations of the Lagrange multipliers norms in set-valued optimization. Pacific Journal of Optimization 2 (2006), 487–501.

[11] Durea, M. On the existence and stability of approximate solutions of perturbed vector equilibrium problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications 333 (2007), 1165–1179.

[12] Durea, M., Panţiruc, M., and Strugariu, R. Minimal time function with respect to a set of directions. Basic properties and applications. Optimization Methods and Software 31 (2016), 535–561.

[13] Durea, M., Panţiruc, M., and Strugariu, R. A new type of directional regularity for mappings and applications to optimization. SIAM Journal on Optimization 27 (2017), 1204–1229.

[14] Durea, M., and Strugariu, R. On some Fermat rules for set-valued optimization problems. Optimization 60 (2011), 575–591.

[15] Durea, M., and Strugariu, R. Calculus of tangent sets and derivatives of set-valued maps under metric subregularity conditions. Journal of Global Optimization 56 (2013), 587–603.

[16] Florea, E.-A., and Maxim, D. Directional openness for epigraphical mappings and optimality conditions for directional efficiency. Optimization 70 (2020), 321–344.

[17] Gaydu, M., Geoffroy, M., Jean-Alexis, C., and Nedelcheva, D. Stability of minimizers of set optimization problems. Positivity 21 (2017), 127–141.

[18] Gerstewitz (Tammer), C. Nichtkonvexe dualität in der vektoroptimierung. TH Leuna-Merseburg 25 (1983), 357–364.

[19] Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C., and Zălinescu, C. Variational Methods in Partially Ordered Spaces. Springer, 2003.

[20] Gutiérrez, C., Jiménez, B., and Novo, V. Optimality conditions for quasi-solutions of vector optimization problems. J. Optim. Theory Appl. 167 (2015), 796–820.

[21] Huynh, V., and Théra, M. Directional metric regularity of multifunctions. Mathematics of Operations Research 40 (2015), 969–991.

[22] Jahn, J. Vector Optimization. Theory, Applications, and Extensions. Springer, 2004.

[23] Khan, A. A., Tammer, C., and Zălinescu, C. Set-valued Optimization: An Introduction with Applications. Springer, 2015.

[24] Khanh, P. Q., and Tung, N. M. Higher-order Karush-Kuhn-Tucker conditions in nonsmooth optimization. SIAM Journal of Optimization 28 (2018), 820–848.

[25] Klein, E., and Thompson, A. Theory of Correspondences : Including Applications to Mathematical Economics. John Wiley and Sons, 1984.

[26] Li, S., Penot, J.-P., and Xue, X. Codifferential calculus. Set-Valued and Variational Analysis 19 (2011), 505–536.

[27] Maurer, H., and Zowe, J. First and second-order necessary and sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems. Mathematical Programming 16 (1979), 98–110.

[28] Mordukhovich, B. S. Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. I: Basic Theory, vol. 330 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (A Series of Comprehensive Studies in Mathematics). Springer, 2006.

[29] Nam, N., and Zălinescu, C. Variational analysis of directional minimal time functions and applications to location problems. Set-Valued and Variational Analysis 21 (2013), 405–430.

[30] Penot, J.-P. Cooperative behavior of functions, relations and sets. Mathematical Methods of Operations Research 48 (1998), 229–246.

[31] Penot, J.-P. Analysis. From Concepts to Applications. Springer, 2016.

[32] Tammer, C., and Zălinescu, C. Lipschitz properties of the scalarization function and applications. Optimization 59 (2009), 305–319.

[33] Ye, J. The exact penalty principle. Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications 75 (2012), 1642–1654.

[34] Zaffaroni, A. Degrees of efficiency and degrees of minimality. SIAM Journal on Control and Optimization 42 (2003), 1071–1086.

[35] Zălinescu, C. Mathematical Programming in Infinite Dimensional Normed Linear Spaces. Editura Academiei Române, 1998.