Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" Iaşi
Facultatea de Matematică

Rezumatul tezei de doctorat

Deformări proiective de spaţii Finsler

Conducător ştiinţific:
Profesor Dr. IOAN BUCĂTARU

Doctorand:
GEORGETA CREŢU

2019
Iaşi

Cuprins

Introducere

În prezenta teză de doctorat sunt abordate o serie de probleme de interes major în geometria Finsler, precum problema metrizabilităţii, a caracterizării spaţiilor Finsler de curbură constantă şi a comportării acestora la deformări proiective.
Ideea fundamentală a unui spaţiu Finsler poate fi regăsită în celebrul curs a lui Riemann intitulat "Despre ipoteze care stau la baza geometriei." În acest volum de memorii din 1854, Riemann discută diversele posibilităţi prin intermediul cărora o varietate n-dimensională poate fi înzestrată cu o metrică construită cu ajutorul elementului de arc şi acordă o atenţie deosebită funcţiilor pozitive, omogene de gradul întâi în diferenţiale şi convexe.
Ar părea firesc, prin urmare, să se introducă o generalizare suplimentară în sensul că ds distanţa dintre două puncte învecinate reprezentate prin coordonatele x şi $x + dx$ să fie definită de nişte funcţii $F(x, dx)$:

$$ds = F(x, dx),$$

care să satisfacă proprietăţile menţionate anterior. În teza sa de abilitare din anul 1854, Riemann a introdus o metrică într-un spaţiu general utilizând elementul de arc:

$$ds = F(x^1, ..., x^n; dx^1, ..., dx^n) \tag{0.0.1}$$

Aici $F(x, y)$ este o funcţie pozitivă pe fibratul tangent $TM \setminus \{0\}$ şi omogenă de grad unu în al doilea set de variabile.
Cazul pătratic

$$F^2(x, \dot{x}) = g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j \tag{0.0.2}$$

corespunde geometriei Riemann. Este remarcabil faptul că primul studiu sistematic al varietăţilor înzestrate cu o astfel de metrică a apărut după mai mult de 60 de ani. Acest studiu a format obiectul tezei lui Finsler în 1918, cel după care aceste spaţii au fost numite în cele din urmă.

În mod evident, teza lui Finsler trebuie să fie privită ca fiind primul pas efectuat pentru punerea bazei Geometriei Finsler. Cu toate acestea, câţiva ani mai târziu, dezvoltarea generală a luat o turnură îndepărtată de aspectele de bază şi de metodele teoriei dezvoltate de către Finsler. Acesta din urmă nu a utilizat calculul tensorial, fiind ghidat în principiu de noţiunile de calculul variaţiilor. În 1925 au fost aplicate, independent, dar aproape simultan, metodele de calcul tensorial teoriei lui Finsler. Acest lucru a fost făcut de către Synge, Taylor şi Berwald. S-a constatat că derivatele de ordinul doi ale jumătăţii pătratului lui $F(x, dx)$, în raport cu diferenţialele dx, pot fi considerate drept componente ale unui tensor metric, prin analogie cu geometria Riemanniană.
Geometria Finsler este caracterizată de S.S-Chern (Notices AMS, 43 (1996)) ca fiind "geometria Riemann fară restricţia pătratică" şi îsi are originile în integrale de forma:

$$\int_a^b F\left(x^1, ..., x^n, \frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right) dt. \tag{0.0.3}$$

Teza de doctorat este alcătuită din patru capitole care conţin rezultate strâns legate de cele două probleme menţionate mai sus.

În **capitolul 1** au fost introduse noţiunile necesare pentru formularea problemelor propuse spre studiere. Pentru început a fost prezentat formalismul care a fost utilizat pe parcursul întregii lucrari, formalismul Frolicher Nijenhuis. Ulterior am introdus instrumentul principal şi anume un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, care poate fi identificat cu un câmp vectorial special. Acest câmp vectorial special poartă numele de *spray geodezic*. Pornind de la spray-ul geodezic introdus anterior putem construi un întreg cadru geometric format din: conexiuni, proiectori, tensori de curbură, etc. Toate noţiunile menţionate anterior au fost definite în acest capitol. Tot aici a fost reamintită noţiunea de metrică Finsler şi au fost prezentate tipurile de metrici utilizate pe parcursul lucrării.

La finalul capitolului am formulat problema metrizabilităţii Finsler şi progresele făcute pentru soluţionarea acesteia.

Capitolul 2 este destinat formulării de noi soluţii pentru problema metrizabilităţii Finsler şi este alcătuit din rezultate originale prezentate în [7]. Amintim că problema metrizabilităţii este strâns legată de problema inversă din mecanica Lagrangiană şi cere să se stabilească dacă un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi poate fi obţinut dintr-o problemă variaţională.

Această problemă nu este complet rezolvată până în momentul de faţă. Există rezultate formulate de către Darboux care descriu soluţia din cazul 1-dimensional, [15]. Cazul 2-dimensional a fost discutat şi rezolvat de către Douglas în [17].

În acest capitol tratăm cazul 2-dimensional neplat şi prezentăm o soluţie constructivă nouă pentru problema metrizabilităţii asociată. Soluţia prezentată este obţinută prin definirea a două structuri geometrice pentru un spray dat. Structurile menţionate anterior au fost alese atent astfel încât să conţină toate informaţiile referitoare la metrizabilitatea Finsler a spray-ului dat. Dacă structurile menţionate anterior satisfac o serie de condiţii stabilite în prealabil acestea ne ajută să recuperăm funcţia Finsler asociată. Prima structură este o distribuţie 3-dimensională numită *distribuţia Berwald*, în timp ce a doua structură este o 2-formă. Integrabilitatea distribuţiei regulate şi rangul 2-formei sunt instrumentele utilizate pentru a formula o soluţie nouă pentru problema metrizabilităţii din cazul 2-dimensional. Am utilizat un reper canonic numit *reperul Berwald* pentru a discuta integrabilitatea distribuţiei Berwald şi rangul 2-formei. Prin urmare, putem reformula şi rezolva problema metrizabilităţii în funcţie de o serie de proprietăţi ale reperului Berwald. Din punct de vedere istoric este cunoscut faptul că reperul Berwald a fost introdus pentru prima oară local pentru o metrică Finsler de pe o varietate 2-dimensională în [4]. De atunci o serie de formulări diferite au fost obţinute în contextul Finslerian în [40] şi [39, §9.9.1]. Pentru a obţine o demonstraţie alternativă pentru această problemă Crampin a descoperit un reper similar asociat unei metrici Riemann de bază.

În studiul nostru incepem cu un spray arbitrar pentru care definim direct reperul Berwald asociat şi utilizăm proprietăţile acestui reper pentru a obţine informaţii referitoare la metrizabilitatea spray-ului ales. Cele mai importante rezultate ale acestui capitol sunt Teoremele 2.3.1 şi 2.3.2. Aceste teoreme oferă o caracterizare a metrizabilităţii în funcţie de integrabiitatea unei distribuţii speciale. Vom porni de la spray-ul geodezic şi vom contrui o distribuţie transversă câmpului vectorial Liouville. Finalizăm acest capitol cu o caracterizare a metricilor de curbură constantă de pe o varietate 2-dimensională. Reperul Berwald a fost instrumentul utilizat pentru a demonstra condiţiile din Teorema 2.4.1.

Capitolul 3 conţine rezutate originale legate de deformările proiective ale spaţiilor Finsler, rezultate care se regăsesc în [6, 5, 14]. Acest capitol este alcătuit din patru secţiuni, fiecare secţiune conţinând rezultate premergătoare teoremei centrale, Teorema 3.4.1. Punctul de început pentru această direcţie de cercetare a fost formulat de către Matveev,[26]. În lucrarea sa Matveev prezintă o demonstraţie nouă a Teoremei lui Beltrami utilizând instrumente specifice geometriei Finsler. În context Riemannian Teorema lui Beltrami afirmă că pentru două metrici proiectiv echivalente proprietatea de a avea curbură constantă este păstrată, [38]. Deoarece factorul proiectiv, care era liniar în geometria Riemann se transformă în 1-omogen în context Finslerian, teorema lui Beltrami nu mai este adevărată atunci când vorbim de metrici Finsler. Aşadar în geometria Finsler vom întâlni perechi de metrici Finsler care sunt proiectiv echivalente dar care nu păstrează proprietatea de a avea curbură constantă, sau metrici care au curbură constantă dar nu sunt proiectiv echivalente.

Ţinând cont de faptul că geometria Finsler poate fi privită ca o generalizare a geometriei Riemann putem adapta majoritatea rezultatelor din Riemann în Finsler. În timp ce în geometria Riemann metricile de curbură constantă sunt clasificate, în geometria Finsler această problemă este departe de a fi rezolvată. Scopul nostru este să introducem o serie de obiecte noi care să ne permită să formulăm caracterizări pentru metricile de curbură contantă. În acest capitol vom introduce doi tensori noi de tip Weyl şi o 1-formă semi-bazică de curbură, care reprezintă candidaţii optimi pentru îndeplinirea scopului propus anterior. Pentru o metrică Riemann pe o varietate de dimensiune mai mare sau egală decât 3, proprietatea de a avea curbură constantă este caracterizată de anularea tensorului proiectiv Weyl. Inspiraţi de acestă caracterizare am introdus tensorul de tip Weyl (3.2.1). Ulterior, relaţia dintre endomorfismul Jacobi şi tensorul de curbură asociat conexiunii neliniare a reprezentat punctul de plecare pentru introducerea celui de-al doilea tensor de tip Weyl, adică cel descris în (3.2.5).

Deoarece suntem interesaţi de spaţii Finsler vom analiza comportamentul ambilor tensori de tip Weyl la deformarea proiectivă a spray-ului iniţial. Am obţinut că ambii tensori de tip Weyl nu sunt proiectiv invarianţi, dar se transformă în tensori proiectiv invarianţi dacă factorul proiectiv este o funcţie Hamel. Primul rezultat important este Propoziţia 3.2.12. Deoarece doar o implicaţie a acestui rezultat este adevărată ne-am propus în cele ce urmează să formulăm o Variantă Finsleriană a Lemei lui Schur care să includă şi cazul 2-dimensional pentru a putea demonstra şi reciproca Propoziţiei 3.2.12. Aşadar, în a treia secţiune a acestui capitol am formulat o teoremă bazată pe trei condiţii (condiţii-CFC) care asigură faptul că o metrică Finsler este de curbură constantă. Un aspect important referitor la condiţiile CFC din Teorema 3.3.2 este acelă că una dintre cele trei condiţii este mereu satisfăcută, în funcţie de dimensiunea varietăţii pe care lucrăm.
Prima condiţie, condiţia de izotropie, este mereu satisfăcută în cazul 2-dimensional, în timp ce pentru dimensiune ≥ 3 identităţile diferenţiabile Bianchi asigură validitatea pentru a treia condiţie. Motivaţi de scopul nostru, acela de a studia deformări proiective de spaţii Finsler, am fost intresaţi de comportamentul celor trei condiţii menţionate anterior la o deformare proiectivă a spray-ului iniţial. Am obţinut că prima şi a treia condiţie sunt invariante la deformări proiective şi au conrespondenţi în geometria Riemann. Despre a doua condiţie, putem spune că aceasta nu este proiectiv invariantă, dar se transformă într-o condiţie proiectiv invariantă dacă şi numai dacă factorul proiectiv este o funcţie Hamel. Am putut astfel să formulăm ceea ce am numit Varianta Finsleriană a Teoremei lui Beltrami care afirmă că, [5]:

O metrică Finsler proiectiv echivalentă cu o metrică Finsler de curbură steag constantă are curbură steag constantă dacă şi numai dacă factorul proiectiv este o funcţie Hamel.

Capitolul 4 este capitolul în care am utilizat obstrucţia din Varianta Finsleriană a Teoremei lui Beltrami (factorul proiectiv trebuie să fie o funcţie Hamel) pentru a construi noi familii de metrici Finsler proiectiv echivalente de curbură constantă. Pentru a restrânge căutarea noastră am determinat mai întâi clasa tuturor metricilor Randers proiectiv plate pentru care factorul proiectiv este proporţional cu metrica, vezi Lema 4.2.1. Pornind de la această familie de metrici am efectuat pe rând o serie de deformări proiective.

Pentru prima clasă de metrici am utilizat deformările de tip Randers pentru a obţine familia de metrici din (4.3.10). Este o familie de metrici proiectiv plată de curbură constantă negativă. Pentru clasa de metrici (4.4.6) am avut drept punct de plecare definiţia metricii pătratice a lui Shen. Am obţinut asfel o nouă familie de metrici proiectiv plate de curbură steag constantă zero.

Ultima familie de metrici (4.4.14) a fost obţinută utilizând o serie de transformări conforme. Pentru construcţia aceasteia au fost utilizate familiile (4.2.1) şi (4.4.6) precum şi o serie de condiţii suplimentare care să asigure faptul că factorul proiectiv 1-omogen asociat este o funcţie Hamel.

Capitolul 1

Preliminarii

În acest capitol vom introduce noţiunile pe care le vom utiliza pe întreg parcursul lucrării. Pentru definirea acestor concepte au fost utilizate referinţele [10, 20, 31]. Prima parte acestui capitol este dedicată formalismului utilizat în teză, formalismul Frőlicher Nijenhuis. Apoi vom introduce instrumentul principal şi anume un câmp vectorial 2-omogen (spray) căruia îi asociem un întreg cadru geometric format din conexiuni, tensori de curbură, proiectori etc, [28, 32].

1.1 Formalismul Frőlicher Nijenhuis

Există câteva extensii ale parantezei dintre două câmpuri vectoriale pe o varietate netedă M. În particular, paranteza Frőlicher Nijenhuis care extinde paranteza a două câmpuri vectoriale la toate formele diferenţiale vector valuate pe M, [20].

1.1.1 Teoria Frolicher Nijenhuis

Considerăm M o varietate netedă, reală, m-dimensională. Notăm cu $C^\infty(M)$ inelul funcţiilor netede de pe varietatea M şi cu $\mathfrak{X}(M)$ modulul câmpurilor vectoriale de clasă C^∞ de pe varietatea M. Notăm prin T_xM spaţiul tangent la M în x, iar prin $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$ fibratul tangent al varietăţii M. Fiecare element din TM are forma (x, y), unde $x \in M$ şi $y \in T_xM$. Proiecţia naturală $\pi : TM \to M$ este dată de $\pi(x, y) = x$. Considerăm $\Lambda(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Lambda^k(M)$ algebra graduată a formelor diferenţiale de pe varietatea M. Notăm cu $\Psi(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Psi^k(M)$ algebra graduată a formelor diferenţiale vector valuate din M.

Un element $L \in \Psi^l(M)$ este o aplicaţia de clasă $C^\infty(M)$ anti-simetrică multiliniară:

$$L : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{l \text{ ori}} \to \mathfrak{X}(M).$$

Definiţia 1.1.1. *O derivare de grad r pe $\Lambda(M)$ este o aplicaţie $D : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ astfel încât:*

1. $Dk = 0, k \in \mathbb{R}$
2. $D\Lambda^p(M) \subset \Lambda^{p+r}(M)$,
3. $D(\varphi + \psi) = D\varphi + D\psi$,
4. $D(\pi \wedge \omega) = D\pi \wedge \omega + (-1)^{pr}\pi \wedge D\omega$, $\pi \in \Lambda^p(M)$.

Teorema 1.1.2. *O derivare pe $\Lambda(M)$ este complet determinată de acţiunea sa pe $\Lambda^0(M) = C^\infty(M)$ şi pe $\Lambda^1(M)$.*

Propoziţia 1.1.3. *Comutatorul a două derivări D_1 şi D_2 definit prin:*

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - (-1)^{r_1 r_2} D_2 \circ D_1$$

este o derivare de grad $r_1 + r_2$, r_1 respectiv r_2 fiind gradele pentru D_1 şi D_2.

Să introducem acum cele mai utilizate tipuri de derivări:

1. **Produsul interior** al formei $\omega \in \Lambda^p(M)$ în raport cu $X \in \mathfrak{X}(M)$ este definit prin:

$$i_X\omega(Y_1, \ldots, Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{p-1}).$$

2. **Derivata Lie** a formei $\omega \in \Lambda^p(M)$ în raport cu $X \in \mathfrak{X}(M)$ este definită prin:

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y_1, \ldots, Y_p) = X\left(\omega(Y_1, \ldots, Y_p)\right) - \sum_{i=1}^{p} \omega(Y_1, \ldots, [X, Y_i], \ldots, Y_p).$$

3. **Diferenţiala exterioară** a formei $\omega \in \Lambda^p(M)$ în raport cu $X \in \mathfrak{X}(M)$ este definită prin:

$$\begin{aligned}(d\omega)(Y_1, \ldots, Y_{p+1}) = &\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} Y_i \left(\omega(Y_1, \ldots, \widehat{Y_i}, \ldots, Y_{p+1})\right) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le p+1} (-1)^{i+1} \omega([Y_i, Y_j], Y_1, \ldots, \widehat{Y_i}, \ldots, \widehat{Y_j}, \ldots, Y_{p+1}).\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Observaţia 1. *Diferenţiala exterioară este o derivare de grad 1, produsul interior i_X este o derivare de grad -1, iar derivata Lie $\mathcal{L}_X$ este o derivare de grad 0. $\mathcal{L}_X$ este comutatorul dintre i_X şi d:*

$$\mathcal{L}_X = i_X d + d i_X = [i_X, d].$$

Propoziţia 1.1.4. *Fiecare aplicaţie $D : \Lambda^0(M) \oplus \Lambda^1(M) \to \Lambda(M)$ care satisface proprietăţile din definiţia derivării poate fi extinsă în mod unic la o derivare pe $\Lambda(M)$.*

1.1.2 Derivări de tip i_* şi d_*

Definiţia 1.1.5. *O derivare este de tip i_* dacă este trivială pe funcţii, adică pe $\Lambda^0(M)$.*

Definiţia 1.1.6. *Pentru orice $L \in \Psi^l(M)$ există o derivare asociată de tip i_*, de grad $l-1$, notată i_L, definită prin:*

1. *$i_X\omega = \omega(X)$ dacă $X \in \Psi^0(M) = \mathfrak{X}(M)$,*

2. *$i_L\omega(X_1, \ldots, X_l) = \omega(L(X_1, \ldots, X_l))$ dacă $L \in \Psi^l(M)$, $l \le 1$.*

Definiţia 1.1.7. *O derivare este de tip d_* dacă comută cu diferenţiala exterioară d.*

Diferenţiala exterioară d şi derivata Lie sunt derivări de tip d_*.

Propoziţia 1.1.8. *Pentru orice l-formă vectorială $L \in \Psi^l(M)$ pot fi asociate două derivări pe $\Lambda(M)$ după cum urmează:*

1. *i_L, o derivare de grad $l-1$ definită prin:*

$$i_L\omega = \omega \circ L, \text{ dacă } \omega \in \Lambda^1(M).$$

2. d_L, o derivare de grad l definită prin:

$$d_L := [i_L, d] = i_L \circ d - (-1)^{l-1} d \circ i_L.$$

În particular avem următoarele cazuri speciale:

1. Dacă $X \in \Psi^0(M)$, atunci i_X este produsul interior în raport cu X.
2. Dacă $X \in \Psi^0(M)$, atunci $d_X = i_X d + d i_X = \mathcal{L}_X$ este derivata Lie în raport cu X.
3. Dacă $L = Id \in \Psi^1(M)$, atunci $d_{Id}\omega = i_{Id} d\omega - d_{Id}\omega = (p+1)d\omega - d(p\omega) = d\omega$ este diferenţiala exterioară.

1.1.3 Croşetul Frolicher Nijenhuis

Pentru orice două forme vectoriale $K \in \Psi^k(M)$ şi $L \in \Psi^l(M)$ există o unică formă vectorială $[K, L] \in \Psi^{k+l}(M)$, numită *croşetul Frolicher Nijenhuis* asociat formelor K şi L astfel încât:

$$d_{[K,L]} = [d_K, d_L] = d_K \circ d_L - (-1)^{kl} d_L \circ d_K.$$

Croşetul Frolicher Nijenhuis are următoarele proprietăţi:

1. $[K, L] = (-1)^{kl+1}[L, K]$,
2. $(-1)^{kn}[K, [L, N]] + (-1)^{lk}[L, [N, K]] + (-1)^{ln}[N, [K, L]] = 0$,
3. $[I, K] = 0$.

În particular, dacă K, respectiv L sunt câmpuri vectoriale pe varietatea M, atunci croşetul Frolicher Nijenhuis se reduce la paranteza Lie a două câmpuri vectoriale.
Dacă $L \in \Psi^l(M)$ şi $K \in \Psi^0(M)$, atunci pentru toţi $Y_1, \ldots, Y_l \in \mathfrak{X}(M)$ croşetul Frolicher Nijenhuis este definit de:

$$[X, L](Y_1, Y_2, \ldots, Y_l) = [X, L(Y_1, \ldots, Y_l) - \sum_{i=1}^{l} L(Y_1, \ldots, [X, Y_i], \ldots, Y_l).$$

Dacă $L \in \Psi^l(M)$,

$$[X, L]Y = [X, LY] - L[X, Y].$$

Dacă $K,\ L \in \Psi^l(M)$, atunci pentru orice $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ croşetul Frolicher Nijenhuis este definit prin:

$$[K, L](X, Y) = [KX, LY] + [LX, KY] + KL[X, Y] + LK[X, Y] - K[LX, Y] - K[X, LY] - L[KX, L] - L[X, KY].$$

O clasă importantă de forme vectoriale pe TM ce sunt compatibile cu structura tangentă $J = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i$ şi cu câmpul vectorial Liouville $\mathcal{C} = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ este reprezentată de formele semi-bazice. O formă ω pe TM se numeşte *semi-bazică* dacă se anulează de fiecare dată când unul dintre argumente este un câmp vectorial vertical. Local, o k-formă semi-bazică ω poate fi scrisă astfel:

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

O 1-formă ω pe TM este semi-bazică dacă şi numai dacă $i_J \omega = \omega \circ J = 0$.
O formă vector valuată pe TM se numeşte *semi-bazică* dacă ia valori vecticale şi se anulează ori de câte ori unul dintre argumente este un câmp vectorial vertical. În coordonate locale, o l-formă semi-bazică vector valuată pe TM poate fi scrisă sub forma:

$$L = \frac{1}{l!} L^j_{i_1 \ldots i_l}(x, y) \frac{\partial}{\partial y^j} \otimes dx^{i_1} \wedge dx^{i_l}.$$

O 1-formă vector valuată pe TM este semi-bazică dacă şi numai dacă $J \circ L = 0$ şi $i_J L = L \circ J = 0$. Structura tangentă J este o 1-formă semi-bazică vector valuată.

1.2 Metrici Finsler. Exemple

Incepem această secţiune cu introducerea noţiunii de metrică Finsler.

Definiţia 1.2.1. *Fie M o varietate de dimensiune n. O metrică Finsler pe M este o funcţie continuă, pozitivă, $F : TM \to \mathbb{R}$ care are următoarele propriteăţi:*

1. *F este de clasă C^∞ pe T_0M;*

2. *F este 1-omogenă în coordonatele fibră, adică:*

$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y) \;\; \forall \lambda > 0, \;\; (x, y) \in TM.$$

3. *F^2 este un Lagrangian regulat, adică următorul tensor metric are rang maximal n pe T_0M:*

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}.$$

Un spaţiu Finsler este o pereche (M, F), unde M este o varietate şi F o funcţie Finsler pe M.

Observaţia 2. 1. *Dacă în definiţia precedentă restricţionăm domeniul funcţiei la un con deschis $A \subset TM$ atunci vorbim de o* funcţie pseudo-Finsler conică.

2. *Dacă înlocuim a treia condiţie de regularitate din teorema precedentă cu condiţia mai slabă de regularitate $rang(g_{ij}) = n - 1$, atunci vorbim despre o* funcţie Finsler degenerată.

Aceeaşi condiţie poate fi exprimată utilizând forma a doua a lui Hilbert : $\omega_{F^2} = -dd_J F^2$ după cum urmează:

Observaţia 3. 1. *Funcţia F satisface condiţia de regularitate (3) dacă şi numai dacă ω_{F^2} are rang maxim $2n$, adică este o structură simplectică.*

2. *Funcţia F satisface condiţia de regularitate slabă, deci este o funcţie Finsler degenerată dacă şi numai dacă 2-forma ω_{F^2} are rang $2(n-1)$.*

În cele ce urmează vom prezenta câteva exemple remarcabile de metrici Finsler pe care le vom utiliza pe parcursul lucrării.
Pentru o metrică Finsler F pe o variatete M, domeniul său este reprezentat de întreg fibratul tangent TM şi tensorul său fundamental g este pozitiv definit.

Metricile Riemann: Pentru o metrică Riemann g pe varietatea M definim $F : TM \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) := \sqrt{g_{ij}(x) y^i y^j}, \tag{1.2.1}$$

unde $y = (y^i) \in T_xMn$ este vectorul tangent în $x \in M$. Rezultă că F este o metrică Finsler. Pe parcursul acestei lucrări vom înţelege prin metrică Finsler care poate fi redusă la o metrică Riemann, o metrică care poate fi scrisă sub forma (1.2.1).

Metricile Randers: În anul 1941 G. Randers, [30] a introdus o clasă nouă de structuri Finsler foarte utile pentru fizicieni. Ulterior acestor structuri le-a fost atribuită deumirea de metrici Raders. Un aspect important care merită să fie menţionat este că aceste metrici reprezintă o sursă importantă de metrici Finsler care nu pot fi reduse la o metrică Riemann, [41]. Componentele unei metrici Randers sunt:

1. *o metrică Riemann* $\widetilde{a} := a_{ij} dx^i \otimes dx^j$ pe o varietate netedă n-dimensională M şi

2. *o 1-formă* $\widetilde{b} := b_i(x)dx^i$.

Împreună cele două obiecte menţionate anterior definesc o structură Finsler:

$$F(x,y) = a(x,y) + b(x,y), \tag{1.2.2}$$

unde

$$a(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j} \text{ and } b(x,y) = b_i(x)y^i. \tag{1.2.3}$$

Datorită faptului că $b(x,y)$ este liniar in coordonata fibră este imposibil să vorbim despre signatură. Prin urmare, pentru a putea discuta despre pozitivitatea acestei funcţii trebuie să adăugăm o condiţie suplimentară asupra lui $b(x,y)$:

$$||\widetilde{b}|| := \sqrt{b_ib^i} < 1, \text{ where } b^i := a^{ij}b_i. \tag{1.2.4}$$

Metricile de forma (a,b): Acestea reprezintă o clasă importantă de metrici Finsler care deţine proprietăţi speciale referitoare la curbură, [1]. Au fost introduse de către Matsumoto, [24], şi sunt exprimate în funcţie de o metrică Riemann şi o 1-formă. Utilizând a şi b din (1.2.3) putem defini o funcţie pe TM după cum urmează:

$$F = a\phi(s),\ s = \frac{b}{a}. \tag{1.2.5}$$

unde $\phi = \phi(s)$ este o funcţie pozitivă 0-omogenă de clasă C^∞ pe un interval deschis $(-b_0, b_0)$ cu $||b||_a < b_0$. Pentru a transforma funcţia Finsler definită în (1.2.5) într-o metrică Finsler trebuie să fixăm o serie de condiţii asupra 1-formei b şi asupra funcţiei ϕ. Condiţia impusă asupra 1-formei b afirmă că norma lui b în raport cu a trebuie să fie mai mică decât marginea superioară a intervalului $(-b_0, b_0)$. Amintim că norma lui b în raport cu a este dată prin

$$||b_x||_a := \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)}. \tag{1.2.6}$$

Referitor la condiţiile impuse asupra funcţiei ϕ amintim următorul rezultat din [11].

Lema 1.2.2. *Funcţia $F = a\phi\left(\frac{b}{a}\right)$ este o metrică Finsler dacă şi numai dacă $\phi = \phi(s)$ este o funţie pozitivă de clasă C^∞ pe $(-b_0, b_0)$ care satisface condiţia*

$$\phi(s) - s\phi'(s) > 0,\ |s| < b_0. \tag{1.2.7}$$

Se observă că există câteva forme particulare ale funcţiei ϕ care ne conduc căre o serie de metrici care au facilitat studiul multor probleme din geometria Finsler.
De exemplu:

1. pentru $\phi = 1 + \frac{b}{a}$ recuperăm metricile Randers (1.2.2).
2. pentru $\phi = 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$ obţinem metricile pătratice $F = \frac{(a+b)^2}{a}$, [29, 33].
3. pentru $\phi = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$ obţinem metrica Kropina $F = \frac{a^2}{b}$. Aceste metrici au fost introduse de către Kropina V., [21] şi au fost studiate de alţi matematicieni celebri ca Shibata, [36] şi Matsumoto, [23].

Pornind de la cadrul geoemtric introdus putem asocia unei metrici Finsler (degenerate) F o metrică pe T_0M astfel, [19],

$$\begin{aligned} &2G(X,Y) = -\omega_{F^2}(X, \mathbb{F}Y), \quad \omega_{F^2}(X,Y) = -2G(X,JY) + 2G(JX,Y), \\ &G = g_{ij}dx^i \otimes dx^j + g_{ij}\delta y^i \otimes \delta y^j. \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Distribuţii. Teorema lui Frobenius

Vom introduce noţiunea de distribuţie şi vom reaminti Teorema lui Frobenius pentru câmpuri vectoriale, [37].

Definiţia 1.2.3. *Fie M o varietate de dimensiune n şi p un întreg pozitiv $p \leq m$. O distribuţie p-dimensională $\mathcal{D}$ este o alegere (netedă) de subspaţii p-dimensionale ale spaţiului T_xM pentru fiecare $x \in M$.*

Definiţia 1.2.4. *Spunem că distribuţia A este involutivă (sau închisă la paranteza Lie) dacă şi numai dacă pentru X şi Y câmpuri vectoriale peste o mulţime deschisă U avem:*

$$X \in \mathcal{D},\ Y \in \mathcal{D} \rightarrow [X, Y] \in \mathcal{D}. \tag{1.2.9}$$

Definiţia 1.2.5. *O distribuţie A este integrabilă dacă şi numai dacă pentru orice $x_0 \in M$ există o subvarietate scufundată $N_{x_0} \hookrightarrow M$ astfel încât:*

$$x_0 \in N_{x_0},\ \forall x \in N_{x_0},\ T_xN_{x_0} = \mathcal{D}_x.$$

Teorema 1.2.6 (Teorema lui Frobenius)**.** *Distribuţia $\mathcal{D}$ este involutivă dacă şi numai dacă este integrabilă.*

1.3 Spray-ul geodezic

Fibratul tangent este înzestrat cu o serie de structuri canonice foarte utile pentru a construi cadrul geometric. În acest cadru geometric vom discuta despre conexiuni neliniare, proiectori, câmpuri vectoriale şi tensori de curbură.

Fie $L : \mathbb{R} \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie pe care o numim Lagrangean. Problema variaţională constă în a găsi o curbă c, continuă şi de clasă C^1 pe porţiuni, care rezolvă problema de minim:

$$\inf_{c \in C} J(c),\ J(c) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, c(t), \dot{c}(t))dt. \tag{1.3.1}$$

$$C = \{c : [t_0, t_1] \rightarrow M, c_i := c_i(t_i) \in M_i, c \in C([t_0, t_1]),\ C^1 \text{pe porţiuni}\}.$$

În condiţii de regularitate aceasta se reduce la ecuaţiile Euler Lagrange asociate Lagrangeanului.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{1.3.2}$$

Curba care satisface condiţiile menţionate anterior poartă numele de geodezică. Ecuaţiile geodezicelor se pot obţine prin înlocuirea în (1.3.2) a Lagrangeanului cu anergia cinetică. Funcţia energie $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ asociată unei metrici Finsler este $E = F^2$. Tensorul fundamental g_E asociat lui E este analog tensorului metric din geometria Riemann. Acesta este definit prin:

$$(g_E)_{ij} := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}, \tag{1.3.3}$$

într-un sistem de coordonate standard (x, y) pe TM. Presupunem că $x(t)$ este un extrem al (1.3.1). Înlocuind energia cinetică în ecuaţiile Euler Lagrange asociate funcţiei Finsler obţinem:

$$\frac{\partial E}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial y^i}\right) = -2g_{ij}\left(\frac{d^2x^j}{dt^2} + \frac{1}{2}g^{jl}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^l \partial x^k} - \frac{\partial E}{\partial x^l}\right)\right). \tag{1.3.4}$$

Dacă notăm:

$$G^j(x,y) = \frac{1}{4}g^{jl}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^l \partial x^k} - \frac{\partial E}{\partial x^l}\right),$$

avem un sistem de n ecuaţii diferenţiale omogene de ordin 2:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \tag{1.3.5}$$

Observaţia 4. *Coeficienţii $G^i(x,y)$ sunt 2 omogeni în coordonata fibră, adică $G^i(x,\lambda y) = \lambda^2 G^i(x,y)$.*

Sistemul (1.3.5) poate fi identificat cu un câmp vectorial special $S \in \mathfrak{X}(T_0M)$,

$$S\left(\frac{\partial E}{\partial y^i}\right) + \frac{\partial E}{\partial x^i} = 0,$$

unde

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{1.3.6}$$

Câmpul S definit anterior poartă numele de *spray geodezic*. Problema metrizabilităţii unui spray S constă în găsirea unei funcţii Finsler F a cărei geodezice să coincidă cu geodezicele spray-ului S.

1.4 Conexiuni

În cele ce urmează ne dorim să introducem conceptul de conexiune, [10]. În geometrie noţiunea de conexiune exprimă tocmai ideea de transport paralel a anumitor date de-a lungul curbelor sau familiilor de curbe. În geometria diferenţială există mai multe tipuri de conexiuni, cea mai cunoscută fiind conexiunea afină care descrie modul în care vectorii tangenţi la o varietate sunt transportaţi paralel de-a lungul unei curbe. Atunci când definim o conexiune liniară utilizând derivata covariantă indusă de transportul paralel, facem presupunerea că aplicaţia care asociază fiecărei direcţii derivata totală în acea direcţie, este liniară. Dacă reunuţăm la această presupunere, conexiunea pe care o vom obţine se va numi conexiune neliniară. Fiecare conexiune, generată prin paralelism induce o conexiune neliniară pe varietatea bază. Un spray S induce o conexiune neliniară prin intermediul endomorfismului $\Gamma = [J, S]$ pe T_0M. Conexiunea Γ este o structură aproape produs, adică $\Gamma^2 = -\operatorname{Id}$. Aceasta induce doi proiectori:

$$h = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Id} + [J,S]\right), \quad v = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Id} - [J,S]\right). \tag{1.4.1}$$

Proiectorul v corespunde distribuţiei verticale VTM, în timp ce h corespunde distribuţiei orizontale HTM, care este suplimentară distribuţiei verticale, adică:

$$T_uTM = H_uTM \oplus V_uTM, \ \forall u \in TM. \tag{1.4.2}$$

Pentru o conexiune neliniară dată, avem o bază $\{\delta/\delta x^i, |_u, \partial/\partial y^i|_u\}$ adaptată descompunerii (1.4.2). Această bază se numeşte baza Berwald a conexiunii neliniare. Baza duală adaptată este dată de :$\{dx^i, \delta y^i\}$. În consecinţă, spaţiul orizontal H_uTM în fiecare punct este dat de:

$$H_uTM = \{X_u \in T_uTM, \delta y^i(X_u) = 0, \forall i \in \{1, \dots n\}\}.$$

Proiectorii verticali şi orizontali ai conexiunii neliniare pot fi exprimaţi în funcţie de baza Berwald în următoarea manieră:

$$h = \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^i, \ v = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \delta y^i, \ \frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \ \delta y^i := dy^i + N_j^i dx^j, \ N_j^i := \frac{\partial G^i}{\partial y^j}.$$

Conexiunea indusă de un spray poate fi caracterizată utilizând structura aproape complexă pe T_0M:

$$\mathbb{F} = h \circ [S, h] - J = \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes \delta y^i - \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i. \tag{1.4.3}$$

Dezavantajul neliniarităţii pentru conexiunile neliniare induse prin transport paralel poate fi înlăturat prin considerarea liftului său la o conexiune liniară pe spaţiul total al fibratul tangent. Ceea ce pierdem este posibilitatea de a ne întoarce cu uşurinţă pe varietatea bază pentru a-i studia geometria. Dacă fibratul tangent al unei varietăţi este înzestrat cu o conexiune neliniară, atunci în fiecare punct $u \in TM$ avem descompunerea (1.4.2). Pentru două puncte $u,\ v \in TM$ suntem interesaţi să definim un transport paralel între T_uTM şi T_vTM care să păstreze descompunerea de mai sus. Conexiunea liniară care corespunde unui transport paralel de acest tip se numeşte conexiune N-liniară. Pentru o varietate Finsler există patru astfel de conexiuni liniare. Cea pe care o vom utiliza pe parcursul acestei lucrări se numeşte *conexiunea Berwald* şi este definită cu ajutorul derivatei coveriante. Reamintim definiţia derivatei covariante, [10]:

Definiţia 1.4.1. *Derivata covariantă dinamică indusă de un spray S este o derivare tensorială pe T_0M:*

$$\nabla : \mathfrak{X}(TM) \to \mathfrak{X}(TM),$$

a cărei acţiune pe funcţii şi câmpuri vectoriale este dată prin:

$$\nabla f = S(f),\ \nabla X = h[S, hX] + v[S, vX],\ f \in C^\infty(T_0M),\ X \in \mathcal{X}(T_0M).$$

Definiţia 1.4.2. *Aplicaţia $D : \mathfrak{X}(TM) \times \mathfrak{X}(TM) \to \mathfrak{X}(TM)$ dată prin:*

$$D_XY = v[hX, vY] + h[vX, hY] + J[vX, \theta Y] + \theta[hX, JY] \tag{1.4.4}$$

este o conexiune liniară pe TM, numită conexiunea Berwald.

Indicatoarea

Fie $\pi : TM \to M$ proiecţia naturală a fibratului tangent TM. Definim o relaţie de echivalenţă pe T_0M prin: $X \sim Y$ dacă doi vectori tangenţi nenuli satisfac $Y = \lambda X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$. Spaţiul $T_0M/\sim$ se numeşte fibratul tangent proiectiv peste M, notat cu PTM. Acesta este izomrof cu fibratul sferei unitate $SM = \{y \in T_0M | F(., y) = 1\}$ peste (M, F). Deci $dimPTM = dimSM = 2n - 1$. Coordonatele locale pe PTM pot fi notate prin (x^i, y^i), unde $\{y^i\}$ sunt coordonate omogene.
Pentru un punct $x \in M$, fibra lui SM în x este:

$$S_xM = I_xM = \{y \in T_xM | F_x(y) = F(x, y) = 1\}.$$

Dacă F este Riemann atunci indicatoarea în fiecare punct este sfera unitate. Indicatoarea Finsler reprezintă o extensie a sferei Euclidiene unitate. Studiul indicatoarei unui spaţiu Finsler real este de interes, în primul rând datorită faptului că aceasta este o mulţime compactă şi strict convexă care încadrează originea. Acesta este motivul pentru care, de exemplu, indicatoarea joacă un rol aparte în definirea volumului unui spaţiu Finsler. Geometria indicatoarei ca hipersuprafaţa a unui spaţiu total a fost studiată de Akbar-Zadeh care a demonstrat că joacă un rol important în obţinerea condiţiilor necesare şi suficiente pentru ca o varietate Finsler izotropă să fie de curbură constantă. Vom nota prin (IM, π, M) fibratul indicator al varietăţii (M, F). Observăm că transportul paralel omogen (neliniar) nu păstrează tensorul metric Finsler, dar păstrează valoarea funcţiei Finsler. Aceasta înseamnă că pentru orice curbă $c : [0, 1] \to M$, transportul paralel indus $\tau_c : T_{c(0)}M \to T_{c(1)}M$ induce o aplicaţie $\tau_c : I_{c(0)}M \to I_{c(1)}M$ între indicatoare. Dorim să regăsim funcţia Finsler cu ajutorul indicatoarei varietăţii. Considerăm curba $c(t) = (x^i(t), y^i(t))$. O curbă verticală $c_v(x^i, y^i(t))$ este tangentă la un câmp vectorial $V = V^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ dacă şi numai dacă satisface sistemul $\frac{dy^i}{dt} = V^i$. Adăugând şi condiţiile iniţiale $c_v(0) = (x^i, y^i)$ obţinem curbele verticale. Dacă o curbă este orizontală atunci partea sa verticală este nulă $v(\dot{c}(t)) = 0$. Acem deci că:

$$\dot{c}(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dy^i}{dt}\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{dx^i}{dt}\frac{\delta}{\delta x^i} + \left(\frac{dy^i}{dt} + N^i_j\frac{dx^j}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Rezultă că $c(t)$ este o curbă orizontală dacă şi numai dacă $\frac{dy^i}{dt} + N^i_j\frac{dx^j}{dt} = 0$. Rezolvând sistemul format din ecuaţiile corespunzătoare celor două tipuri de curbe obţinem indicatoarea tangentă a varietăţii Finsler.

1.5 Curbura steag a unei varietăţi Finsler

În această secţiune ne propunem să introducem corespondentul curburii secţionale în geometria Finsler. Curbura Riemann a unei varietăţi Finsler este definită cu ajutorul spray-ului geodezic (1.3.6). Definim:

$$R_y : T_xM \to T_xM,$$

prin

$$R_y(v) = R^i_k(y)v^k\frac{\partial}{\partial x^i}|_x,\ \ v = v^k\frac{\partial}{\partial x^k}|_k.$$

R_y este o transformare liniară binedefinită care satisface: $R_y(y) = 0$ În definiţia de mai sus coeficienţii:

$$R^i_k = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k}y^j - 2G^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

Definiţia 1.5.1. *Cantitatea R definită anterior se numeşte* curbura Riemann.

Aceasta a fost introdusă de către Riemann în 1854 pentru metrici Riemann. Paul Finsler a studiat problema variaţională pentru metrici Finsler. Acesta nu a introdus o noţiune nouă referitoare la curbura metricilor Finsler.
Pentru un plan tangent $P \subset T_xM$, care îl conţine pe y, fie:

$$\kappa(P, y) = \frac{g_y(R_y(u), u)}{g_y(y, y)g_y(u, u) - [g_u(y, u)]^2}.$$

Observăm că $\kappa(P, y)$ este independent de alegerea vectorilor particulari $u \in P$ astfel încât $P = span\{y, u\}$. $\kappa = \kappa(P, y)$ se numeşte *curbură steag*. În dimensiune doi, $P = T_xM$ este planul tangent. Pentru orice metrică Riemanniană, curbura steag $\kappa = \kappa(P)$ se numeşte curbura secţională a secţiunii $P \subset T_xM$.

Definiţia 1.5.2. *Fie F o funcţie Finsler pe o varietate n-dimensională. Spunem că F este de curbură steag scalară dacă $\kappa(P, y) = \kappa(x, y)$ este o funcţie scalară pe T_0M. F are curbură steag izotropă dacă $\kappa(p, y) = \kappa(x)$ este o funcţie scalară pe M. F are curbură steag constantă dacă $\kappa(P, y) =$constant.*

Datorită omogenităţii spray-ului S, informaţiile referitoare la curbură pot fi obţinute şi prin intermediul endomorfismului Jacobi, care este o 1-formă vector valuată definită prin:

$$\Phi = v \circ [S, h] = R^i_j\frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^j.$$

Informaţii importante despre spray pot fi obţinute cu ajutorul scalarului Ricci, $\rho \in C^\infty(T_0M)$, care este dat de:

$$(n - 1)\rho = R^i_i = Tr(\Phi).$$

Definiţia 1.5.3. *Spunem că spray-ul S este izotrop dacă $\exists\rho \in C^\infty(T_0M)$ şi o 1-formă semi-bazică $\alpha = \alpha_i(x,y)dx^i \in \Lambda^1(T_0M)$ astfel încât endomorfismul Jacobi are forma:*

$$\Phi = \rho J - \alpha \otimes C \Leftrightarrow R_i^j = \rho\delta_i^j - \alpha_j y^i, \tag{1.5.1}$$

unde $\rho \in C^\infty(T_0M)$ este scalarul Ricci, iar α o 1-formă din T_0M.

Observaţia 5. *Tensorul de curbură şi endomorfismul Jacobi sunt legaţi prin relaţiile:*

$$R = \frac{1}{3}[J,\Phi] \quad \text{şi} \quad \Phi = i_S R. \tag{1.5.2}$$

Pornind de la relaţia dintre endomorfismul Jacobi şi tensorul de curbură asociat conexiunii neliniare (1.5.2) obţinem următoarea formă pentru tensorul de curbură asociat unei metrici Finsler de curbură steag scalară:

$$R = \frac{1}{3F}d_J(\kappa F^3) \wedge J - d_J\left(\frac{1}{3F}d_J(\kappa F^3)\right) \otimes \mathcal{C}. \tag{1.5.3}$$

Mai mult, dacă funcţia cu care lucrăm este de curbură steag constantă, tensorul de curbură are o formă mai simplă:

$$R = \kappa F d_J F \wedge J. \tag{1.5.4}$$

Local, pentru spaţii Finsler de curbură constantă avem:

$$R^i_{jl} = \kappa\left(g_{sl}\delta^i_j - g_{sj}\delta^i_l\right) y^s. \tag{1.5.5}$$

Observaţia 6. *Este cunoscut faptul că spray-urile 2-dimensionale sunt izotrope, deci endomorfismul Jacobi asociat acestora este dat de formula (1.5.1), unde :*

$$\alpha_1 = \frac{R_2^2}{y^1} = \frac{-R_1^2}{y^2}, \ \alpha_2 = \frac{R_1^1}{y^2} = \frac{-R_2^1}{y^1}.$$

Definiţia 1.5.4. *Considerăm F o funcţie Finsler şi Φ endomorfismul Jacobi al spray-ului sau geodezic: F este de curbură steag contantă dacă $\exists\kappa \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\Phi = \kappa(F^2J - Fd_JF \otimes C)$.*

Inspiraţi de relaţia dintre tensorul de curbură R şi endomorfosmul Jacobi Φ, în [5] am introdus o nouă condiţie pentru caracterizarea isotropiei unui spray utilizând tensorul de curbură asociat conexiunii neliniare.

Lema 1.5.5. *Un spray S este isotrop dacă şi numai dacă există o 1-formă semi-bazică $\xi \in \Lambda^1(T_0M)$ astfel încât tensorul de curbură R este exprimat*

$$R = \xi \wedge J - d_J\xi \otimes \mathcal{C}, \tag{1.5.6}$$

unde

$$\xi = \frac{1}{3}\left(\alpha + d_J\rho\right). \tag{1.5.7}$$

Un rezultat important în geometria Riemanniană este furnizat de Lema lui Schur. Există a variantă a acestui rezultat, valabil în context Finsler (se întăreşte ipoteza cerând independenţa de “flagpole” a curburii steag), [23].

Lema 1.5.6. *(Lema lui Schur) Fie (M,F) o varietate Finsler isotropă de $dimM \geq 3$ şi $d_J\kappa = 0$, unde κ reprezintă curbura steag a varietăţii. Atunci κ este constantă.*

1.6 Spray-uri proiectiv echivalente. Problema a patra a lui Hilbert.

O reparametrizare a sistemului

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx^i}{dt}\right) = 0,$$

$t \to \bar{t}(t)$ care păstrează orientarea ne conduce la existenţa unui nou spray geodezic: $\bar{S} = S - 2P\mathcal{C}$.
Funcţia scalară $P \in C^\infty(M)$ este unu omogenă şi este legată de noul parametru prin:

$$\frac{d^2\bar{t}}{dt^2} = P\left(x^i(t), \frac{dx^i}{dt}\right)\frac{d\bar{t}}{dt}, \ \frac{d\bar{t}}{dt} > 0. \tag{1.6.1}$$

Definiţia 1.6.1. *Un spray este proiectiv metrizabil dacă este proiectiv echivalent cu spray-ul geodezic al unei funcţii Finsler.*

Echivalent, un spray este proiectiv metrizabil dacă geodezicele sale conincid cu geodezicele unei funcţii Finsler, până la o reparametrizare ce păstrează orientarea.

Definiţia 1.6.2. *Două spray-uri sunt proiectiv echivalente dacă geodezicele lor coincid până la o reparametrizare ce păstrează orientarea. $\bar{S}$ se numeşte deformarea proiectivă a spray-ului S. Ne referim la aplicaţia $S \to \bar{S} = S - 2P\mathcal{C}$ ca la defomarea proiectivă a spray-ului S.*

Cazul regulat al problemei a patra a lui Hilbert constă în caracterizarea tuturor metricilor Finsler de pe o submulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$ a căror geodezice (neparametrizate) sunt linii drepte. Aceste metrici se numesc metrici Finsler proiectiv plate. Potrivit lui G. Hammel, o metrică Finsler $F = F(x, y)$ pe Ω este proiectiv plată dacă şi numai dacă satisface:

$$F_{x^k y^i} y^k = F_{x^i}. \tag{1.6.2}$$

Una dintre problemele importante în geometria Finsler este să găsim soluţiile aferente ecuaţiei (1.6.2). Conform teoremei lui Beltrami dacă o metrică Riemanniană $F = \sqrt{g_{ij}(x)y^iy^j}$, satisface (1.6.2) atunci aceasta are curbură secţională constantă. Reciproc, orice metrică Riemannină a cărei curbură secţională este μ este local izometrică cu metrica: $\alpha = \frac{\sqrt{|y|^2+\mu(|x|^2|y|^2-<x,y>^2)}}{1+\mu|x|^2}$.

Acum considerăm deformarea spray-ului plat $S = S_0 - 2P\mathcal{C}$, unde $S_0 = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Spray-ul S este Finsler metrizabil dacă există o funcţie F care satisface următorul sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} d_h F^2 = 0 \\ \mathcal{L}_{\mathcal{C}} F^2 - 2F^2 = 0, \end{cases}$$

unde $h = h_0 - PJ - d_JP \otimes \mathcal{C}$. O funcţie 1-omogenă care satisface ecuaţia Euler Lagrange $\delta_S L = d_J \mathcal{L}_S L - 2d_h L = 0$ se numeşte *funcţie Hamel* pentru spray-ul dat.
Un spray S este Finsler metrizabil dacă satisface ecuaţia Euler Lagrange $\delta_S F^2 = 0$, ecuaţie ce poate fi rescrisă sub forma, [9]: Prin urmare, o metrică Finsler este proiectiv plată dacă şi numai dacă satisface ecuaţia

$$\delta_{S_0} F = 0, \tag{1.6.3}$$

unde S_0 este spray-ul plat.

Tensori proiectiv invarianţi

Aşa cum am menţionat anterior, în geometria Finsler există o parte importantă care se ocupă cu studiul deformărilor proiective. Această parte este reprezentată de doi tensori importanţi tensorul Weyl, [25, 31] şi tensorul Douglas [16, 17]. Aceşti tensori conţin informaţii referitoare la proprietăţile metricilor Finsler care sunt supuse unor deformări proiective.

Weyl curvature tensor

În [42], Weyl a introdus un invariant proiectiv pentru metrici Riemann. Tensorul proiectiv Weyl în cazul Riemannian se exprimă astfel:

$$W^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{1}{n-1}\left(Ric_{jl}\delta^i_k - Ric_{jk}\delta^i_l\right), \tag{1.6.4}$$

unde $Ric_{ij} = R^l_{ilj}$ este tesnorul Ricci. În [16] Douglas a extrins tensorul proiectiv Weyl din contexul Riemannian la cel Finslerian. Tensorul Weyl clasic din geometria Finsler este o cantitate importantă care caracterizează metricile Finsler de curbură steag scalară. Mai mult, acest tensor este proiectiv invariant şi este definit prin

$$W^i_j = R^i_j - \frac{1}{n-1}R^l_l\delta^i_j - \frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial y^m}\left(R^m_j - \frac{1}{n-1}R^l_l\delta^m_j\right)y^i. \tag{1.6.5}$$

Capitolul 2

Metrizabilitate Finsler şi integrabilitate Frobenius

Ne propunem să oferim o soluţie constructivă în cazul problemei metrizabilităţii Finsler din cazul neplat 2-dimensional. Pentru un spray 2-dimensional neplat asociem două structuri geometrice care conţin infomaţii despre metrizabilitatea spray-ului. În cazul în care acesta este metrizabil putem obţine metrica Finsler. Una dintre aceste structuri este o distribuţie regulată 3-dimensională, numită distribuţia Berwald, a cărei integrabilitate ne oferă un posibil canditat pentru funcţia Finsler căutată. A două structură este o 2-formă, al cărei rang ne oferă informaţii despre regularitatea metricii Finsler. Obiectul pe care se bazează rezultatele obţinute este reperul Berwald asociat unui spray dat. Deci vom reformula problema metrizabilităţii Finsler cu ajutorul unei serii de proprietăţi asociate reperului Berwald.
Pentru spray-ul geodezic al unei funcţii Finsler putem construi mereu o distribuţie integrabilă, transversă câmpului vectorial Liouville care să fie tangentă la indicatoarea funcţiei Finsler. Ne vom centra atenţia acum asupra spray-urilor neplate. Această presupunere implică faptul că endomorfismul Jacobi nu se anulează, ceea ce este echivalent cu faptul că $\alpha \neq 0$, deci $\rho \neq 0$.
Pentru un spray S, faptul că acesta este neplat implică regularitatea distribuţiei 3-dimensionale $\mathcal{D} = Im\{h\} \oplus Im\{\Phi\}$. Vom numi această distribuţie **distribuţia Berwald**.
Pentru un spray izotrop a căruit endomorfism Jacobi este dat de formula (1.5.1), considerăm următoarea 2-formă:

$$\Omega = d\left(\frac{\alpha}{\rho}\right) + 2i_{\mathbb{F}}\frac{\alpha}{\rho} \wedge \frac{\alpha}{\rho}.$$

În cazul metrizabilităţii, rangul 2-formei Ω ne oferă informaţii despre regularitatea metricii.

2.1 Reperul Berwald. Distribuţia Berwald

Într-una din lucrările sale din anul 1941 Berwald construieşte un reper canonic pe T_0M asociat unui spaţiu Finsler 2-dimensional. El a utilizat acest reper pentru a caracteriza spaţiile Finsler 2-dimensionale plate şi pentru a realiza o clasificare a acestora. În cele ce urmează vom arăta că un astfel de reper, pe care îl vom numi reper Berwald, poate fi asociat oricărui spray 2-dimensional neplat. Am demonstrat că spray-ul este metrizabil dacă şi numai dacă reperul Berwald este integrabil şi 2-forma Ω satisface nişte condiţii de regularitate.
Prezentăm acum modalitatea prin care am construit reperul Berwald:
Considerăm $H \in \mathfrak{X}(T_0M)$ un câmp vectorial care satisface următoarele condiţii:

$$[\mathcal{C}, H] = H,\ h(H) = H,\ \alpha(H) = 0. \tag{2.1.1}$$

Primele două condiţii ne evidenţiază faptul că H este un câmp orizontal 2-omogen. Ultima condiţie din seria precedentă este echivalentă cu $\phi(H) = \rho JH$ şi însemnă că H este un vector propriu corespunzător

valorii proprii nevide ρ.
Condiţiile (2.1.1) nu determină în mod unic câmpul vectorial H. Pot exista mai multe astfel de câmpuri vectoriale, însă sunt legate printr-o funcţie 0-omogenă. Putem fixa un astfel de vector dacă cerem ca $\{S, H\}$ să fie compatibilă cu o orientare fixată a lui M. Deoarece $\alpha(S) = \rho \neq 0$, obţinem că H şi S sunt două câmpuri vectoriale liniar independente care generează distribuţia orizontală. De aici rezultă că $V := JH$ şi $\mathcal{C} := JS$ sunt două câmpuri vectoriale liniar independente care generează distribuţia verticală. În consecinţă $\{H, S, V, \mathcal{C}\}$ este un reper pe T_0M numit reperul Berwald. În lucrarea ”Introducere în geometria Riemann-Finsler” de Bao, Chern aceştia au demonstrat că doar primele trei câmpuri vectoriale sunt necesare pentru a construi un reper pentru fibratul proiectiv, chiar dacă reperul este construit utilizând o metrică Finsler 2-dimensională.

Lema 2.1.1. *Considerăm S un spray şi $\{H, S, V, \mathbb{C}\}$ un reper Berwald fixat.*

i) Reperul Berwald satisface următoarele formule:

$$[\mathbb{C}, V] = 0, \quad [S, H] = \nabla H + \rho V, \quad [S, V] = -H + \nabla V. \tag{2.1.2}$$

ii) Rangul 2-formei Ω, este dat prin:

$$\mathrm{rank}(\Omega) = \begin{cases} 4, & \textit{dacă } \alpha\left([H, V]\right) \neq 0; \\ 2, & \textit{dacă } \ \alpha\left([H, V]\right) = 0. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

2.2 Reperul Berwald pentru o funcţie FInsler

Observaţia 7. *Considerăm S spray-ul geodezic al unei funcţii (degenerate) Finsler F şi Γ conexiunea indusă de spray-ul S. 2-forma Hilbert asociată funcţiei F poate fi descrisă, în raport cu conexiunea Γ după cum urmează :*

$$\omega_{F^2} = 2g_{ij}dx^i \wedge \delta y^j. \tag{2.2.1}$$

Dacă S este spray-ul geodezic al unei funcţii Finsler atunci utilizăm metrica G definită anterior pentru a construi distribuţia care este ortogonală câmpului vectorial Liouville. Integrabilitatea acestei distribuţii a fost arătată în [3].

Considerăm spray-ul geodezic al unei funcţii Finsler F. Pentru acest spray vom considera reperul Berwald determinat de condiţiile precedente, la care vom adăuga condiţia suplimentară ca H şi S să aibă aceeaşi lungime, adică:

$$G(H, H) = G(S, S) = F^2. \tag{2.2.2}$$

Observaţia 8. *Dacă înlocuim H cu aH, o altă soluţie pentru (4.4.6), unde $a \in C^\infty(M)$ este o funcţie 0-omeogenă nevidă, atunci $\alpha[aH, aV] = a^2\alpha([H, V])$, Prin urmare condiţia de regularitate $\alpha[H, V]) \neq 0$ nu depinde de modul în care alegem reperul Berwald.*

Prezentăm în continuare ce se întâmplă în cazul spray-urilor regulate, respectiv degenerate.

Lema 2.2.1. *Considerăm S spray-ul geodezic al unei funcţii Finsler F şi $\{S, H, \mathbb{C}, V\}$ reperul Berwald asociat.*

i) Reperul Berwald satisface următoarele formule:

$$\begin{aligned} &H(F^2) = 0, \quad V(F^2) = 0, \quad \nabla H = 0, \quad \nabla V = 0, \\ &[S, H] = \rho V, \quad [S, V] = -H, \quad [H, V] = S + IH + S(I)V. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

ii) Spray-ul geodezic este regulat.

Lema 2.2.2. *Considerăm S spray-ul geodezic al unei funcţii Finsler degenerate F şi $\{S, H, V, \mathbb{C}\}$ reperul Berwald.*

i) Reperul Berwald satisface formulele:

$$\begin{aligned} &H(F^2) = 0, \quad V(F^2) = 0, \quad \alpha(\nabla H) = 0, \quad d_v F(\nabla V) = 0, \\ &\alpha([S, H]) = d_v F([S, H]) = 0, \quad \alpha([S, V]) = d_v F([S, V]) = 0, \\ &\alpha([H, V]) = d_v F([H, V]) = 0. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

ii) Spray-ul geodezic este degenerat.

Cele trei formule de comutare prezentate mai sus au fost obţinute de către Berwald. Funcţia I reprezintă scalarul principal al unei funcţii Finsler. În cazul metricilor Riemann, scalarul principal este egal cu zero.

2.3 Integrabilitatea distribuţiei Berwald şi metrizabilitate Finsler

Introducem acum rezultate princiale ale acestui capitol. Acestea constau într-o caracterizare a metrizabilităţii Finsler pentru spray-uri împreună cu un algoritm care poate fi utiliat pentru a construi efectiv funcţia Finsler care metricizează spray-ul.

Teorema 2.3.1. *Considerăm S, un spray 2-dimensional neplat. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

i) S este Finsler metrizabil;

ii) Spray-ul S este regulat şi distribuţia Berwald $\{\mathcal{D}\}$ este integrabilă.

iii) Există o 1-formă închisă $\omega \in \mathcal{D}^*$ astfel încât.

$$\operatorname{rang}(d_J\omega + 2\omega \wedge i_J\omega) = 4. \tag{2.3.1}$$

Acelaşi set de concluzii poate fi obţinut şi în cazul spray-urilor degenerate.

Teorema 2.3.2. *Considerăm S, un spray 2-dimensional neplat. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

i) S este Finsler metrizabil;

ii) Spray-ul S este degenerat şi distribuţia Berwald $\{\mathcal{D}\}$ este integrabilă.

iii) Există o 1-formă închisă $\omega \in \mathcal{D}^*$ astfel încât.

$$\operatorname{rang}(d_J\omega + 2\omega \wedge i_J\omega) = 2. \tag{2.3.2}$$

2.3.1 Exemple

Spray metrizabil

Pe $M = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2, x^2 > 0\}$ cosiderăm următorul sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare :

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} - \frac{2}{x^2}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x^2}{dt^2} + \frac{1}{x^2}\left(\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2\right) = 0. \tag{2.3.3}$$

Coeficienţii conexiunii neliniare sunt:

$$N_1^1 = -\frac{y^2}{x^2}, \quad N_2^1 = -\frac{y^1}{x^2}, \quad N_1^2 = \frac{y^1}{x^2}, \quad N_2^2 = -\frac{y^2}{x^2}. \tag{2.3.4}$$

Componentele locale ale endomorfismului Jacobi sunt următoarele:

$$R_1^1 = -\frac{(y^2)^2}{(x^2)^2}, \quad R_2^1 = R_1^2 = \frac{y^1 y^2}{(x^2)^2}, \quad R_2^2 = -\frac{(y^1)^2}{(x^2)^2}.$$

Spray-ul S este izotrop, deci cele două componente ale 1-formei semi-bazice α şi scalarul Ricci sunt date prin:

$$\alpha_1 = \frac{R_2^2}{y^1} = -\frac{y^1}{(x^2)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{R_1^1}{y^2} = -\frac{y^2}{(x^2)^2}, \quad \rho = R_1^1 + R_2^2 = -\frac{1}{(x^2)^2}\{(y^1)^2 + (y^2)^2\}.$$

Vom testa mai întâi metrizabilitatea spray-ului utilizând a treia caracterizare din teoremă. Toate informaţiile despre spray le putem regăsi cu ajutorul 1-formei:

$$\omega = i_{\mathbb{F}}\frac{\alpha}{\rho} = \frac{\alpha_1}{\rho}\delta y^1 + \frac{\alpha_2}{\rho}\delta y^2 = \frac{y^1 dy^1 + y^2 dy^2}{(y^1)^2 + (y^2)^2} - \frac{1}{x^2}dx^2.$$

Avem că:

$$\Omega = \frac{-1}{(y^1)^2 + (y^2)^2}\left(dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2\right),$$

Din relaţia precedentă observăm că rang$(\Omega) = 4$, deci S este spray regulat.
Mai mult, $d\omega = 0$ de unde rezultă, utilizând o lemă de tip Poincare, că $\omega = df$, pentru

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\ln\left((y^1)^2 + (y^2)^2\right) - \ln(x^2).$$

În concluzie, funcţia Finsler care metricizează spray-ul S este:

$$F(x, y) = \exp(f(x, y)) = \frac{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}}{x^2}, \tag{2.3.5}$$

Acum vom verifica metrizabilitatea spray-ului S utilizând a doua caracterizare din teoremă enunţată. Considerăm $H \in \mathfrak{X}(T_0M)$ un câmp vectorial care satisface $[\mathcal{C}, H] = H,\ h(H) = H,\ \alpha(H) = 0$. Rezolvând sistemul format din ecuaţiile de mai sus obţinem mai multe soluţii pentru câmpul vectorial H. Toate aceste soluţii pot fi legate între ele utilizând o funcţie 0-omogenă. Dacă ne fixăm o orientare putem alege ca acest câmp vectorial să fie $H = -y^2\delta/\delta x^1 + y^1\delta/\delta x^2$. Prin urmare reperul Berwald $\{H,\ S,\ V = JH\}$ generează distribuţia Berwald $\mathcal{D}$. Din următoarele paranteze Lie se poate observa direct că distribuţia $\mathcal{D}$ este integrabilă, întrucât niciuna dintre parantezele de mai jos nu conţine câmpul vectorial Liouville.

$$[H, V] = S, \quad [S, V] = -H, \quad [S, H] = \rho V.$$

Dorim acum să găsim varietatea integrală IM la ditribuţia Berwald $\mathcal{D} = \mathrm{Im}(h) \oplus \mathrm{Im}(\Phi)$. Vom căuta această varietate utilizând faptul că ea conţine toate curbele orizontale şi curbele tangente câmpului vectorial V. O curbă verticală $c_v(t) = (x^i, y^i(t))$ este tangentă la câmpul vectorial V dacă şi numai dacă satisface sistemul:

$$\frac{dy^1}{dt} = -y^2, \quad \frac{dy^2}{dt} = -y^1.$$

Impunând codiţiile iniţiale $c_v(0) = (x^i, y^i)$, obţinem că curba $c_v(t) = (x^1, x^2, y^1 \cos t - y^2 \sin t, y^1 \sin t - y^2 \cos t)$ aparţine familiei de hipersuprafeţe:

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 = f(x^1, x^2), \tag{2.3.6}$$

pentru nişte funcţii f arbitrare de pe varietatea bază. Vom restricţiona familia de hipersuprafeţe (2.3.6) cerând ca acestea să conţină şi curbe orizontale. O curbă $c_h(t) = (x^i(t), y^i(t))$ este orizontală dacă şi numai dacă $v(\dot{c_h}(t)) = 0$, deci dacă satisface următorul sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + N^i_j \frac{dx^j}{dt} = 0. \tag{2.3.7}$$

Pentru conexiunea neliniară (2.3.4), sistemul (2.3.7) devine:

$$\frac{dy^1}{dt} - \left(\frac{y^2}{x^2}\frac{dx^1}{dt} + \frac{y^1}{x^2}\frac{dx^2}{dt}\right) = 0, \quad \frac{dy^2}{dt} + \frac{y^1}{x^2}\frac{dx^1}{dt} - \frac{y^2}{x^2}\frac{dx^2}{dt} = 0.$$

Vom înmulţi prima ecuaţie cu y^1 şi a două ecuaţie cu y^2, le vom aduna şi obţinem:

$$y^1\frac{dy^1}{dt} + y^2\frac{dy^2}{dt} - \frac{1}{x^2}\left((y^1)^2 + (y^2)^2\right)\frac{dx^2}{dt} = 0.$$

Ultima ecuaţie poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{d}{dt}\left((y^1)^2 + (y^2)^2\right) - \frac{2}{x^2}\left((y^1)^2 + (y^2)^2\right)\frac{dx^2}{dt} = 0. \tag{2.3.8}$$

Curbele orizontale obţinute trebuie să aparţină familiei de hipersuprafeţe (2.3.6). Deci dacă vom înlocui ecuaţiile (2.3.6) în (2.3.8) obţinem:

$$\frac{d}{dt}\left(f(x^1, x^2)\right) - \frac{2}{x^2}f(x^1, x^2)\frac{dx^2}{dt} = 0,$$

care implică $f(x^1, x^2) = c(x^2)^2$. Prin urmare varietatea integrală a distribuţiei Berwald $\mathcal{D}$ este dată prin:

$$IM = \{(x^i, y^i) \in TM, \frac{1}{(x^2)^2}\left((y^1)^2 + (y^2)^2\right) = c\},$$

care reprezintă indicatoarea metricii Poincaré (2.3.5).

Spray degenerat

Pe $M = \mathbb{R}^2$ considerăm următorul sistem de ecuaţii:

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} + \frac{x^2}{1 + (x^2)^2}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x^2}{dt} = 0. \tag{2.3.9}$$

Coeficienţii conexiunii neliniare sunt următorii:

$$N^1_1 = \frac{x^2y^2}{2(1 + (x^2)^2)}, \; N^1_2 = \frac{x^2y^1}{2(1 + (x^2)^2)}, \; N^2_1 = N^2_2 = 0. \tag{2.3.10}$$

Componentele endomorfismului Jacobi şi scalarul Ricii sunt dati de:

$$R^1_1 = \frac{(y^2)^2[(x^2)^2 - 2]}{4[(x^2)^2 + 1]^2}, \quad R^2_2 = 0, \quad \rho = \frac{(y^2)^2[(x^2)^2 - 2]}{4[(x^2)^2 + 1]^2}.$$

1 forma semi-bazică $\alpha/\rho = \alpha_1/\rho dx^1 + \alpha_2/\rho dx^2$ are componentele:

$$\frac{\alpha_1}{\rho} = \frac{R_2^2}{y^1\rho} = 0, \quad \frac{\alpha_2}{\rho} = \frac{R_1^1}{y^2\rho} = \frac{1}{y^2}.$$

Informaţiile despre metrizabilitatea spray-ului le putem obţine din 1-forma:

$$\omega = i_{\mathbb{F}}\frac{\alpha}{\rho} = \frac{\alpha_1}{\rho}\delta y^1 + \frac{\alpha_2}{\rho}\delta y^2 = \frac{1}{y^2}dy^2.$$

Rezultă că:

$$\Omega = \frac{-1}{(y^2)^2}dx^2 \wedge dy^2,$$

de unde rang $(\Omega) = 2$ şi spray-ul S este degenerat. Observăm că $d\omega = 0$, unde $f(x,y) = \ln|y^2|$, deci funcţia F care metricizează spray-ul este $F(x,y) = \exp(f(x,y)) = |y^2|$. Vom testa metriabilitatea spray-ului (2.3.9) utilizând a doua caracterizare din teoremă. Vom construi baza Berwald asociată acestui sistem. Dacă aleagem $H = -y^2\frac{\delta}{\delta x^1}$, croşetele Lie ce vor alcătui distribuţia Berwald sunt următoarele:

$$[H,V] = 0, \quad [S,V] = -H + \frac{y^2x^2}{2(1+(x^2)^2)}V, \quad [S,H] = \frac{y^2x^2}{2(1+(x^2)^2)}H + \rho V.$$

Rezultă că distribuţia Berwald este integrabilă, deci S metrizabil de o funcţie Finsler degenerată. Dacă calculăm varietatea integrală a distribuţii Berwald vom obţine:

$$IM = \{(x^1,x^2,y^1,y^2) \in TM, y^2 = c\},$$

care reprezintă indicatoarea funcţiei $F(x,y) = y^2$.

Spray nemetrizabil

Prezentăm un exemplu de spray propus de Elgendi şi Muzsnay în [18] a cărui grad de metrizabilitate este 0. Vom demonstra că aces spray nu este Finsler metrizabil utilizând diferite tehnici prezentate în Teorema 2.3.1. Pe $M = \{(x^1,x^2) \in \mathbb{R}^2, x^2 > 0\}$, considerăm spray-ul

$$S = y^1\frac{\partial}{\partial x^1} + y^2\frac{\partial}{\partial x^2} - 2\left(\varphi y^1 + \frac{y^1y^2}{2x^2}\right)\frac{\partial}{\partial y^1} - 2\left(\varphi y^2 - \frac{(y^1)^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y^2},$$

unde $\varphi = (x^2(y^1)^2 + (y^2)^2)^{1/2}$. Coeficienţii conexiunii neliniare sunt:

$$N_1^1 = \frac{y^2}{2x^2} + \varphi + \frac{x^2(y^1)^2}{\varphi}, \ N_2^1 = \frac{y^1}{2x^2} + \frac{y^1y^2}{\varphi}, \ N_1^2 = -\frac{y^1}{2} + \frac{x^2y^1y^2}{\varphi}, \ N_2^2 = \varphi + \frac{(y^2)^2}{\varphi},$$

Componentele locale corespunzătoare endomorfismului Jacobi şi scalarul Ricci sunt:

$$R_1^1 = -\frac{(y^2)^2[4(x^2)^2+1]}{4(x^2)^2}, \ R_2^2 = -\frac{(y^1)^2[4(x^2)^2+1]}{4(x^2)^2}, \ \rho = -((y^1)^2+(y^2)^2)\frac{[4(x^2)^2+1]}{4(x^2)^2}.$$

Spray-ul S este izotrop şi 1-forma semi-bazică $\alpha/\rho = \alpha_1/\rho dx^1 + \alpha_2/\rho dx^2$ are componentele:

$$\frac{\alpha_1}{\rho} = -\frac{y^1}{(y^1)^2+(y^2)^2}, \quad \frac{\alpha_2}{\rho} = -\frac{y^2}{(y^1)^2+(y^2)^2}.$$

Având componentele pentru α/ρ calculăm 1-forma:

$$\omega = i_{\mathbb{F}}\frac{\alpha}{\rho} = \frac{\alpha_1}{\rho}\delta y^1 + \frac{\alpha_2}{\rho}\delta y^2.$$

În formula precedentă înlocuim: $\delta y^i = dy^i + N^i_j dx^j$ pentru a obţine

$$\omega = -\frac{1}{(y^1)^2+(y^2)^2}\left(y^1dy^1 + y^2dy^2 + \left(\frac{y^1y^2}{2x^2} + y^1\varphi + \frac{x^2(y^1)^3}{\varphi} - \frac{y^1y^2}{2} + \frac{x^2y^1(y^2)^2}{\varphi}\right)dx^1 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{(y^1)^2}{2x^2} + \frac{(y^1)^2y^2}{\varphi} + y^2\varphi + \frac{(y^2)^3}{\varphi}\right)dx^2\right).$$

Printr-un calcul direct se observă că $d\omega \neq 0$ şi din Teorema 2.3.1 putem concluziona că spray-ul analizat nu este metrizabil. Putem ajunge la aceeaşi concluzie utilizând reperul Berwald. Pentru un spray dat S, căutăm un câmp vectorial orizontal care să satisfcă condiţiile menţionate pentru construirea reperului Berwald.
Prezenţa câmpului vectorial Liouville ne oferă informaţia că distribuţia $\mathcal{D} = \mathrm{span}\{H, S, V\}$ nu este integrabilă şi deci S nu este Finsler metrizabil.

2.4 Caracterizare pentru metricile de curbură constantă

În ultima parte a acestui capitol ne propunem să oferim o demonstraţie diferită pentru rezultatul găsit în [5], privind metricile de curbură constantă, utilizând de această dată reperul Berwald. Ne vom axa pe cazul 2-dimensional ţinând cont de faptul că în acest caz condiţia de izotropie este automat satisfăcută.
Considerăm reperul Berwald $\{S, H, V := JH, \mathcal{C}\}$. Pentru $\xi := \frac{1}{3}(d_J\rho + \alpha)$, avem următoarele componente în raport cu reperul mai sus menţionat:

- $\xi(S) = \frac{1}{3}(\alpha + d_J\rho)(S) = \frac{1}{3}(\alpha(S) + d_J\rho(S)) = \frac{1}{3}(\rho + \mathcal{C}(\rho)) = \frac{1}{3}(3\rho) = \rho$
- $\xi(H) = \frac{1}{3}(\alpha + d_J\rho)(H) = \frac{1}{3}(\alpha(H) + d_J\rho(H)) = \frac{1}{3}(0 + d\rho(JH)) = \frac{1}{3}V(\rho)$
- $\xi(V) = \frac{1}{3}(\alpha + d_J\rho)(V) = \frac{1}{3}(\alpha(V) + d_J\rho(V)) = \frac{1}{3}(0 + d\rho(JV)) = 0$
- $\xi(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}(\alpha + d_J\rho)(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}(\alpha(\mathcal{C}) + d_J\rho(\mathcal{C})) = \frac{1}{3}(0 + d\rho(J\mathcal{C})) = 0$

Formulăm astfel următorul rezultat de caracterizare a metricilor de curbură constantă de pe o varietate 2-dimensională.

Teorema 2.4.1. *[5] Considerăm F o metrică Finsler pe o varietate 2-dimensională şi ξ, 1-forma semibazică definită în (1.5.7). Atunci F are curbură constantă dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt satifăcute:*

C_1) $d_h\xi = 0$,

C_2) $d_J\xi = 0$.

Capitolul 3

Deformări proiective de spaţii Finsler

În acest capitol vom prezenta o serie de caracterizări noi pentru metrici Finsler de curbură constantă. Pentru obţinerea acestor caracterizări a fost necesară introducerea de noi cantităţi. Aşadar, în primă instanţă am introdus doi tensori noi, pe care i-am numit tensori de tip Weyl, [6, 5]. În geometria Finsler exista deja un tensor de tip Weyl, doar ca aceasta caracterizează metricile Finlser de curbură scalară (nu neaparat constantă).

3.1 Caracterizare a metrizabilităţii proiective

În această secţiune oferim o caracterizare nouă pentru problema metrizabilităţii Finsler descrisă în primul capitol. Există o serie de caracterizări pentru echivalnţa a două metrici Finsler/ spray-uri geodezice,[39, §9.2.3]. În cele ce urmează vom prezenta o teoremă de caracterizare a metricilor Finsler proiectiv echivalente cu un spray dat.

Teorema 3.1.1. *[6] Considerăm S un spray geodezic şi o funcţie Finsler $\widetilde{F}$. Următoarele relaţii sunt echivalente:*

$PM_1)$ $\delta_S\widetilde{F} = 0$,

$PM_2)$ $d_h\widetilde{F} = d_J(P\widetilde{F})$,

$PM_3)$ $\delta_S\widetilde{F}^2 = 2Pd_J\widetilde{F}^2$,

$PM_4)$ $d_h d_J\widetilde{F}^2 = d_J P \wedge d_J\widetilde{F}^2$ *şi* $S\widetilde{F} = 2P\widetilde{F}$.

3.2 Noi tensori de tip Weyl pentru geometria Finsler

3.2.1 Tensorul de curbură de tip Weyl W_0

Considerăm S un spray şi Φ endomirfismul Jacobi asociat. Inspiraţi de rezultatele obţinute în [8] definim următorul tensor de tip Weyl

$$W_0 = \Phi - \frac{1}{n-1}\left(\mathrm{Tr}\,\Phi\right)J + \frac{1}{2(n-1)}d_J\left(\mathrm{Tr}\,\Phi\right)\otimes\mathcal{C}. \tag{3.2.1}$$

Tensorul introdus anterior a fost utilizat în [22, (1.20)] pentru a caracteriza spray-urile de curbură scalară care nu depind de coordonata fibră. În coordonate locale, tensorul de curbură de tip Weyl, (3.2.1) se exprimă astfel:

$$W_0 = W^i_{0j}\frac{\partial}{\partial y^i}\otimes dx^j, \tag{3.2.2}$$

În relaţia precedentă coeficienţii lui W^i_{0j} sunt

$$W^i_{0j} = R^i_j - \frac{1}{n-1} R^l_l \delta^i_j + \frac{1}{2(n-1)} \frac{\partial R^l_l}{\partial y^j} y^i. \tag{3.2.3}$$

Propoziţia 3.2.1. *Considerăm W_0 tensorul de tip Weyl definit anterior. Atunci acesta satisface:*

1. $\mathrm{Tr}(W_0) = 0$,
2. $W_0(S) = 0$.

Dacă spray-ul S este afin, adică este spray-ul corespunzător unei metrici Riemann, tensorul de tip Weyl poate fi rescris sub următoarea formă:

$$W_0 = W^i_{jkl}(x) y^j y^l \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^k, \tag{3.2.4}$$

unde W^i_{jkl} este chiar tensorul proiectiv Weyl din cazul Riemannian, (1.6.4). Putem să formulăm următorul rezultat de caracterizre a metricilor Finsler de curbură steag constantă de pe o varietate de dimensiune ≥ 3.

Teorema 3.2.2. *[6] O metrică Finsler este de curbură constantă dacă şi numai dacă tensorul de tip Weyl* (3.2.1) *se anulează.*

În cele ce urmează formulăm un rezultat care descrie legătura dintre tensorul de tip Weyl (3.2.1) şi tensorul Weyl clasic din geometria Finsler, (1.6.5) pe o varietate de dimensiune mai mare sau egală decât trei.

Teorema 3.2.3. *[6] Pentru o metrică Finsler următoarele condiţii sunt echivalente:*

1. *F are curbură steag constantă,*
2. *F este de curbură scalară şi tensorii de tip Weyl* (1.6.5) *şi* (3.2.2) *conincid.*

Observaţia 9. *Pentru demonstraţia teoremei enunţate anterior au fost folosite relaţiile de definiţie introduse pentru tensorii implicaţi precum şi varianta Finsleriană a lemei lui Schur.*

În cele ce urmează utilizăm rezultatul din Teorema 3.2.2 pentru a recupera o caracterizare a curburii metricilor Finsler care pot fi reduse la metrici Riemann Aceste metrici sunt caracterizate de anularea tensorului proiectv Weyl (1.6.4).

Corolarul 3.2.4. *[6] O metrică Riemann are curbură secţională constantă dacă şi numai dacă tensorul de tip Weyl* (3.2.4) *se anulează.*

Observaţia 10. *Pentru demonstraţie a fost folosită echivalenţa dintre noţiunea de curbură steag constantă şi curbură secţională constantă pentru metricile Finsler care pot fi reduse la metrici Riemann.*

3.2.2 Tensorul de curbură de tip Weyl W_1

În această secţiune vom porni de la tensorul de tip Weyl introdus in secţiunea anterioară şi vom defini un nou tensor de tip Weyl inspirat de relaţia dintre tensorul de curbură asociat conexiunii neliniare şi endomorfismul Jacobi. Mai mult, vom oferi o teoremă de caracterizare a metricilor Finsler de curbură constantă aflate pe o varietate Finsler 2-dimensională.
Considerăm S un spray geodezic cu endomorfismul Jacobi asociat Φ şi tensorul de tip Weyl corecspunzător

(3.2.1). Inspiraţi de (1.5.2) şi de tehnicile utilizate în [39, §8.3] utilizăm tensorul de tip Weyl (3.2.1) pentru a introduce următorul tensor:

$$3W_1 \quad = \quad [J, W_0] = 3R - \frac{3}{2(n-1)} d_J\,(\mathrm{Tr}\,\Phi) \wedge J.$$

Prin urmare, pentru un spray S cu endomorfismul Φ şi tensorul de curbură R definim al doilea tensor de tip Weyl prin:

$$W_1 = R - \frac{1}{2(n-1)} d_J\,(\mathrm{Tr}\,\Phi) \wedge J. \tag{3.2.5}$$

Ţinând cont de modalitatea de definire a noului tensor, putem formula următorul rezultat de caracterizare a metricilor de curbură constantă.

Teorema 3.2.5. *[14] O metrică Finsler pe o variatete de dimensiune mai mare sau egală decât* 3 *are curbură steag constantă dacă şi numai dacă tensorul de tip Weyl* (3.2.5) *se anulează.*

În cazul 2-dimensional Lema lui Schur nu poate fi aplicată, prin urmare suntem forţaţi să adăugăm o condiţie suplimentară pentru a obţine o caracterizare pentru metricile de curbura constantă în acest caz. Deoarece condiţia de izotropie este automat satisfăcută în cazul 2-dimensional vom utiliza 1-forma semi-bazică care intervine în expresia endomorfismului Jacobi din cazul izotrop. Putem formula deci unmătorul rezultat:

Teorema 3.2.6. *[14] O metrică Finsler pe o varietate* 2*-dimensională are curbură steag constantă dacă şi numai dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

1. *Tensorul de tip Weyl* (3.2.5) *se anulează.*

2. $d_h\alpha = 0$.

3.2.3 Caracterizarea invarianţei tensorilor W_0 şi W_1

Deoarece în această lucrare suntem interesaţi de deformările proiective ale spaţiilor Finsler, în cele ce urmează vom studia comportamentul celor doi tensori de tip Weyl introduşi anterior atunci când deformăm proiectiv spray-ul iniţial. Vom studia mai întâi ce se întâmplă cu tensorul W_0 atunci când este supus unei deformări proiective. Putem formula următoarea lemă:

Lema 3.2.7. *[6] Considerăm S şi $\widetilde{S} = S - 2P\mathcal{C}$ două spray-uri proiectiv echivalente. Atunci tensorii corespunzători de tip Weyl W_0 satisfac*

$$\widetilde{W_0} = W_0 - \frac{3}{2}\delta_S P \otimes \mathcal{C}. \tag{3.2.6}$$

Observaţia 11. *Din lema precedentă putem concluziona că tensorul de tip Weyl W_0 devine un tensor invariant doar pentru acele deformari pentru care factorul proiectiv este o funcţie Hamel. Reamintim că o funţie pozitiv* 1*-omogenă P pe T_0M se numeşte funcţie Hamel pentru spray-ul S, dacă satisface ecuaţia* $\delta_S P = 0$.

În geometria Riemann, invarianţa tensorului W_0 este datorată liniarităţii factorului proiectiv asiciat deformării.

Corolarul 3.2.8. *[6] Dacă $\widetilde{g}$ şi g sunt două metrici Riemann proiectiv echivalente, atunci tensorii W_0 corespunzători coincid.*

În ceea ce priveşte comportamentul tensorului W_1 putem formula următorul rezultat

Lema 3.2.9. *[14] Considerăm S şi $\widetilde{S}$ două spray-uri proiectiv echivalente. Atunci tensorii W_1 corespunzători satisfac:*

$$\widetilde{W_1} = W_1 + \frac{1}{2}\delta_S P \wedge J + d_J d_h P \otimes \mathcal{C}. \tag{3.2.7}$$

Observaţia 12. *Din lema precedentă se observă că W_1 este proiectiv invariant dacă şi numai dacă factorul proiectiv este o funcţie Hamel. Putem formula astfel următorul rezultat care descrie condiţiile în care cei doi tensori de tip Weyl introduşi anterior sunt proiectiv invarianţi.*

Lema 3.2.10. *Tensorul de tip Weyl W_0 este proiectiv invariant dacă şi numai dacă tensorul de tip Weyl W_1 este proiectiv invariant.*

Observaţia 13. *Pentru demonstraţie este suficentă demonstrarea echivalenţei dintre $\delta_S P = 0$ şi $d_h d_J P = 0$, pentru P o funcţie 1-omogenă în coordonata fibră. Implicaţia directă este uşor de obţinut deoarece $d_J \delta_S P = -2d_J d_h P = 2d_h d_J P$. Reciproc, vom presupune că $d_h d_J P = 0$. Aplicăm i_S în relaţia precedentă şi obţinem*

$$i_S d_h d_J P = 0. \tag{3.2.8}$$

Pentru a calcula cantitatea din membrul stâng vom utiliza formula de comutare pentru i_S şi d_J din [20, Appendix A]

$$\begin{aligned} i_S d_h d_J P &= -d_h i_S d_J P + \mathcal{L}_{hs} d_J P + i_{[h,S]} d_J P \\ &= -d_h \mathcal{C}(P) + \mathcal{L}_S d_J P + i_{[h,S]} d_J P \\ &= -d_h P + \nabla d_J P = \delta_S P. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

În cele ce urmează vom fi interesaţi de modalitatea în care tensorul W_1 leagă caracterisiticile curburilor a două metrici proiectiv echivalente. Ţinând cont de aspectele menţionate anterior putem să afirmăm că prin deformarea proiectivă cu o funcţie Hamel a a unei metrici de curbură constantă se obţine o metrică de curbură constantă. Dorim să ne asigurăm că rezultatul este valabil şi în cazul 2-dimensional. Pentru acest lucru trebuie să analizăm comportamentul condiţiei suplimentare introduse în Teorema 3.2.6 folosind ipoteza că P este o funcţie Hamel.

Lema 3.2.11. *[14] Considerăm S şi $\widetilde{S}$ două spray-uri isotrope proiectiv echivalente cu proprietatea că P este o funcţie Hamel. Atunci derivatele în raport cu proiectorii orizontali din 1-formele semi-bazice α şi $\widetilde{\alpha}$ satisfac:*

$$d_{\widetilde{h}} \widetilde{\alpha} = d_h \alpha - d_R P - P d_J \alpha + \alpha \wedge d_J P. \tag{3.2.10}$$

Putem formula astfel următorul rezultat de caracterizare a curburilor pentru două metrici Finsler proiectiv echivalente obţinute printr-o deformare cu o funcţie Hamel:

Propoziţia 3.2.12. *[14] Considerăm F şi $\widetilde{F}$ două metrici Finsler proiectiv echivalente. Dacă metrica F are curbură steag constantă şi factorul proiectiv este o funcţie Hamel atunci şi metrica $\widetilde{F}$ are curbură steag constantă.*

3.3 O nouă variantă a versiunii Finsleriene e Lemei lui Schur care include şi cazul 2-dimensional

Se observă că în secţiunile precedente am întâmpinat o serie de dificultăţi în formularea rezultatelor de caracterizare a metricilor de curbură constantă de pe varietăţile 2-dimensionale. Problemele apărute sunt cauzate de faptul că în cazul 2-dimensional varianta Finsleriană a lemei lui Schur nu mai poate fi folosită. Prin urmare, în această secţiune vom încerca să formulăm o nouă variantă a versiunii Finsleriene a lemei lui Schur care să includă şi cazul 2-dimensional. Instrumentul principal pe care îl vom utiliza pentru formularea rezultatului menţionat anterior este 1-forma semi-bazică ξ, introdusă în (1.5.6). În cele ce urmează vom numi 1-forma semi-bazică ξ 1-*forma* de curbură a spray-ului izotrop. În următoarea lemă demonstrăm că prima condiţie a Teoremei 2.4.1 este mereu satisfăcută pentru $dimM \geq 3$.

Lema 3.3.1. *[5] [Identităţile diferenţiabile Bianchi] Pentru dimensiune* $n \geq 3$, *1-forma de curbură* ξ *asociată unui spray isotrop satisface* $d_h\xi = 0$.

Observaţia 14. *Pentru demonstrarea lemei anterioare am utilizat identităţile diferenţiabile Bianchi aplicate tensorului de curbură exprimat în* (1.5.6).

Observaţia 15. *În [12] Crampin utilizează* 2*-forma* $d_h\xi$ *pentru a obţine obstrucţia pentru ca un spray izotrop să fie R-plat. Cercetarea sa referitoare la spray-uri* 2*-dimensionale R-plate a fost continuată în [13], unde utilizează* 1*-forma de curbură pentru a demonstra că un spray* 2*-dimensional este R-plat dacă şi numai dacă* $d_h\xi = 0$.

3.3.1 Condiţii pentru spaţii Finsler de curbură constantă şi deformările lor proiective

Inspiraţi de Teeorema 2.4.1, în acestă subsecţiune vom introduce trei condiţii necesare şi suficiente (condiţiile-CFC: (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4)) pentru a caracteriza metricile Finsler de curbură constantă, vezi Teorema 3.3.2. Comportamentul condiţiilor-CFC la o deformare proiectivă a spray-ului iniţial ne oferă o obstrucţie asupra factorului proiectiv. Această obstrucţie reprezintă un element esenţial pentru formularea versiunii Finsleriene a Teoremei lui Beltrami pentru dimensiune $n \geq 2$. Utilizând formulele (1.5.4) şi (1.5.7) pentru o metrică Finsler de curbură steag scalară, 1-forma de curbură se rescrie astfel:

$$\xi = \frac{1}{3F} d_J \left(\kappa F^3\right). \tag{3.3.1}$$

Teorema 3.3.2. *[5] [Versiunea Finsleriană a lemei lui Schur pentru* $n \geq 2$*] Considerăm* S *spray-ul geodezic al unei metrici Finsler* F*. Atunci* F *are curbură steag constantă dacă şi numai dacă:*

$$S \text{ este izotrop} \quad \text{(această condiţie este mereu adevărată pentru } n = 2\text{);} \tag{3.3.2}$$

şi 1*-forma decurbură satisface:*

$$d_J\xi = 0; \tag{3.3.3}$$

$$d_h\xi = 0 \quad \text{(această condiţie este mereu adevărată pentru } n \geq 3\text{).} \tag{3.3.4}$$

Observaţia 16. *Să analizăm cele trei condiţii scrise anterior. Primele două,* (3.3.2) *şi* (3.3.3)*, ne oferăm o caracterizare pentru metricile Finsler de curbură izotropă, [22]. Ambele condiţii au fost utilizare în [6, (4.1)] pentru a defini un nou tensor de tip Weyl care să caracterizeze metricile Finsler de curbură steag constantă în dimensiune* $n \geq 3$.

În cele ce urmeaază vom studia comportamentul condiţiilor-CFC la o deformare proiectivă a spray-ului iniţial S. Invarianţa pentru prima şi a treia condiţie este automat satisfăcută. Referitor la invarianţa pentru a doua condiţie, vom arăta că este satifăcută doar pentru acele deformări care satisfac ecuaţia Hamel:

$$d_h d_J P = 0. \tag{3.3.5}$$

3.4 Versiunea Finsleriană a Teoremei lui Beltrami

În această secţiune vom generaliza rezultatul obţinut în Propoziţia 3.2.12 utilizând Versiunea Finsleriană a Lemei lui Schur introdusă în secţiunea precedentă. Această generalizare va fi numită Versiunea Finsleriană a Teoremei lui Beltrami şi afirmă:

Teorema 3.4.1. *[6, 5][Versiunea Finsleriană a Teoremei lui Beltrami pentru $n \geq 2$] Pentru două metrici Finsler proiectiv echivalente F şi $\widetilde{F}$ peoprietatea de a avea curbură constantă este păstrată dacă şi numai dacă factorul proiectiv asociat deformării este o funcţie Hamel.*

Utilizând Versiunea Finsleriană a Teoremei lui Beltrami putem formula o demonstraţie mai simplă pentru clasica Teoremă a lui Beltrami, [26]:

Teorema 3.4.2. *Considerăm F şi $\widetilde{F}$ două metrici Finsler proiectiv echivalente care pot fi reduse la două metrici Riemann. Atunci F are curbură secţională constantă dacă şi numai dacă $\widetilde{F}$ are curbură secţională constantă.*

3.4.1 Exemple

În această subsecţiune vom testa obstrucţia impusă asupra factorului proiectiv în Teorema 3.4.1 pe o serie de exemple particulare.

Exemplul 1. *Considerăm următoarea metrică de tip Numata, [2, §3.9], pe bila Euclidiană $B^n(1)$.*

$$F(x,y) = |y| + \langle x, y\rangle \tag{3.4.1}$$

Metrica scrisă anterior este proiectiv plată pentru care spray-ul geodezic este $S = S_0 - \dfrac{|y|^2 y^i}{|y| + \langle x, y\rangle}\dfrac{\partial}{\partial y^i}$, unde S_0 este spray-ul plat. Factorul proiectiv asociat acestei deformări este $P = \dfrac{S_0 F}{2F} = \dfrac{1}{2}\dfrac{|y|^2}{|y| + \langle x, y\rangle}$. Prin calcul direct se obţine

$$\begin{aligned}\delta_{S_0} P &= \left\{ S_0 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2y_i}{|y| + \langle x, y\rangle} - \frac{1}{2} \cdot \frac{|y|^2 \dfrac{y_i}{|y|} + x_i |y|^2}{(|y| + \langle x, y\rangle)^2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_i |y|^2}{(|y| + \langle x, y\rangle)^2} \right\} dx^i \\ &= \left\{ \frac{|y|^2}{2F^3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(|x|^2 |y|^2 - \langle x, y\rangle^2 \right) \right\} dx^i \neq 0.\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Din (3.4.2) se observă că P nu este o funcţie Hamel. Prin urmare, conform Teoremei 3.4.1 rezultă că F nu are curbură constantă. Putem calcula independent curbura metricii F astfel:

$$\begin{aligned}\rho = \rho_0 + P^2 - S_0 P &= \kappa_0 F_0^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{|y|^2}{|y| + \langle x, y\rangle} \right)^2 - y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} \frac{|y|^2}{|y| + \langle x, y\rangle} \right) \\ &= \frac{|y|^4}{4\left(|y| + \langle x, y\rangle\right)^2} + \frac{|y|^4}{2\left(|y| + \langle x, y\rangle\right)^2} = \frac{3}{4} \frac{|y|^4}{\left(|y| + \langle x, y\rangle\right)^2}\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Deoarece S este izotrop rezultă că $\rho = \kappa F^2$, de unde

$$\kappa = \frac{\rho}{F^2} = \frac{3}{4} \frac{|y|^4}{\left(|y| + \langle x, y\rangle\right)^4}. \tag{3.4.4}$$

Exemplul 2. *Acest exemplu este bazat pe o metrică Finsler proiectiv plată al cărui factor proiectiv este o funcţie Hamel. Deci, potrivit Versiunii Finsleriene a Teoremei lui Beltrami vom obţine de acestă dată o metrică de curbură steag constantă. Considerăm metrică Funk pe bila Euclidiană $B^n(1/2)$, [31, §2.3],*

$$F = \frac{\sqrt{(1 - 4|x|^2)|y|^2 + 4\langle x, y\rangle^2}}{1 - 4|x|^2} + 2\frac{\langle x, y\rangle}{1 - 4|x|^2}. \tag{3.4.5}$$

Metrica scrisă anterior este o metrică proiectiv plată, prin urmare, proiectiv echivalentă cu metrica Euclidiană. Factorul proiectiv asociat acestei deformări este:

$$\begin{aligned} P &= \frac{S_0(F)}{2F} = \frac{1}{2F} y^i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\sqrt{(1-4|x|^2)|y|^2 + 4\langle x, y\rangle^2}}{1-4|x|^2} + 2\frac{\langle x, y\rangle}{1-4|x|^2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{(1-4|x|^2)|y|^2 + 4\langle x, y\rangle^2}}{1-4|x|^2} + 2\frac{\langle x, y\rangle}{1-4|x|^2} = F. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Ţinând cont de faptul că F este o metrică proiectiv plată rezultă că $\delta_{S_0} P = d_J S_0 F - 2 d_{h_0} F = 0$ şi deci P este o funcţie Hamel pentru spray-ul plat S_0. Analog cu exemplul precedent putem calcula independent curbura pentru metrica F astfel:

$$\rho = \kappa F^2 = \rho_0 + P^2 - S_0 P = \kappa_0 F_0^2 + F^2 - S_0(F) = F^2 - 2F^2 = -F^2. \tag{3.4.7}$$

Din rezultatul precedent obţinem că F este o metrică de curbură steag constantă -1.

Exemplul 3. *În acest ultim exemplu vom analiza două metrici proiectiv echivalente pentru care factorul proiectiv este liniar în coordonata fibră. Este cunoscut faptul că metrica Funk de pe bila unitate,*

$$F = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}}{1-|x|^2} + \frac{\langle x, y\rangle}{1-|x|^2}, \; y \in T_x B^n \tag{3.4.8}$$

este o metrică proiectiv plată de curbură steag constantă $\kappa = -1/4$ cu spray-ul geodesic:

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - F y^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{3.4.9}$$

Din [34] avem informaţia că

$$\widetilde{F} = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}}{1-|x|^2} + \frac{\langle x, y\rangle}{1-|x|^2} + \frac{\langle a, y\rangle}{1+\langle a, x\rangle}, \tag{3.4.10}$$

cu a un vector constant, $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| < 1$, este o metrică proiectiv plată pe $B^n(1)$. Metricile prezentate anterior sunt proiectiv echivalente, factorul proiectiv fiind

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\widetilde{F}} S \left(\frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2)}}{1-|x|^2} + \frac{\langle x, y\rangle}{1-|x|^2} + \frac{\langle a, y\rangle}{1+\langle a, x\rangle} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\langle a, y\rangle}{1+\langle a, x\rangle}. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Se observă că $d_J P = -\dfrac{1}{2}\dfrac{a_i dx^i}{1+\langle a, x\rangle} = d\left(\ln(1+\langle a, x\rangle)^{-1/2}\right)$. Prin urmare obstrucţia din teoremă este satisfă cută şi deci $\widetilde{F}$ are curbură steag constantă. Pentru a găsi valoarea curburii calculăm mai întâi

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho} &= \rho + P^2 - SP = \kappa F^2 + P^2 - SP \\ &= -\frac{1}{4}\left(F + \frac{\langle a, y\rangle}{1+\langle a, x\rangle} \right)^2 = -\frac{1}{4}\widetilde{F}^2 \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Din (3.4.12) obţinem

$$\widetilde{\kappa} = \frac{\widetilde{\rho}}{\widetilde{F}^2} = -\frac{1}{4}.$$

Capitolul 4

Noi clase de metrici Finsler proiectiv echivalente de curbură constantă

În acest capitol vom utiliza obstrucţia introdusă asupra factorului proiectiv în varianta Finsleriană a Teoremei lui Beltrami pentru a construi noi clase de metrici Finsler proiectiv echivalente. Punctul central al acestui capitol este strâns legat de o clasă specială de metrici Finsler, anume clasa metricilor Randers. Aceste metrici sunt exprimate cu ajutorul unei metrici Riemann şi a unei 1-forme după cum urmează: $F(x,y) = a + b$, unde $a(x,y) = \sqrt{g_{ij}(x)y^i y^j}$ este o metrică Riemann şi $b(x,y) = b_i(x)y^i$.

4.1 Metrici Randers proiectiv plate

Pentru a restrânge căutarea de noi perechi de metrici cu proprietatea scrisă anterior ne vom axa în cele ce urmează pe clasa metricilor Randers proiectiv plate. După cum am mentţionat în primul capitol, o metrică Finsler este proiectiv plată dacă şi numai dacă satisface ecuaţia Hamel (1.6.3). Folosind acestă caracterizare putem formula următorul rezultat pentru metrici Randers proiectiv plate:

Propoziţia 4.1.1. *[14] O metrică Randers $F = a + b$ este proiectiv plată dacă metrics Riemann a este proiectiv plată şi 1-forma $b_i dx^i$ închisă.*

Propoziţia precedentă indică faptul că studiul metricilor Randers proiectiv plate ar trebui să înceapă cu un studiu intens al metricilor Riemann proiectiv plate. Utilizând ecuaţiile Levi Civita, [27] putem formula următorul rezultat de caracterizare a metricilor Riemann proiectiv plate.

Lema 4.1.2. *[14] Fie $F = \sqrt{g_{ij}(x)y^i y^j}$ o metrică Finsler care poate fi redusă la o metrică Riemann. Atunci F este proiectiv plată dacă şi numai dacă următoarea relaţie este satifăcută:*

$$g_{ij,l} = 2\psi_l g_{ij} + \psi_i g_{jl} + \psi_j g_{il}, \text{ pentru o 1-formă } \psi_i(x)dx^i \in \Lambda^1(\mathcal{U}). \tag{4.1.1}$$

În acest caz $P(x,y) = \psi_l(x)y^l$ este factorul proiectiv al metricii F.

Avem toate instrumentele necesare pentru a demonstra implicaţia directă a enunţului Teoremei lui Beltrami:

Teorema 4.1.3. *Fie $F = \sqrt{g_{ij}(x)y^i y^j}$ o metrică Finsler proiectiv plată care poate fi redusă la o metrică Riemann. Atunci F are curbură steag constantă.*

4.2 Familia tuturor metricilor Finsler proiectiv plate care pot fi reduse la metrici Riemann

Următorul scop este acela de a găsi familia tuturor metricilor Finsler proiectiv plate care pot fi reduse la metrici Riemann. Pentru realizarea acestui scop vom avea nevoie mai întâi de forma metricilor Finsler care deţin această proprietate. Amintim că scalarul Ricci pentru o metrică proiectiv plată este dat de:

$$\rho = P^2 - S_0 P. \tag{4.2.1}$$

Vom rescrie (4.2.1) utilizând faptul că factorul proiectiv este liniar în coordonata fibră. Deci

$$P(x,y) = \psi_i(x) y^i, \text{ unde } \psi_i \text{ este un gradient, de unde rezultă } \psi_i = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i}. \tag{4.2.2}$$

Înlocuim (4.2.2) în (4.2.1) şi obţinem

$$\kappa g_{ij} y^i y^j = y^i y^j \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^j} - y^i y^j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} \Rightarrow g_{ij} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}\right) \tag{4.2.3}$$

Din (4.1.1) avem

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \kappa}{\partial x^l}\frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}\right) + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}\right) \\ & = \frac{2}{\kappa}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x^l} + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j}\frac{\partial \psi}{\partial x^l} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^j \partial x^l}\right) + \frac{1}{\kappa}\frac{\partial \psi}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^l}\right). \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Prin integrarea succesivă a relaţiei precedente se obţine

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^l}\frac{\partial \psi}{\partial x^j} + \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^l} \\ & = 2\frac{\partial \psi}{\partial x^l}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j}\frac{\partial \psi}{\partial x^l} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^j \partial x^l}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^l} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^l}\right). \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Simplificând relaţia precedentă avem:

$$4\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^j}\frac{\partial \psi}{\partial x^l} - 2\frac{\partial \psi}{\partial x^l}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - 2\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^l \partial x^j} - 2\frac{\partial \psi}{\partial x^j}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^l} = 0. \tag{4.2.6}$$

Se observă ca din setul de relaţii găsit anterior obţinem:

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - 2\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^j}\right) - 2\frac{\partial \psi}{\partial x^l}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - 2\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\frac{\partial \psi}{\partial x^j}\right) = 0. \tag{4.2.7}$$

Integrând de două ori obţinem

$$e^{-2\psi} = -2(e_{ij}x^i x^j + e_i x^i + e) := c_{ij}x^i x^j + c_i x^i + c \tag{4.2.8}$$

În concluzie funcţia căutată este

$$\psi = -\frac{1}{2}\ln(c_{ij}x^i x^j + c_i x^i + c) \ \text{ unde } c_{ij} = c_{ji},\ c_i,\ c \text{ sunt constante pe } \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n. \tag{4.2.9}$$

Făcând o schimbare de coordonate putem presupune că $\psi = -\frac{1}{2}\ln(\mu|x|^2 + 1)$. Deci, după înlocuirea în (4.2.3) obţinem familia de metrici Riemann proiectiv plate:

$$g_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}}{1+\mu|x|^2} - \frac{\mu x_i x_j}{(1+\mu|x|^2)^2},\ \kappa = \mu. \tag{4.2.10}$$

În concluzie, familia tuturor metricilor Finsler proiectiv plate care pot fi reduse la metrica Riemann (4.2.10) este dată de:

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{|y|^2 + \mu\left(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2\right)}}{1+\mu|x|^2}, \quad \text{unde } \mu \text{ reprezintă curbura.} \tag{4.2.11}$$

Pentru a ne simplifica căutarea de noi metrici Finsler proiectiv echivalente de curbură constantă ne vom centra atenţia asupra unei clase speciale de metrici Randers proiectiv plate. Folosind familia de metrici Riemann găsite anterior putem formula următorul rezultat:

Lema 4.2.1. *[14] Familia metricilor Randers proiectiv plate de curbură constantă negativă pentru care factorul proiectiv este proporţional cu metrica este dată de:*

$$F = a + b \text{ unde } a(x,y) = \frac{\sqrt{|y|^2 - 4c^2\left(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2\right)}}{1-4c^2|x|^2} \text{ şi } b(x,y) = \frac{2c\langle x,y\rangle}{1-4c^2|x|^2}. \tag{4.2.12}$$

În acest caz constant c reprezintă coeficientul de proporţionalitate dintre factorul proiectiv şi metrica studiată.

Mai mult, putem determina curbura steag asociată familiei de metrici scrise anterior astfel:

$$\kappa F^2 = P_0^2 - S_0 P_0 = c^2F^2 - 2c^2F^2 = -c^2F^2 \Rightarrow \kappa = -c^2. \tag{4.2.13}$$

Toate construcţiile din secţiunile următoare sunt bazate pe faimilia de metrici introdusă în Lema 4.2.1. Prin urmare vom efectua o serie de deformări proiective asupra unei metrici Randers proiectiv plată pentru care factorul proiectiv este proporţional cu aceasta.

4.3 O nouă clasă de metrici proiectiv echivalente cu aceeaşi curbură negativă

Vom începe cu F metrica Randers proiectiv plată din (4.2.12), cu $S = S_0 - 2cF\mathcal{C}$ spray-ul geodezic asociat. Vom realiza o deformare Randers a acestei metrici

$$F \to \widetilde{F} = F + \widetilde{b}, \tag{4.3.1}$$

unde $\widetilde{b}$ este dat de $\widetilde{b}(x,y) = \psi_i(x)y^i$, [35]. Vom studia mai întâi condiţiile pe care trebuie să le satisfacă metricile F şi $\widetilde{F}$ definite anterior pentru a fi proiectiv echivalente. Să observăm că

$$\delta_S\widetilde{F} = 0 \Leftrightarrow \delta_S\widetilde{b} = 0 \Leftrightarrow b_i = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}. \tag{4.3.2}$$

Prin urmare, cele două metrici vor fi proiectiv echivalente pentru orice deformare de tip Randers. Factorul proiectiv asociat deformării este dat de

$$P = \frac{S(F+\widetilde{b})}{2(F+\widetilde{b})} = \frac{S(\widetilde{b})}{2(F+\widetilde{b})}. \tag{4.3.3}$$

Utilizând faptul că spray-ul geodezic asociat este $S = S_0 - 2cF\mathcal{C}$, (4.3.3) devine

$$P = \frac{S_0\widetilde{b} - 2cF\widetilde{b}}{2(F+\widetilde{b})}. \tag{4.3.4}$$

Pentru a putea obţine forma metricii $\widetilde{F}$ vom presupune că factorul proiectiv este proporţional cu aplicaţia liniară $\widetilde{b}$. Făcând această presupunere, ne vom afla în ipotezele Teoremei 3.4.1. Prin urmare, să presupunem că

$$P = \nu\widetilde{b},\ \nu \in \mathbb{R}. \tag{4.3.5}$$

Din (4.3.4) şi (4.3.5) obţinem

$$S_0\widetilde{b} - 2cF\widetilde{b} = 2\nu F\widetilde{b} + 2\nu\widetilde{b}^2. \tag{4.3.6}$$

Relaţia precedentă se rescrie:

$$S_0\widetilde{b} - 2\nu\widetilde{b}^2 = 2(c+\nu)F\widetilde{b}. \tag{4.3.7}$$

Observăm faptul că doar membrul stâng al relaţiei precedente este pătratic în coordonata fibră. Acest aspect obligă anularea membrului drept, prin urmare a cantităţii $\nu + c$. Ţinând cont de cele mai sus menţionate obţinem:

$$S_0\widetilde{b} - 2\nu\widetilde{b}^2 = 0. \tag{4.3.8}$$

Integrând ecuaţia precedentă rezultă soluţia:

$$\widetilde{b}(x,y) = y^i\frac{\partial\psi}{\partial x^i} = \frac{\langle e, y\rangle}{4\nu^2\left(\langle e, x\rangle + f\right)}, \tag{4.3.9}$$

unde e_i şi f sunt constante alese astfel încât $F + \widetilde{b}$ să fie pozitivă. Forma familiei de metrici obţinute prin această deformare este

$$\widetilde{F} = \frac{\sqrt{|y|^2 - 4\nu^2\left(|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2\right)}}{1 - 4\nu^2|x|^2} - \frac{2\nu\langle x, y\rangle}{1 - 4\nu^2|x|^2} + \frac{\langle e, y\rangle}{4\nu^2\left(\langle e, x\rangle + f\right)}. \tag{4.3.10}$$

Curbura steag asociată metricii precedente se regăseşte astfel

$$\begin{aligned}\widetilde{\kappa}\widetilde{F}^2 = \kappa F^2 + P^2 - SP = -c^2F^2 + \nu^2\widetilde{b}^2 - \nu S(\widetilde{b}) &= -\nu^2F^2 + \nu^2\widetilde{b}^2 - 2\nu^2\widetilde{b}(F + \widetilde{b})\\ &= -\nu^2\widetilde{F} \Rightarrow \widetilde{\kappa} = -\nu^2\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

În concluzie, putem afirma faptul că printr-o deformare Randers de tipul $\widetilde{F} = F + \widetilde{b}$, a unei metrici Randers proiectiv plate al cărui factor este proporţional cu aceasta se obţine o metrică de curbură constantă negativă dacă $\widetilde{b}$ este dat de (4.3.9). Mai mult, dacă fixăm $\nu = -\dfrac{1}{2}$ şi $f = 1$ vom obţine că F este chiar metrica Funk (3.4.8) şi $\widetilde{F}$ este metrica Funk generalizată (3.4.10).

4.4 Noi metrici Finsler de curbură steag zero

4.4.1 O clasă nouă de metrici Finsler proiectiv plate de curbură steag zero

Pornind de la metrica Finsler proiectiv plată (4.2.12) vom construi o familie de metrici Finsler de curbură zero pornind de la definiţia metricilor pătratice, [33]. Pentru realizarea construcţiei vom considera următoarea deformare a metricii Finsler (4.2.12):

$$\widetilde{F} = f(x)\frac{F^2}{a}, \tag{4.4.1}$$

unde f este o funcţie pozitivă pe M şi a este dat de (4.2.12). Primul pas este reprezentat de stabilirea condiţiilor pentru proiectiva echivalenţă a celor două familii de metrici. Formulăm astfel următorul rezultat care descrie condiţiile pentru ca F şi $\widetilde{F}$ să fie proiectiv echivalente.

Lema 4.4.1. *[14] Fie $F = a + b$ o metrică Randers proiectiv plată. Atunci $\widetilde{F} = f(x)\dfrac{F^2}{a}$ este proiectiv echivalentă cu F dacă şi numai dacă următoarea relaţie este satisfăcută*

$$\frac{F^2}{a}d_hf - S(f)d_J\left(\frac{F^2}{a}\right) + fS(a)d_J\left(\frac{F^2}{a^2}\right) = 0. \tag{4.4.2}$$

Este dificil de găsit funcţia f direct din condiţiile scrise în Lema 4.4.1, motiv pentru care vom face serie de presupuneri. Mai întâi vom analiza cantitatea $S(a)$ deoarece apare în condiţia impusă în Lema anterioară pentru stabilirea echivalenţei proiective a celor două metrici. Reamintim faptul că metrica F este o metrică proiectiv plată al cărui factor proiectiv este proporţional cu metrica, vezi Lema 4.2.1.
Deci

$$\frac{S_0F}{2F} = cF \Rightarrow S_0F = 2cF^2. \tag{4.4.3}$$

Ţinând cont de modalitatea de definire a metricii F, din (4.4.3) obţinem:

$$S_0(a+b) = 2c(a^2+2ab+b^2) \Rightarrow S_0(a) = 2c(a^2+2ab+b^2) - S_0(b) \to S_0(a) = 4cab.$$

Putem calcula factorul proiectiv asociat după cum urmează:

$$\begin{aligned} P = \frac{S\widetilde{F}}{2\widetilde{F}} &= \frac{S(f)\dfrac{F^2}{a} - \dfrac{fF^2S(a)}{a^2}}{\dfrac{2fF^2}{a}} = \frac{S(f)\cdot\dfrac{F^2}{a} - \dfrac{fF^2}{a^2}\cdot(S_0a - 2cFa)}{\dfrac{2fF^2}{a}} \\ &= \frac{S(f)}{2f} - \frac{S_0a - 2cFa}{2a} = \frac{Sf}{2f} - \frac{4cab - 2cFa}{2a} = \frac{S_0f}{2f} - 2cb + cF. \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Observăm că

$$\delta_S P = \delta_S\left(\frac{S_0 f}{2f} - 2cb + cF\right) = \delta_S\left(\frac{S_0 f}{2f}\right) \tag{4.4.5}$$

Reamintim faptul că scopul nostru este să găsim f astfel încât $\delta_S P = 0$. Pentru atingerea acestui scop vom presupune că

$$S_0 f = 4cfb.$$

Deoarece b este cunoscut din (4.2.12) putem găsi f direct astfel: Scriem local $S_0 f = 4cfb$ şi obţinem,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{8c^2 f x_i}{1 - 4c|x|^2}.$$

Integrând relaţia precedentă avem:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\ln f = \frac{\partial}{\partial x^i}\ln\left(\frac{1}{1-4c^2|x|^2}\right) \Rightarrow f = \frac{\eta}{1-4c^2|x|^2},\ \eta \in \mathbb{R}^+.$$

Utilizând funcţia găsită anterior, se demonstrează că cele două metrici sunt proiectiv echivalente, unde noua metrică are forma

$$\widetilde{F} = \frac{\eta(\sqrt{|y|^2 - 4c^2\left(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2\right)} + 2c\langle x,y\rangle)^2}{(1-4c^2|x|^2)^2\sqrt{|y|^2 - 4c^2\left(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2\right)}},\ \eta \in \mathbb{R}^+. \tag{4.4.6}$$

Se observă că este o metrică proiectiv plată de curbură steag zero. În acest caz fixând $c = \dfrac{1}{2}$ şi $\eta = 1$ vom recupera echivalenţa proiectivă dintre metrica Funk (3.4.8) şi metrica Berwald (2.1.1).

4.4.2 O nouă clasă de metrici de curbură steag zero obţinute prin transformări conforme

În această subsecţiune vom utiliza transformările conforme pentru a construi o nouă clasă de metrici proiectiv plate de curbură steag zero. Pentru această construcţie vom porni de la clasa de metrici găsită în (4.4.6) pentru a obţine o nouă familie de metrici de curbură zero.
Considerăm următoarea transformare a metricii proiecti plate din (4.4.6):

$$\bar{F} = g\widetilde{F} + \frac{f}{F}\widetilde{F}, \tag{4.4.7}$$

unde g este o funcţie pe M şi $f(x,y) = f_i(x)y^i$ este o funcţie pe TM cu $f_i dx^i$ o 1-formă astfel încât $\bar{F}$ este pozitivă şi F este metrica din (4.2.12).
În primul rând vom fi interesaţi de condiţiile în care cele două metrici sunt proiectiv echivalente. Pentru aceasta formulăm următorul rezultat

Lema 4.4.2. *[14] Considerăm F şi $\widetilde{F}$ două metrici proiectiv plate care sunt proiectiv echivalente şi $\bar{F} = g\widetilde{F} + \frac{f}{F}\widetilde{F}$ o metrică obţinută prin înmulţirea metricii $\widetilde{F}$ cu funţia 0-omogenă $g + \frac{f}{F}$. Atunci $\bar{F}$ este proiectiv plată dacă şi numai dacă satisface:*

$$\begin{aligned} &\widetilde{F}d_{h_0}g - S_0 g d_J\widetilde{F} - \frac{S_0 f d_J \widetilde{F}}{F} + \frac{\widetilde{F}S_0 f d_J F}{F^2} - \frac{S_0\widetilde{F}d_J f}{F} + \frac{fS_0\widetilde{F}d_J F}{F^2} + \frac{\widetilde{F}S_0 F d_J f}{F^2} \\ &+ \frac{fS_0 F d_J \widetilde{F}}{F^2} - \frac{2f\widetilde{F}S_0 F d_J F}{F^3} = 0. \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

În acest caz observăm prezenţa a două necunoscute. Vom calcula mai întâi factorul proiectiv asociat metricii proiectiv plate

$$P = \frac{S_0\bar{F}}{2\bar{F}} = \frac{S_0 g \cdot \widetilde{F} + gS_0\widetilde{F} + \frac{S_0 f}{F}\widetilde{F} + \frac{fS_0\widetilde{F}}{F} - f\frac{\widetilde{F}}{F^2}S_0 F}{2\left(g\widetilde{F} + \frac{f}{F}\widetilde{F}\right)} \tag{4.4.9}$$

Reamintim că $S_0 F = 2cF^2$ şi $S_0\widetilde{F} = 4cF\widetilde{F}$. Deci, (4.4.9) devine:

$$P = \frac{S_0 g \cdot \widetilde{F} + \frac{S_0 f}{F}\widetilde{F} - 2cf\widetilde{F}}{2\left(g\widetilde{F} + \frac{f}{F}\widetilde{F}\right)} + 2cF. \tag{4.4.10}$$

Ţinând cont de proprietăţile funcţiilor f şi g putem face următoarele presupuneri

$$S_0 g = 2cf \text{ şi } S_0 f = 0. \tag{4.4.11}$$

Obţinem aşadar următoarea formă a factorului proiectiv

$$P = 2cF, \tag{4.4.12}$$

care este o funcţie Hamel.
Din a două relaţie scrisă în (4.4.11) obţinem

$$f = \langle v, y\rangle. \tag{4.4.13}$$

În concluzie condiţia din Lema 4.4.2 este satisfăcută ceea ce implică faptul că noua metrică este proiectiv plată. Pentru a găsi forma noii metrici mai trebuie să aflăm funcţia g. Obţinem $g = 2c\langle a, x\rangle + e$.
Expresia noii metrici de curbură steag zero este.

$$\begin{aligned} \bar{F} = &\frac{\eta(\sqrt{|y|^2 - 4c^2\left(|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2\right)} + 2c\langle x, y\rangle)^2}{(1 - 4c^2|x|^2)^2\sqrt{|y|^2 - 4c^2\left(|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2\right)}} \\ &\cdot \left(2c\langle a, x\rangle + e + \frac{\langle a, y\rangle}{\frac{\sqrt{|y|^2 - 4c^2(|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2)}}{1 - 4c^2|x|^2} + \frac{2c\langle x,y\rangle}{1 - 4c^2|x|^2}}\right). \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Observăm că (4.4.14) este o metrică proiectiv plată care deţine aceleaşi proprietăţi ca metrica construită anterior. Deci, factorul proiectiv este proporţional cu (4.2.12) şi curbura este zero.
Curbura sa poate fi regăsită direct din echivalenţa proiectivă cu metrica plată astfel:

$$\widetilde{\kappa}\widetilde{F}^2 = P^2 - S_0 P = 4c^2F^2 - 2cS_0 F = 4c^2F^2 - 4c^2F^2 = 0 \Rightarrow \widetilde{\kappa} = 0. \tag{4.4.15}$$

Bibliografie

[1] Bacso S., Cheng X. and Shen Z.: *Curvature properties of* (α, β)*-metrics*, Adv. Stu. P. Math. **48** (2007), 73–110.

[2] Bao D., Chern S.-S., Shen Z.: *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, Springer, 2000.

[3] Bejancu A., Farran H.R.: *Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle*, Rep. Math. Phys., **58** (2006), 131–146.

[4] Berwald L.: *On Finsler and Cartan geometries. III Two-dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals*, Annals of Math., **42** (1941), 84–112.

[5] Bucataru I., **Creţu G.**: *Finsler spaces of constant flag curvature and their projective geometry*, trimisă spre publicare, arXiv:1902.05274v1 .

[6] Bucataru I., **Creţu G.**: *A characterisation for Finsler metrics of constant curvature and a Finslerian version of Beltrami theorem*, J. Geom. Anal., (2019), 1–15, https://doi.org/10.1007/s12220-019-00158-7.

[7] Bucataru I., **Creţu G.** and Taha E. H.: *Frobenius integrability and Finsler metrizability for 2-dimensional sprays*, Differ. Geom. Appl., **56** (2018), 308–324. DOI: 10.1016/j.difgeo.2017.10.002. arXiv: 1610.03949 [math.DG].

[8] Bucataru I., Muzsnay Z.: *Sprays metrizable by Finsler functions of constant flag curvature*, Differ. Geom. Appl., **31** (3) (2013), 405-415.

[9] Bucataru I., Muzsnay Z., *Projective Metrizability and Formal Integrability*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., **7** (2011), 114–126.

[10] Bucataru I., Miron R.: *Finsler-Lagrange geometry. Applications to dynamical systems*, Romanian Academy, 2007.

[11] Chern S.S. and Shen Z.:*Riemann-Finsler geometry*, World Scientific, 2005.

[12] Crampin M.: *Isotropic and R-flat sprays*, Houston J. Math., **33** (2) (2007), 451–459.

[13] Crampin M.: *The Cotton tensor in the projective geometry of sprays*, Publ. Math. Debrecen, **94** (2019), 20–34.

[14] **Creţu G**: *New classes of projectively related Finsler metrics of constant flag curvature*, trimisă spre publicare, arXiv:1908.05305.

[15] Darboux G.: *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal*, Gauthier–Villars, 1894.

[16] Douglas J.: *The general geometry of paths*, Ann. of Math., **29** (1928), 143–168.

[17] Douglas, J.: *Solution of the inverse problem of the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 71–128.

[18] Elgendi S.G., Muzsnay Z.: *Freedom of h(2)-variationality and metrizability of sprays*, Differ. Geom. Appl. **54** (2018), 194–207.

[19] Grifone, J.: *Structure presque tangente et connections I*, Ann. Inst. Fourier, **22** (1972), 287–334.

[20] Grifone, J., Muzsnay, Z.: *Variational Principles For Second-Order Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 2000.

[21] Kropina, V.S.: *On projective Finsler spaces with with a metric of special form*, Nauki, **195** (1960), 38–42.

[22] Li B., Shen, Z.: *Sprays of isotropic curvature*, Int. J. Math., **29** (2018), 185–197.

[23] Matsumoto M.: *Foundation of Finsler geometry and special Finsler spaces* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977.

[24] Matsumoto M.: *Finsler spaces with* (α, β)*-metric*, Tensor (N. S.), 60 (1998), 123–134.

[25] Matveev V.: *Projectively Invariant Objects and the Index of the Group of Affine Transformations in the Group of Projective Transformations*, Bull. Iranian Math. Soc., **44** (2018), 341–375.

[26] Matveev V.: *Geometric explanation of the Beltrami theorem*, Int. J. Geom. Methods. M., **3** (2006), 623–629.

[27] Mikes J., *Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces*, J. Math. Sci. **78** (1996), 311-333.

[28] Miron R. and Ananstasiei M.: *Vector bundles and Finsler spaces with applications ti relativity*, Geometry Balkan Press, Bucharesc, Romania, 1997.

[29] Mo X., Shen Z. and Yang C., *Some constructions of projectively flat Finsler metrics*, Sci. Sinica. **49** (2006), 703-714.

[30] Randers G.: *On an asymmetric metric in the four space of general relativity*, J. Phys., **59** (1942), 195–199.

[31] Shen Z.: *Differential geometry of spray and Finsler spaces*, Springer, 2001.

[32] Shen Z.: *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific, Singapore, 2001.

[33] Shen Z. and Yu C.: *On Einstein Square Metrics*, Publ. Math. Debrecen, **85** (2012), 253–264.

[34] Shen Z.: *Projectively flat Finsler metrics of constant flag curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., **355** (2002), 1713-1728.

[35] Shibata C.: *On invariant tensors of* β*-changes of Finsler metrics*, J . Math. Kyoto Univ., **24** (1984), 163–188.

[36] Shibata C.: *On Finsler spaces with Kropina metric*, Rep. on Math Phy, **13** (1978), 117–128.

[37] Spivak M.: *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, Inc, 1965.

[38] Spivak M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Volume Four, INC, Houston, Texas, 1999.

[39] Szilasi J., Lovas R., Kertész D.: *Connections, sprays and Finsler structures*, World Scientific, 2014.

[40] Vattamány S., Vincze C.: *Two-dimensional Landsberg manifolds with vanishing Douglas tensor*, Ann. Univ. Sci. Budapest., **44** (2001), 11–26.

[41] Yasuda H. and Shimada H.: *On Randers space of scalar curvature*, J. Phys., **11** (1977), 347–360.

[42] Weyl H.: *Zur Infinitesimal geometrie*, Gőttinger Nachrichten, Math. Phys., **11** (1921), 99-112.