Universitatea “Alexandru Ioan Cuza” din Iaşi
Facultatea de Matematică

Rezumatul tezei de doctorat

Condiţii Algebrice şi Geometrice pentru anumite Propietăţi ale Tensorului de Curbură

Conducător ştiinţific:
Prof.univ.dr. IOAN BUCĂTARU

Doctorand:
Dan Gregorian Fodor

Iaşi
2020

Abstract

Principalul obiect de studiu al acestei teze e tensorul de curbură Riemman, în particular curbura secţional pozitivă. Curbura secţional pozitivă este un domeniu interesant, cu multe probleme nerezolvate. Capitolele acestei teze au rezultat din încercări de rezolvare a conjuncturii Hopf: varietatea 4-dimensională $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ nu admite o metrică de curbură strict secţional pozitivă. Deşi enunţul problemei e simplu, propietăţi ale curburii în dimensiune $n \geq 4$ îngreunează rezolvarea ei. În fiecare punct x al varietăţii, tensorul Riemann poate fi considerat un operator biliniar pe spaţiul 2-formelor peste TM_x. Explicit, avem $R : \Lambda^2 \times \Lambda^2 \to \mathbb{R}$, unde Λ^2 e $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensional. O 2-formă $\psi \in \Lambda^2$ e *decompozabilă* dacă şi numai dacă există $v_1, v_2 \in TM_x$ cu $v_1 \wedge v_2 = W$. Putem spune că 2-formele decompozabile sunt cele care "corespund" subspaţiilor 2-dimensionale ale lui TM_x. Din aceste concepte reies două noţiuni principale de pozitivitate a curburii. Tensorul de curbură R este *pozitiv definit* dacă şi numai dacă $\forall \psi \in \Lambda^2$, cu $\psi \neq 0$ avem $R(\psi, \psi) > 0$. El este *secţional pozitiv* dacă şi numai dacă $R(\psi, \psi) > 0$ pentru toţi ψ decompozabili nenuli. Observăm că pozitiv-definirea este o condiţie mai tare decât pozitivitatea secţională. $n = 4$ este cea mai mică dimensiune în care există 2-forme non-decompozabile (sunt de forma $\psi = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$, unde $\{v_1 \dots v_4\}$ sunt liniar-independente). Hamilton a demonstrat că toate varitetăţile de curbură pozitiv definită sunt spaţii factor ale n-sferei pentru $n = 3$ (în [15]) şi $n = 4$ (în [16]). Pentru n general a fost demonstrat în [5] de către C. Böhm şi B. Wilking. Demonstraţiile se bazează pe fluxul Ricci, introdus mai întâi de Hamilton în [15]. Fluxul Ricci păstrează curbura pozitiv definită şi acţionează asupra varietăţii ca o ecuaţie neliniară de propagării a căldurii. Din păcate, fluxul Ricci nu păstrează curbura secţional pozitivă [25].

Dat fiind succesul fluxului Ricci pentru curbura pozitiv-definită, considerăm fluxurile geometrice ca metodă bună de abordare a curburii secţional pozitive. Pozitiva definire a unui operator de curbura R poate fi stabilită din semnele coeficienţilor polinomului caracteristic (semnele trebuie să fie alternante în funcţie de grad). Rădăcinile acestui polinom ne dau valorile critice ale lui $R(\psi, \psi)$, unde $\psi \in \Lambda^2, |\psi| = 1$. Mulţimea de zerouri a funcţiei determinant pe spaţiul operatorilor de curbură include frontiera mulţimii operatorilor pozitiv-definiţi. De asemenea, funţia determinant este ≥ 0 pentru toţi R semipozitiv definiţi.

Principala contribuţie a acestei teze este în capitolul 5 unde, pentru $n = 4$, găsim un obiect algebric care îndeplineşte pentru curbura secţional-pozitivă acelaşi rol ca şi polinomul caracteristic pentru curbura pozitiv-definită (Teorema 5.1.1). Acesta este po-

linomul $q(x) = \mathrm{disc}_{\mathrm{y}}(\det(xI + yK - R))$, unde K este forma volum pentru $n = 4$. Mulţimea rădăcinilor reale ale acestui polinom include mulţimea valorilor critice ale curburii seţionale. Pentru R cu $\mathrm{disc}(q) \neq 0$, cele două mulţimi coincid. Teorema lui Sturm aplicată lui q permite să determinăm dacă R e secţional-pozitiv. Funcţia $f(R) = \mathrm{disc}_{\mathrm{y}}(\det(yK - R))$ este analoagă determinantului. Mulţimea ei de zerouri include frontiera operatorilor de curbură secţional pozitivi, iar funcţia este ≥ 0 pentru toţi R secţional semipozitivi. În capitol sunt folosite metode de algebră liniară şi geometrie algebrică. Prin caracterizarea formelor decompozabile în dimensiune 4 ca fiind cele pentru care $\psi K \psi = 0$ (Lemele 5.2.3, 5.2.4), obţinem că valorile curburii secţionale sunt date de $\psi R \psi$ unde $\psi \in \Lambda^2$, cu $\psi K \psi = 0$ şi $\psi I \psi = 1$. Multiplicatorii Lagrange (Propoziţia 5.3.1) ne duc spre obiectul $xI + yK - R$, apoi calculăm o relaţie între existenţa unui ψ ce produce o valoare critică pentru curbura secţională, şi coeficienţii daţi de $\det(xI + yK - R)$ (Lema 5.3.2). În următoarea secţiune folosim metode algebrice pentru a recupera teoreme ale lui Thorpe legate de curbura pozitivă. Potenţiale aplicaţii pentru construcţia de fluxuri geometrice sunt examinate în Teorema 5.6.3. Găsirea unor fluxuri mai simple ce păstrează pozitivitatea curburii secţionale constituie un punct de plecare pentru cercetări viitoare.

Primul capitol e introductiv, prezentând noţiuni într-o manieră secvenţială. Întâi sunt introduse noţiunea de hartă, atlas şi varietate. Apoi urmează noţiunile de fibrat, fibratul tangent, şi câmpuri tensoriale. Definim apoi tensorul metric, varietăţi Riemanniene, şi conexiunile Koszul. Succedem prin conexiunea Levi-Civita şi Lema Fundamentală a geometriei Riemanniene. Prezentăm şi o a doua justificare a naturalităţii conexiunii Levi-Civita: dacă metrica g_{ab} este indusă de o imersie a n-varietăţii M în $\mathbb{R}^m$, spaţiul ambient are o conexiune euclidiană, calculată prin derivarea obişnută. Derivarea unui câmp vectorial pe varietate în spaţiul ambient va avea o componentă normală şi una tangentă. Conexiunea “naturală” asociată unei imersii în $\mathbb{R}^m$ va fi partea tangentă a conexiunii euclidiene dată de spaţiul ambient. Aceasta se dovedeşte a fi conexiunea Levi-Civita, care poate fi calculată direct din metrica g_{ab}, fără a face referinţă la imersie. Obţinem tensorul de curbură prin anticomutarea conexiunii, apoi arătăm cum simetriile tensorului Riemann reies din propietăţiile conexiunii Levi-Civita. $R_{abcd} = -R_{bacd}$ reiese din definiţia curburii ca anticomutator (identitatea Ricci), şi e valabilă pentru orice tip de conexiune. $R_{abcd} = -R_{abdc}$ reiese din compatibilitatea conexiunii cu metrica. Prima şi a doua identitate Bianchi rezultă din lipsa de torsiune. Simetria de interschimbare $R_{abcd} = R_{cdab}$ rezultă din cele anterioare. Elaborăm noţiunea de curbură secţională, şi arătăm că o varietate este plată (admite o hartă pentru care $g_{ab} = \delta_{ab}$) dacă şi numai dacă tensorul de curbură e nul.

Al doilea capitol este o dezvoltare şi examinare a următorului concept: date două metrici m şi g, diferenţa dintre conexiunile lor, mai exact, diferenţa dintre simbolurile lor Christoffel, poate fi scrisă sub forma $\Gamma^a_{cb}(m) - \Gamma^a_{cb}(g) = \frac{1}{2} m^{ax}(m_{xb;c} + m_{xc;b} - m_{bc;c})$ unde derivata covariantă (;) este dată de conexiunea indusă de g. Diferenţa dintre cele două conexiuni Levi-Civita este un pseudo-simbol Christoffel al primei metrici unde conexiunea dată de a doua metrică înlocuieşte derivata obişnuită. Formula standard a simbolului Christoffel se poate regăsi făcând cea de-a doua metrică euclidiană. Această generalizare ne permite să scriem hărţi unde atât domeniul cât şi codomeniul sunt înzestrate cu metrici Riemmanniene şi conexiunile induse de acestea. Date două metrici pe o varietate, putem calcula propietăţile geometrice ale uneia (de exemplu tensorul de curbură) folosind conexiunea şi curbura indusă de cealaltă. Obţinem generalizări ale expresiilor tensoriale în coordonate şi dăm şi o demonstraţie a teoremei lui Beltrami folosind acest formalism.

Al treilea capitol este o aplicaţie a ideilor din capitolul al doilea pentru noţiunea de imersii izometrice a n-varietăţilor în $\mathbb{R}^{n+k}$. Fie g_{ab} metrica varietăţii. Alegând un n-plan din $\mathbb{R}^{n+k}$, putem împărţi spaţiul ca $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^n$. O imersie izometrică locală a n-varietăţii în $\mathbb{R}^{n+k}$ este luată ca fiind o secţiune a $\mathbb{R}^k$-fibratului peste $\mathbb{R}^n$. Astfel se obţin k câmpuri scalare peste varietate, notate cu $h\tau$, $\tau \in \{1..k\}$, astfel încât metrica plată a n-planului este dată de $f_{ab} = g_{ab} - h\tau_{;a}h\tau_{;b}$. Folosim formulele din capitolul anterior pentru a scrie curbura lui $f_{ab} = g_{ab} - h\tau_{;a}h\tau_{;b}$ (care este nulă), ca o expresie în funcţie de curbura lui g, conexiunea lui g, şi f_{ab}. Rezultatul este o ecuaţie tensorială neliniară care leagă cele k câmpuri scalare de curbură lui g (Teorema 3.2.3). Arătăm că o imersie izometrică locală în $\mathbb{R}^{n+k}$ a varietăţii cu metrica g există dacă şi numai dacă putem găsi un k-tuplu de câmpuri scalare ce satisfac acea ecuaţie. Pentru cazul $k = 1$ avem un singur câmp scalar h, iar ecuaţia neliniară din Teorema 3.2.3 devine $\frac{h_{;pj}h_{;ik} - h_{;pk}h_{;ij}}{1 - g^{ab}h_{;a}h_{;b}} = R_{pijk}$. Aratăm că existenţa lui h este echivalentă cu satisfacerea ecuaţiilor Gauss şi Codazzi, unde $\Pi_{ab} = \frac{h_{;ab}}{(1 - g^{ab}h_{;a}h_{;b})^{1/2}}$. Câmpul scalar h reprezintă funcţia de "înălţime" a imersiei n-varieţăţii în $\mathbb{R}^{n+1}$. Obţinem o nouă demonstraţie a teoremei fundamentale a hipersuprafeţelor (Teorema 3.3.3). În următoarea secţiune, pentru un tensor Riemann pozitiv definit luat ca operator liniar peste spaţiul 2-formelor, dovedim că există un Π ce satisface ecuaţia lui Gauss dacă şi numai dacă componenta Weyl a logaritmului lui R ca operator este nulă. Rescriem ecuaţiile Gauss şi Codazzi într-o formă ce evidenţiază similaritatea cu teorema Weyl-Schouten (pentru $n \geq 4$ o varietate e conform-plată dacă şi numai dacă tensorul Weyl e nul). În secţiunea finală explorăm condiţiile algebrice ca un tensor de curbură să satisfacă ecuaţiile lui Gauss. Obţinem că un tensor de curbură pozitiv-definit (luat ca operator liniar pe 2-forme) ce satisface ecuaţia Gauss dacă şi numai dacă duce 2-forme decompozabile în 2-forme decompozabile.

Al patrulea capitol nu este legat de curbură, dar constituie o aplicaţie a tehnicilor invăţate în căutarea de obstruţii topologice pentru curbură. Cea mai simplă dintre acestea este teorema Gauss-Bonnet (integrala curburii Gausiene pe o suprafaţă este egală cu 2π ori caracteristica Euler). Observăm cum clasele caracteristice ale unui fibrat pot fi obstrucţii la curbură. Capitolul este o aplicaţie a teoriei obstruţiilor, prin care studiem paralelizibilitatea fibratului tangent la varietăţi 2 şi 3 dimensionale. Teorema principală afirmă că fibratul tangent al unei 2-varietăţi M este paralelizabil dacă şi numai dacă M este non-compactă sau de caracteristică Euler pară. Avem două demonstraţii, una deductivă bazată pe propietăţile claselor Stiefel-Whitney şi Wu şi una constructivă bazată pe teoria obstrucţiilor şi teorema de clasificare a suprafeţelor compacte.

Capitolul final e rezultat al studierii formulelor algebrice folosite în capitolul cinci. Formulele algebrice (cum ar fi determinantul) sunt de obicei scrise în funcţie de coeficienţii individuali ai obiectelor cărora le sunt aplicate. Pe de altă parte, ecuaţiile tensoriale sunt scrise ca sume de contracţii de produse tensoriale, unde indicii urmează de obicei reguli combinatorice. Deşi calculul folosind ecuaţii tensoriale e mai costisitor decât cel ce foloseşte formule directe, are avantajul de a fi formulat într-o manieră independentă de coordonate, deci mai adecvat pentru raţionamente geometrice. Obţinem ecuaţii tensoriale pentru formule algebrice, incluzând determinantul unei matrici, discriminantul polinomului caracteristic al unei matrici,şi rezultantul polinoamelor caracteristice a două matrici. Ca exemplu, formula pentru determinant este dată de $\det(M) = M^{a_1}_{[a_1} M^{a_2}_{a_2} \dots M^{a_n}_{a_n]}$, unde matricea M^a_b este luată ca un tensor tip $(1, 1)$ de dimensiune n. Aplicăm aceste rezultate pentru a rescrie obiectele algebrice ale capitolului anterior ca formule tensoriale.

Capitolul 1

Preliminarii

Un *tensor metric* este un tensor covariant de rang 2, simetric, şi pozitiv-definit. De obicei este notat prin g (eg. g_{ab}). Simetria poate fi exprimată ca $g_{ab} = g_{ba}$, iar pozitiv definirea ca $v^a g_{ab} v^b > 0, \forall v^c \neq 0$. Dat un tensor metric covariant g_{ab}, putem calcula şi inversul lui, tensorul metric contravariant g^{ab}. Acesta este definit prin $g_{ab}\, g^{bc} = \delta_a^c$, unde δ_a^c este tensorul idenitate, dat de simbolul Kronecker. Tensorul metric (atât cel covariant cât şi cel contravariant), poate fi folosit pentru a ridica sau coborâ indicii tensorilor, dându-ne o relaţie de echivalenttţă între tensorii covarianţi şi cei contravarianţi.

Definiţia 1.0.1. O *varietate Riemaniannă* este o varietate netedă M înzestrată cu un tensor metric g pe fibratul său tangent. Varietatea este notată ca (M, g).

Vom elabora conceptul de conexiuni pâna la definirea conexiunii Levi-Civita, care este conexiunea naturală asociată unei metrici Riemanniene şi cea mai cunoscută conexiune din geometria Riemanniană.

Reamintim că regulile de transformare a unui tensor în schimbarea de coordonate pot fi calculate din definiţia fibratului tangent: dată o hartă de schimbare de coordonate f^α, un vector contravariant se va transforma prin $v^{b_0} \circ f = (v \circ f)^{b_1} f^{b_0}_{,b_1}$, iar un vector covariant se va transforma prin $(v_{b_0} \circ f) f^{b_0}_{,b_1} = (v \circ f)_{b_1}$. Tensorii de ordin superior se transformă aplicând regulile anterioare pentru fiecare indice în parte.

O operaţie este independentă de coordonate dacă comută cu transformă rile date de schimbarea de coordonate. Derivata parţială este independentă de coordonate doar când e aplicată la câmpuri scalare. Rezultatul pentru orice alt tip de tensor va depinde de coordonate.

Acum vom descrie noţiunea de conexiune Koszul: Dat un fibrat vectorial $E \to M$ peste o varietate, o conexiune descrie un mod de a transporta vectorii fibratului de-a lungul spaţiului bază. Mai precis, o conexiune ne oferă un operator difereţial de-a lungul fibratului tangent, pentru secţiunile din fibratul E.

Definiţia 1.0.2. Fie X un câmp vectorial peste o varietate M, şi $\Gamma(E)$ spaţiul secţiunilor unui fibrat vectorial $E \to M$. O *conexiune Koszul* este o operaţie $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E \oplus T^*M)$ cu următoarele propietăţi:

$\nabla_X(V^\alpha + T^\alpha) = \nabla_X(V^\alpha) + \nabla_X(T^\alpha)$
$\nabla_{X+Y}V^\alpha = \nabla_X V^\alpha + \nabla_Y V^\alpha$
$\nabla_{fX}V^\alpha = f\nabla_X V^\alpha$
$\nabla_X(fV^\alpha) = f\nabla_X(V^\alpha) + (X^c f_{,c})V^\alpha.$

Definiţia 1.0.3. Dat un câmp vectorial X pe M, definim $\nabla_X : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ ca fiind *derivata covariantă* de-a lungul lui X. Pentru scrierea în coordonate, folosim litere greceşti pentru a indexa elemente din fibratul E şi litere latine pentru pentru a indexa elemente din fibratul tangent. Indicii superiori sunt folosiţi pentru tensori contravarianţi şi cei inferiori pentru tensori covarianţi.

Observaţia 1.0.4. Dată o hartă locală pentru un fibrat $E \to M$, o conexiune Koszul poate fi exprimată în coordonate ca:

$$\nabla_X(V^\alpha) = V^\alpha_{,c}X^c + \Gamma^\alpha_{\beta c}V^\beta X^c$$

unde Γ este *simbolul Christoffel*.

Pornind de la noţiunea de derivată covariantă, putem definit transportul paralel:

Definiţia 1.0.5. Fie $E \to M$ un fibrat vectorial peste M, ∇ o conexiune Koszul peste acel fibrat, şi $y : I \to M$ o curbă netedă parametrizată printr-un interval deschis I. O seţiune X al lui E se numeşte *paralelă peste y* dacă $\nabla_{\dot{y}}X = 0$. Dat un vector $V \in E_{y(0)}$, transportul paralel al lui V de-a lungul lui y este extensia lui V la o secţiune paralelă peste y. Aceasta este unic-definită de-a lungul curbei şi calculabilă prin integrare.

Prin regula produs putem extinde derivata covariantă la tensori de ordin superior peste fibrat.

1.1 Conexiuni afine, conexiunea Levi-Civita, şi Lema Fundamentală a geometriei Riemanniene

Definiţia 1.1.1. O *conexiune afină* este o conexiune Koszul peste fibratul tangent.

Scriind

$$\nabla_X T^{a_1 a_2 \cdots a_n}_{b_1 b_2 \cdots b_m} = T^{a_1 a_2 \cdots a_n}_{b_1 b_2 \cdots b_m ; c}X^c$$

putem considera o astfel de conexiune ca o operaţie de la câmpuri tensoriale de tip (k, l) la câmpuri tensoriale de tip $(k, l+1)$. Aceasta este derivata covarantă indusă de conexiune. Va fi indicată printr-un punct şi virgulă, $(;)$, în mod analog cu scrierea derivatei parţiale prin virgula.

Definiţia 1.1.2. O conexiune afină e *lipsită de torsiune* dacă şi numai dacă

$$\nabla_X V - \nabla_V X = [X, V]$$

unde $[X, V]$ reprezintă *Croşetul Lie*.

Prin scrierea în coordonate obţinem

$$T^a_{bc} V^b X^c = \nabla_X V^a - \nabla_V X^a - [X, V]^a.$$

Acesta este *tensorul de torsiune*. Obţinem $T^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb}$.

O conexiune afină este *lipsită de torsiune* dacă şi numai dacă T^a_{bc} e 0, altfel spus, simbolul ei Christoffel e simetric. Astfel, o conexiune lipsită de torsiune se mai numeşte şi *conexiune simetrică*. În scrierea Ricci, o conexiune e simetrică dacă şi numai dacă $f_{;ab} - f_{;ba} = 0$, pentru orice câmp scalar f.

Definiţia 1.1.3. Dată o metrică g, o conexiune afină este *compatibilă cu metrica* dacă satisface

$$\nabla_X (V^a K^b g_{ab}) = (\nabla_X V)^a K^b g_{ab} + V^a (\nabla_X K)^b g_{ab}.$$

În notaţia Ricci, proprietatea poate fi scrisă ca $g_{ab;c} = 0$. În notaţie vectorială, ecuaţia devine:

$$\nabla_X \langle K, V\rangle = \langle \nabla_X K, V\rangle + \langle K, \nabla_X V\rangle.$$

Teorema 1.1.4. (Lema Fundamentală a geometriei Riemanniene) *Fie (M, g) o varietate Riemmaniană. Atunci există şi este unică o conexiune compatibilă cu metrica, lipsită de torsiune. Aceasta este* conexiunea Levi-Civita *asociată metricii.*

Înainte de a trece la curbură, vom prezenta un mod alternativ de a arăta "naturalitatea" conexiunii Levi-Civita asociată unei varietăţi Riemanniene. Începuturile geometriei Riemanniene sunt date de "Teorema Egregium" al lui Gauss. Aceasta arată curbura secţională a unei suprafeţe ca fiind determinată numai din propietăţile intrinseci ale acesteia, şi nu din felul în care este imersată suprafaţa în spaţiu. Vom folosi o abordare similară pentru a deriva conexiunea Levi-Civita.

Fie $h^K : M \to \mathbb{R}^m$ o imersie a unei m-varietăţi în $\mathbb{R}^m$. Aceasta asociază varietăţii un m-tuplu de câmpuri scalare h^K, $K \in \{1 \cdots m\}$, reprezentând coodonatele imersiei pentru fiecare punct în spaţiul ambient $\mathbb{R}^m$. Jacobianul imersiei, $h^K_{,c}$, ne dă o transformare liniară de la fibratul tangent la componenta tangentă a fibratului ambient. $h^K_{,c}(x) : T_x M \to \mathbb{R}^m$ poate fi considerat ca o formă liniară sau ca un morfism între fibrări peste M:

$$h^K_{,c} : (TM \to M) \to ((\mathbb{R}^m \times M) \to M)$$

Spaţiul $\mathbb{R}^m$ are o metrică naturală dată de produsul dat (metrica Euclideană). Cu ajutorul Jacobianului $h^K_{,a}$ îi putem face un pullback prin imersie pentru a obţine o metrică naturală lui M:

$$g_{ab}(x) : T_x M \times T_x M \to \mathbb{R}$$

$$g_{ab} = h^K_{,a} h^K_{,b}$$

Spaţiul ambient $\mathbb{R}^m$ are şi o conexiune naturală asociată: tensorii din $\mathbb{R}^m$ sunt grupări de câmpuri scalare, pentru care derivata covariantă e derivata obişnuită.

Strategia noastră pentru a defini derivata covariată unui câmp vectorial v^k (luat ca secţiune a fibratului $TM \to M$) va fi să folosim $h^K_{,a}$ pentru a-l transforma într-o secţiune a fibratului euclidian, să aplicăm derivata obişnuită euclidiană pentru acea secţiune şi să folosim $h^{K,a}$ şi g^{ab} pentru a face pullbackul înapoi la o seţiune a lui $TM \to M$. Definim:

$$v^p_{;c} = h^{K,p}(h^K_{,a} v^a)_{,c}.$$

În coordonate locale, obţinem $v^p_{;c} = h^{K,p}(h^K_{,a} v^a)_{,c} = (g^{pb} h^K_{,b} h^K_{,ac})v^a + v^p_{,c}$.
Comparând cu $v^p_{;c} = \Gamma^p_{ac} v^a + v^p_{,c}$, simbolul nostru Christoffel va fi $\Gamma^p_{ac} = g^{pb} h^K_{,b} h^K_{,ac}$. Dar acesta este identic cu formula pe care o obţinem punând metrica indusă $g_{ab} = h^K_{,a} h^K_{,b}$ în simbolul Christoffel dat de conexiunea Levi-Civita: $\Gamma^p_{ac} = \frac{1}{2} g^{pm}(g_{ma,c} + g_{mc,a} - g_{ac,m})$. Conexiunea "naturală" a unei varietăţi imersate într-un spaţiu euclidian poate fi scrisă direct din metrica indusă, făra a face referire la imersie în sine. Aceasta este conexiunea Levi-Civita.

1.2 Curbura asociată unei conexiuni, tensorul Riemann şi curbura secţională

Definiţia 1.2.1. Fie $E \to M$ un fibrat vectorial, ∇ o conexiune Koszul pentru acel fibrat, Z o secţiune a lui E, şi X, Y câmpuri vectoriale pe M (secţiuni ale lui $TM \to M$). *Tensorul de curbură* al conexiunii e definit prin:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

În notaţia Ricci, aceasta devine:

$$R^\alpha{}_{\beta cd} Z^\beta X^c Y^d = \nabla_X \nabla_Y Z^\alpha - \nabla_Y \nabla_X Z^\alpha - \nabla_{[X,Y]} Z^\alpha$$

Este demonstrabil că $R^\alpha{}_{\beta cd}$ e într-adevăr un tensor.

Tensorul $R(X,Y)Z$ ne dă diferenţa infinitezimală în Z după transportul ei paralel de-a lungul paralelogramului definit de X şi Y. Curbura poate fi vazută ca obstrucţia la aplatizarea/trivializarea fibratului. Un fibrat vectorial peste un spaţiu simplu-conex este trivial dacă şi numai dacă admite o conexiune al cărei tensor de curbură este nul.

În coordonate locale, obţinem următoarea formulă pentru tensorul de curbură al unei conexiuni:

$$R^\alpha{}_{\beta cd} = \Gamma^\alpha_{\beta d,c} - \Gamma^\alpha_{\beta c,d} + \Gamma^\alpha_{\theta c}\Gamma^\theta_{\beta d} - \Gamma^\alpha_{\theta d}\Gamma^\theta_{\beta c}.$$

Definiţia 1.2.2. *Tensorul de curbură Riemann* (sau tensorul Riemann) este tensorul de curbură al conexiunii Levi-Civita asociată unei varietăţi Riemanniene (M, g).

Tensorul de curbură Riemann este unul dintre principalele obiecte de studiu ale geometriei Riemanniene. De obicei apare sub forma R^a_{bcd} (tensorul Riemann $(1,3)$) sau

$R_{abcd} = g_{am}R^m_{bcd}$ (tensorul Riemann $(0,4)$).În notaţia Ricci, formula pentru curbură este dată de:

$$R^a_{bcd}Z^bX^cY^d = (Z^b_{;c}Y^c)_{;d}X^d - (Z^a_{;c}X^c)_{;d}Y^d - Z^a_{;c}[X,Y]^c$$

Prin lipsa de torsiune a conexiunii ($[X,Y]^a = Y^a_{;c}X^c - X^a_{;c}Y^c$), formula devine:

$$Z^a_{;dc} - Z^a_{;cd} = R^a_{bcd}Z^b$$

Aceasta este *identitatea Ricci*.

1.2.1 Simetrii şi identităţi ale tensorului de curbură

Simetriile şi indetităţile tensorului Riemann reies din propietăţile conexiunii Levi-Civita.

Obserbvăm din definiţie că $R^\alpha{}_{\beta cd}Z^\beta X^cY^d = \nabla_X\nabla_Y Z^\alpha - \nabla_Y\nabla_X Z^\alpha - \nabla_{[X,Y]}Z^\alpha$ e antisimetric în indicii $[c,d]$. Relaţia

$$R^\alpha{}_{\beta cd} + R^\alpha{}_{\beta dc} = 0$$

este valabilă pentru orice tensor de curbură, indiferent de conexiune. Antisimetria dintre primul indice coborât şi al doilea rezultă din compatibilitatea conexiunii cu metrica:

$$0 = g_{ab;cd} - g_{ab;dc} = g_{am}R^m_{bcd} + g_{mb}R^m_{acd} = R_{abcd} + R_{bacd}$$

Prima şi a doua identitate Bianchi rezultă din lipsa de torsiune a conexiunii:

$$R^a_{bcd} + R^a_{cdb} + R^a_{dbc} = 0$$

$$R^a_{bcd;e} + R^a_{bde;c} + R^a_{bec;d} = 0$$

Simetria de interschimbare $R_{abcd} = R_{cdab}$ apare ca o consecinţă a simetriilor algebrice anterioare.

Într-o n-varietate imersată în $\mathbb{R}^n$, ale cărei coordonate sunt date de h^K, $K \in \{1..n\}$, tensorul de curbură poate fi scris ca $R_{abcd} = h^K_{;ac}h^K_{;bd} - h^K_{;ad}h^K_{;bd}$. Tensorul $h^K_{;ab}$ acţionează ca forma a doua fundamentală, luând valori în fibratul normal. Scrierea tensorului de curbură sub această forma ne dă o metoda alternativă de a-i demonstra simetriile. Este demonstrabil că toate simetriile tensorului de curbură şi ale derivatelor sale covariante de orice ordin pot fi deduse pornind de la identitatea Ricci şi simetriile fundamentale demonstrate mai sus [1].

1.2.2 Curbura secţională, teoreme de bază ale curburii

Definiţia 1.2.3. Curbura secţională e definită prin $K : Gr(2,n) \to \mathbb{R}$, $K(w) = R(w,w)$, unde $Gr(2,n)$ este Grassmannianul 2-planelor peste $\mathbb{R}^n$. O altă formă cunoscută pentru curbura secţională este dată de:

$$K(u,v) = \frac{R(u,v,u,v)}{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle\langle u,v\rangle}$$

Operatorul K asociază fiecărui 2-plan un număr ce reprezintă curbura secţională a planului. Cubura seţională e definită din tensorul Riemann. Datorită identităţii Bianchi, tensorul Riemann poate fi recuperat din curbura secţională. Obţinem teoremele:

Teorema 1.2.4. *Un tensor de curbură Riemann R_{abcd} este 0 dacă şi numai dacă curbura secţională dată de acesta este 0.*

Teorema 1.2.5. *Există un tensor de curbură unic de curbură secţională constantă 1. Acesta este operatorul identitate pe spaţiul 2-formelor $\bigwedge_n^2$.*

Un tensor de curbură este *secţional pozitiv* dacă $K(w) > 0, \forall w \in Gr(2,n)$. Tensorul Riemann poate fi considerat ca operator simetric pe $\bigwedge_n^2$, spaţiul 2-formelor peste $\mathbb{R}^n$. Un operator de curbură este *pozitiv definit* dacă şi numai dacă $R(w,w) > 0, \forall w \in \bigwedge_n^2$. Observăm că pozitiva-definire implică pozitivitatea secţională. Reciproca este adevărată numai pentru $n \leq 3$, deoarece pentru $n > 3$ există 2-forme care nu fac parte din Grassmannian (sunt 2-forme non-decompozabile, eg. $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$). Fluxul Ricci păstrează pozitiva-definire globală a operatorului de curbură, dar nu păstrează pozitivitatea secţională. Clasa varietăţilor cu operator de curbură pozitiv-definit este bine-înteleasă, dar există multe probleme nerezolvate legate de clasa varietăţilor secţional-pozitive. În capitolul 6 vom studia condiţiile algebrice pentru pozitivitatea secţională a operatorului de curbură, predominant pentru cazul $n = 4$, care este cea mai mică dimensiune pentru care pozitivitatea secţională şi pozitiva-definire a curburii nu coincid.

Există şi criterii intermediare de pozitivitate, mai slabe decât pozitiva-definire dar mai tari decât pozitivitatea secţională. Putem considera atât mulţimea R_c operatorilor de curbură şi mulţimea K a 4-formelor ca subspaţii a mulţimii S a operatorilor simetrici peste 2-forme. Identitatea algebrică Bianchi arată ortogonalitatea subspaţiilor R_c şi K, cu $S = R_c \oplus K$ cu $R_c \perp K$. Mulţimea K este compusă din exact acei operatori simetrici pe 2-forme a căror curbură secţională este 0. Prin urmare, sumarea unui operator de curbură cu o 4-formă nu îi schimbă curbura secţională. Aceasta ne duce la o nouă formă de pozitivitate.

Definiţia 1.2.6. Un operator de curburăl R e *puternic pozitiv* (strongly positive) dacă există o 4-formă w astfel încât $R + w$ este pozitiv-definit. [4].

Toţi operatorii secţional pozitivi sunt puternic pozitivi când $n = 4$, dar nu şi pentru $n \geq 5$ [29]. În capitolul 6 al lucrării determinăm condiţii algebrice pentru curbura secţional pozitivă în dimensiune 4 şi utilizăm metode algebrice pentru a recupera rezultate ale lui Thorpe despre curbura puternic-pozitivă [29].

Lema 1.2.7. *Fie N o varietate Riemanniană simplu-conexă cu tensor de curbură nul. Atunci transportul paralel dintre două puncte nu depinde de calea luată între ele.*

Teorema 1.2.8. *Fie (M,g) o n-varietate Riemaniană cu tensor de curbură nul. Atunci există un set de coordonate sub care M este local izomorfă cu $\mathbb{R}^n$ (coordonate în care tensorul metric ia forma δ_{ab}).*

Propietăţile şi formulele din capitolul acesta vor fi utilizate în capitolele următoare.

Capitolul 2

Exprimarea curburii şi conexiunii unei metrici în funcţie de altă metrică

Introducere

Dată o metrică g pe o varietate, o a doua metrică m poate fi gândită ca un câmp de tensori simetrici pozitiv-definiţi de rang 2. Aici calculăm expresii pentru conexiunea şi curbura lui m scrise în funcţie de curbura lui g şi anumite combinaţii de derivate covariante ale lui m (luate faţă de conexiunea Levi-Civita indusă de g). Acestea sunt generalizări ale expresiilor în coordonate, care pot fi recuperate punând g ca metrica euclidiană indusă de o hartă. Astfel, derivata covariantă a lui g devine derivata obişnuită, curbura lui g dispare şi formulele rezultate coincid cu expresiile în coordonate ale conexiunii şi curburii lui m.

2.1 Convenţii de notaţie

Deoarece vom folosi derivatele covariante de la mai multe metrici, avem nevoie de o notaţie ce le deosebeşte. Toate formulele vor avea un prim parametru ce specifică metrica a cărei conexiune este folosită. Pot exista parametri adiţionali ce fac referinţă la variabilele folosite în formulă. Ridicarea şi coborârea indicilor va fi explicită, pentru a evita confuzia cu privire la metrica folosită. Ca exemplu, avem: $F^d_e(g_{ab}, v^c) = v^d_{;e}$.
Această formulă specifică derivata covariantă a unui vector v^d (al doilea parametru), în funcţie de conexiunea Levi-Civita indusă de primul parametru. Când nu trebuie să specificăm toate variabilele, putem prescurta ca $v^d_{;e}(g_{ab})$ sau $v^d_{;e}(g)$.
Definim metrica locală euclidiană indusă de o hartă ca fiind acea metrică care, în coordonatele induse de hartă, ia forma $g_{ab}(p^1, p^2, ...p^n) = \delta_{ab}$. O vom nota ca δ_{ab}. Vom avea $v^d_{;e}(\delta) = v^d_{,e}$, unde δ e indusă de coordonatele alese.

2.2 Recuperarea conexiunii unei metrici

Date două metrici m şi g, dorim să obţindem scrierea conexiunii Levi-Civita a lui m, în funcţie de g. Pentru un câmp vectorial v^a, ştim că $v^a_{;b}(m) - v^a_{;b}(g)$ este un tensor (nu depinde de coordonate). Scriind termenii explicit, ştim că ia forma $K^a_{cb}v^c$, unde K^a_{cb} e diferenţa dintre simbolurile Christoffel în coordonatele alese. Vom găsi o expresie pentru K^a_{cb} în funcţie de conexiunea lui g.

Definim $\Gamma^a_{bc}(g,m) = \frac{1}{2}m^{an}(m_{nb;c} + m_{nc;b} - m_{bc;n})$.
Putem recupera simbolul Christoffel al unei metrici g într-o hartă locală ca fiind $\Gamma^a_{bc}(\delta, g)$.
Avem $v^a_{;b}(m) - v^a_{;b}(g) = K^a_{cb}v^c = (\Gamma^a_{cb}(\delta, m) - \Gamma^a_{cb}(\delta, g))v^c$
$\Rightarrow K^a_{cb} = \Gamma^a_{cb}(\delta, m) - \Gamma^a_{cb}(\delta, g)$

Alegem coordonate exponenţiale pentru metrica g într-un punct p. În acel punct, $\Gamma^a_{cb}(\delta, g)$ dispare, lăsând $K^a_{cb} = \Gamma^a_{cb}(\delta, m)$. Aceasta este o expresie în funcţie de m şi derivatele parţiale de ordinul 1 a lui m. Dar, în p, aceste derivate coincid cu derivata covariantă indusă de g. În coordonatele date, K^a_{cb} în punctul p ia forma $\Gamma^a_{cb}(\delta, m) = \Gamma^a_{cb}(g, m)$. Dar expresia $\Gamma^a_{cb}(g, m)$ este independentă de coordonate.
Astfel, am obţinut o expresie independentă de coordonate a diferenţei dintre două conexiuni, scrisă în funcţie de conexiunea indusă de g. Obţinem următoarea teoremă:

Propoziţia 2.2.1. *Date două metrici m şi g, şi un câmp vectorial v^a, vom avea:*
$v^a_{;b}(m) = v^a_{;b}(g) + \Gamma^a_{cb}(g, m)v^c$.

Observăm cum scrierea derivatei covariante induse de m în funţie de cea indusă de g este aproape identică cu expresia în coordonate a derivatei covariante (diferenţa fiind "modificarea" simbolului Christoffel). Recuperăm expresiile în coordonate prin $g = \delta$:
$v^a_{;b}(m) = v^a_{;b}(g) + \Gamma^a_{cb}(g, m)v^c$ devine
$v^a_{;b}(m) = v^a_{;b}(\delta) + \Gamma^a_{cb}(\delta, m)v^c$, rezultând
$v^a_{;b} = v^a_{,b} + \Gamma^a_{cb}v^c$, unde Γ e simbolul Christoffel al lui m.
Prin $\Gamma^a_{cb}(g, m) = \Gamma^a_{cb}(\delta, m) - \Gamma^a_{cb}(\delta, g)$, obţinem următoarea afirmaţie:

Propoziţia 2.2.2. *Date trei metrici m, g and h, avem:*
$\Gamma^a_{cb}(m, g) + \Gamma^a_{cb}(g, h) + \Gamma^a_{cb}(h, m) = 0$.

În general, simbolurile Christoffel sunt folosite pentru a recupera conexiunea şi derivata covariantă a unei metrici din expresia în coordonate. Dar relaţiile obţinute permit aplicarea la problema inversă: putem recupera expresia simbolurilor Christoffel a metricii g într-o hartă dată de coordonate, prin aplicarea derivatei covariante a lui g la metrica euclidiană δ indusă de hartă:
$\Gamma^a_{cb}(m, g) + \Gamma^a_{cb}(g, h) + \Gamma^a_{cb}(h, m) = 0$
$\Gamma^a_{cb}(m, m) = 0$,
$\Gamma^a_{cb}(g, m) + \Gamma^a_{cb}(m, g) = 0$.
În particular: $\Gamma^a_{cb}(\delta, g) = -\Gamma^a_{cb}(g, \delta)$.

Simbolul Christoffel al unei hărţi de coordonate poate fi recuperat prin aplicarea derivatei covariante la metrica euclideană indusă de hartă. Hărţile de coordonate pot fi studiate ca obiecte geometrice prin intermediul metricilor euclidiene pe care le induc.

2.3 Recuperarea tensorului de curbură

Definim $R^l_{ijk}(g,m) = \Gamma^l_{ik;j} - \Gamma^l_{ij;k} + \Gamma^l_{js}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^l_{ks}\Gamma^s_{ij}$,
unde parametrii liberi (g,m) sunt consideraţi ca fiind "moştteniţi" de fiecare instanţă a lui Γ (eg: $\Gamma^l_{ik;j}$ e prescurtare pentru $\Gamma^l_{ik;j}(g,m)$). Tensorul de curbură indus de o metrică g poate fi recuperat prin $R^l_{ijk}(\delta,g)$.

Deoarece putem scrie conexiunea lui m în funcţie de g, putem folosi scrierea curburii în funţie de conexiune: $V_{i;jk}(m) - V_{i;kj}(m) = V_l R^l_{ijk}(\delta,m)$ (identitatea Ricci). Expandând formula şi grupând termenii, obţinem:

Teorema 2.3.1. *Date două metrici m şi g, vom avea urmă toarea relaţie:*
$R^l_{ijk}(\delta,m) = R^l_{ijk}(\delta,g) + R^l_{ijk}(g,m)$.
Date trei metrici m, g şi h, vom avea urmă toarea relaţie:
$R^l_{ijk}(m,g) + R^l_{ijk}(g,h) + R^l_{ijk}(h,m) = 0$.

Acesta este un proces analog cu cel al obţinerii expresiilor în coordonate pentru R^l_{ijk} prin expandarea anticomutatorului. Diferenţa constă în "restul" de curbură dat de g, deoarece derivatele metricii de bază nu mai comută. Formula standard în coordonate poate fi regăsită setând $g = \delta$. Restul de curbură dispare, deoarece metricile euclidiene sunt caracterizate prin curbura nulă.

Putem obţine astfel de equaţii şi pentru tensorul Ricci, prin contracţionarea tensorului Riemman cu δ^j_l. E de remarcat faptul că tensorii care apar în tipul acesta de sume triunghiulare sunt invarianţi la rescalarea metricii printr-o constantă (este o condiţie necesară dar nu suficientă). Simbolurile Christoffel de tipul întâi pot satisface astfel de relaţii, spre deosebire de simbolurile Christoffel de tipul 2.

De asemenea, putem caracteriza când o metrică are curbură plata făra a apela la coordonate locale sau la conexiunea metricii:

Teorema 2.3.2. *Dându-se două metrici m şi g, m este plată dacă şi numai dacă*
$R^l_{ijk}(\delta,g) + R^l_{ijk}(g,m) = 0$.

Formulele antecedente ultilizează pe m ca obiect, dar folosesc numai conexiunea şi curbura induse de g pentru a-i deriva propietăţile geometrice.

2.4 Teorema lui Beltrami

Date doua metrici m şi g proiectiv echivalente (care au acelaşi set de geodezice), putem aplica metodele de mai sus pentru a scrie curbura lui g în funcţie de curbura şi conexiunea lui m. Luând cazul când curbura lui m e constantă, obţinem o nouă demonstraţie a teoremei lui Beltrami:

Teorema 2.4.1. *Fie g, m două metrici pe o varietate de dimensiune $n > 1$, astfel încât curbura lui m este constantă. Dacă m şi g sunt proiectiv echivalente (au acelaşi set de geodezice) atunci şi curbura lui g este constantă.*

2.5 Tensorul de curbură de tip (4,0)

Putem folosi Teorema 2.3.1 pentru a calcula tensorul $R_{lijk}(\delta, m)$. Spre deosebire de tensorul de curbură de tip $(3, 1)$, acesta nu este invariant la rescalarea metricii, dar tensorul de curbură de tip $(4, 0)$ este des folosit în contextul geometriei Riemanniene.

Teorema 2.5.1. *Date două metrici m şi g, avem următorarea relaţie:*
$$R_{lijk}(\delta, m) = (\tfrac{1}{2}(m_{lk;ij} + m_{ij;lk} - m_{ki;lj} - m_{lj;ik}) + m_{np}(\Gamma^n_{ij}\Gamma^p_{lk} - \Gamma^n_{lj}\Gamma^p_{ik}))(g, m) +$$
$$+\tfrac{1}{2}(m_{ix}{R_l}^x{}_{jk} + m_{lx}{R^x}_{ijk})(\delta, g).$$

Aceasta exrpimă tensorul de tip $(4, 0)$ de curbură R_{lijk} al lui m în funţie de metrica dată de m şi conexiunea şi curbura date de g. Ca şi în formulele anterioare, expresia în coordonate a lui R_{lijk} este recuperată setând $g = \delta$.

Teorema 2.5.2. *Fie m, g două metrici, şi p un punct pentru care $\Gamma^p_{lk}(m, g) = 0$. În punctul p vom avea $R_{lijk}(\delta, m + g) = R_{lijk}(\delta, m) + R_{lijk}(\delta, g)$.*

Observăm cum simbolul Christoffel "relativ" al două metrici (calculabil ca diferenţa dintre simbolurile lor Christoffel individuale într-un set de coordonate date) poate fi văzut ca obstrucţia la linearitatea tensorului $(4, 0)$ de curbură în funcţie de metrică.

Concluzie

Formulele de mai sus sunt generalizări ale hărţilor de coordonate, pentru cazuri în care metricile asociate codomeniilor hărţii de coordonate sunt non-euclidiene. Pot avea multe aplicaţii, de exemplu studierea unor deformări prin care o metrică devine plată, sau studiul unor hărti de coordonate între două varietăţi Riemanniene.

Capitolul 3

Imersii izometrice ale varietăţilor Riemanniene în spaţii euclidiene de codimensiune k

În capitolul acesta folosim metodele şi formulele definite în capitolul anterior pentru a da condiţii ce caracterizează existenţa unei imersii izometrice locale a unei n-varietăţi Riemanniene n-dimensionale în spaţiul euclidiean $\mathbb{R}^{n+k}$. Condiţiile obţinute constau în existenţa locală a unui k-tuplu de câmpuri scalare ce satisfac o ecuaţie non-liniară ce implică tensorul de curbură Riemannian al lui g. Luând $k = 1$, folosim această ecuaţie pentru a recupera teorema fundamentală a hipersuprafeţelor. În cazul varietăţilor secţional-pozitive cu $n \geq 3$, rescriem rezolvabilitatea ecuaţiilor Gauss şi Codazzi ca anularea unei obstruţii construită din logaritmul tensorului Riemann. Teorema rezultată este similară cu teorema Weyl-Schouten, sugerând astfel un paralelism între n-varietăţile conform-plate şi cele ce admit o imersie izometrică în $\mathbb{R}^{n+1}$. Capitolul este bazat pe articolul [10] scris de author.

Problema imersiei varietăţilor în spaţiul euclidean a fost amănunţit studiată. Clasele Stiefel-Whitney [18], teoremele de imersie Whitney şi Nash [17] şi teorema Cartan-Janet ne oferă limite inferioare pentru numărul de dimensiuni necesar imersiei varietăţii în spaţiul euclidean. Aici vom studia problema inversă: dacă fixăm numărul de dimensiuni m al spaţiului ambient euclidean, ce ne poate spune existenţa (locală) a unei imersii izometrice despre metrica varietăţii. Aceasta acţionează ca un soi de măsură a complexităţii metricii, cu cea mai smiplă metrică necesitând cele mai puţine dimensiuni pentru imersia izometrică: o n-varietate admite o imersie izometrică locală în $\mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă metrica ei este plată.

În secţiunea 3.2 scriem imersia locală a n-varietăţii (M, g) în $\mathbb{R}^{n+k}$ ca o secţiune a fibratului $\mathbb{R}^k$ peste o n-varietate plată (M, f). Astfel, existenţa locală a imersiei devine echivalentă cu existenţa unui k-tuplu de câmpuri scalare $h\tau$, $\tau \in \{1..k\}$, astfel încât $f_{ab} = g_{ab} - h\tau_{;a} h\tau_{;b}$ este o metrică plată pozitiv-definită.

Platitudinea lui f este caracterizată de nulitatea tensorului de curbură. Aplicăm formule ce leagă curburile a două metrici, din Teorema 2.3.2, pentru a scrie curbura lui f în funcţie de conexiunea şi curbura lui g. Astfel rescriem existenţa unei imersii izometrice locale a n-varietăţii în $\mathbb{R}^{n+k}$ ca existenţa unui k-tuplu de scalari ce satisface o ecuaţie neliniară în curbura şi conexiunea lui g:

$$(h\alpha_{;pj} h\beta_{;ik} - h\alpha_{;pk} h\beta_{;ij})(\delta\alpha\beta - h\alpha_{;a} h\beta_{;b} g^{ab})^{-1} = R_{pijk},$$

unde f e pozitiv-definit (Teorema 3.2.3).

În secţiunea 3.3 studiem ecuaţia anterioară pentru k=1, obţinând:

$$\frac{h_{;pj}h_{;ik} - h_{;pk}h_{;ij}}{1 - g^{ab}h_{;a}h_{;b}} = R_{pijk},$$

unde pozitiva definire a lui f devine condiţia $g^{ab}h_{;a}h_{;b} < 1$. Astfel caracterizăm existenţa locală a unei imersii isometrice a (M, g) în $\mathbb{R}^{n+1}$ ca fiind echivalentă cu existenţa unui câmp scalar h ce satisface condiţiile de mai sus. Acest h joacă rolul unei coordonate asociate de înaltime peste varietatea plată (M, f), pentru a defini imersia lui (M, g) în $\mathbb{R}^{n+1}$. Arătăm echivalenţa acestui criteriu cu ecuaţiile Gauss şi Codazzi, setând

$$\Pi_{ab} = \pm h_{;ab}/(1 - g^{ab}h_{;a}h_{;b})^{1/2}.$$

Ecuaţia Codazzi devine condiţie de integralitate pentru recuperarea lui h din $\Pi_{ab} = \pm h_{;ab}/(1 - g^{ab}h_{;a}h_{;b})^{1/2}$ ce satisface ecuaţia lui Gauss, şi condiţii iniţiale într-un punct. Folosim aceste ecuaţii pentru a da o nouă demonstraţie a teoremei fundamentale a hipersuprafeţeleor (Teorema 3.3.3).

În secţiunea 3.4 rescriem ecuaţiile Gauss şi Codazzi sub o nouă formă pentru varietăţile de curbură pozitivă. Luând ${R_{ab}}^{cd}$ ca operator pe spaţiul 2-formelor, arăţăm că există Π_{ab} ce satisface

$$\Pi_{ac}\Pi_{bd} - \Pi_{ad}\Pi_{bc} = R_{abcd}$$

dacă şi numai dacă componenta Weyl a lui R^*_{abcd} e nulă, unde ${R^*_{ab}}^{cd} = ln({R_{ab}}^{cd})$ (logaritmul operatorului de curbură). Datorită curburii pozitive, Π_{ab} este unic definit ca $\Pi_{ab} = \pm e^{P^*_{ab}}$ unde P^*_{ab} e componenta Schouten a lui ${R^*_{ab}}^{cd}$. Întărim aceste rezultate şi rescriem teorema fundamentală a hipersuprafeţelor într-o formă analoagă teoremei Weyl-Schouten, care caraterizează varietăţile conform-plate. Rezultatul final e demonstrat în secţiunea 3.5 ca Teorema 3.5.1:

Teorema 3.5.1. *Pentru $n \geq 3$, o n-varietate Riemmaniană M cu operator de curbură pozitiv-definit admite o imersie izometrică locală în $\mathbb{R}^{n+1}$ dacă şi numai dacă,*

când $n = 3$, avem $e^{P^*}_{a[b;c]} = 0$, şi

când $n > 3$, avem $C^*_{abcd} = 0$,

unde C^*_{abcd} şi P^*_{ab} sunt tensorii Weyl şi Schouten ai lui ${R^*_{ab}}^{cd} = \ln({R^*_{ab}}^{cd})$.

Observăm asemănarea cu teorema Weyl-Schouten:

Teorema 3.5.2 (Weyl-Schouten). *Pentru $n \geq 3$, o n-varietate este conform-plată dacă şi numai dacă,*

când $n = 3$, avem $P_{a[b;c]} = 0$, şi

când $n > 3$, avem $C_{abcd} = 0$,

unde C_{abcd} şi P_{ab} sunt tensorii Weyl şi Schouten ai lui R_{abcd}.

În secţiunea 3.6, studiem subvarietăţile obţinute prin intersecţia imersiei lui (M, g) în $\mathbb{R}^{n+1}$ cu un n-plane. Acestea pot fi definite ca regiunile în care h este constant, pentru anumite alegeri ale lui h. Obţinem formula pentru curbura acestor subvarietăţi, fiind egală cu restricţia la subvarietate a curburii varietăţii ambiente, multiplicată cu un factor de scalare dat de $\frac{1}{g^{mn}h_{;m}h_{;n}}$ (acesta este mai mare sau egal cu 1). Ca exemplu, intersecţia unei n-sfere cu un n-plan ne va da o $n-1$-sferă de curbură pozitivă mai mare sau egală cu cea a n-sferei. Intersecţia imersiei în $\mathbb{R}^{n+1}$ a unei n-varietăţi plate cu un n-plat ne va da o $n-1$-varietate plată.

În secţiunea 3.7, dat un tensor de curbură R_{abcd}, studiem condiţiile algebrice pentru existenţa unui Π_{ab} ce satisface ecuaţia lui Gauss. În Teorema 3.7.2 arătăm că, pentru $n \geq 3$, un R_{abcd} secţional pozitiv poate satisface ecuaţia lui Gauss dacă şi numai dacă duce 2-forme decompozabile în 2-forme decompozabile.

Capitolul 4

Paralelizibilitatea fibratului tangent pentru varietăţi 2 şi 3-dimensionale

În acest capitol utilizăm teoria obstrucţiilor pentru a găsi condiţii necesare şi suficiente paralelizibilităţii fibratelor tangente pentru varietăţile 2 şi 3-dimensionale.

Prima teoremă principală (Teorema 4.3.5) afirmă că, pentru o varietate 2-dimensională M, fibratul ei tangent TM (luat ca varietate 4-dimensională) e paralelizabil dacă şi numai dacă spaţiul bază M e non-compact sau de caracteristică Euler pară. Altfel spus, pentru o 2-varietate M, TM e paralelizabil dacă şi numai dacă cea de-a doua clasă Stiefel-Whitney al lui M e zero.

Prezentăm două demonstraţii ale acestui rezultat. Prima este un argument direct ce se foloseşte de propietăţile claselor caracteristice Stiefel-Whitney şi Wu. Cea de-a două utilizează teorema de clasificare a suprafeţelor pentru a construi în mod explicit obstrucţia.

Cea de-a doua teoremă principală (Teorema 4.5.2) afirmă că, dată o 3-varietate M, fibratul ei tangent TM e paralelizabil dacă şi numai dacă $w_1(M) \smile w_1(M) = 0$, unde $w_1(M)$ e prima clasă Stiefel-Whitney al lui M şi $\smile$ e produsul-cupă ("cup product", [6], Chapter VI, Definition 4.1). Demonstraţia se foloseşte atât de clasele Stiefel-Whitney cât şi de teoria generală a obstrucţiilor pentru a obţine rezultatul.

Capitolul e structurat în felul următor: Teorema 4.2.1 e folosită ca punct de plecare pentru ambele demonstraţii. Aceasta afirmă că, dată o varietate M, TM e paralelizabil dacă şi numai dacă fibratul dat de suma Whitney $TM \oplus TM \to M$ e trivial. Demonstraţia ei se bazează pe faptul că M este o retracţie al lui TM, iar pullbackul fibratului $TTM \to TM$ prin morfismul de retracţie e izomorf cu fibratul $TM \oplus TM \to M$. Această teoremă e importantă pentru simplificarea problemei noastre: în loc să calculăm obstrucţiile pentru TTM peste TM, le vom calcula pentru $TM \oplus TM$ peste M.

Prima demonstraţie a Teoremei 4.3.5 e o abordare directă bazată pe clasele Stiefel-Whitney şi Wu. Demonstraţia e structurată ca o înlănţuire de 3 echivalenţe. Fie M o suprafaţă.

Teorema 4.3.1 afirmă că un n-fibrat $N \to M$ peste o 2-varietate M cu $n > 2$ e trivial dacă şi numai dacă primele două clase Stiefel-Whitney ale lui $N \to M$ dispar.

Teorema 4.3.2 afirmă că $TM \oplus TM \to M$ e trivial dacă şi numai dacă cea de-a doua clasă Stiefel-Whitney al lui $TM \oplus TM \to M$ e zero. Este obţinută prin aplicarea Teoremei

4.3.1 pentru $N = TM \oplus TM$.

Teorema 4.3.4 afirmă că cea de-a doua clasă Stiefel-Whitney a lui $TM \bigoplus TM \to M$ e zero dacă şi numai dacă cea de-a doua clasă Stiefel-Whitney a lui $TM \to M$ (cea de-a doua clasă Stiefel-Whitney a varietăţii M) e zero.

Teorema 4.3.3 afirmă că a cea de-a doua clasă Stiefel-Whitney a lui M e zero dacă şi numai dacă M e noncompact sau de caracteristică Euler zero.

Combinând aceasta cu Teorema 4.2.1, obţinem rezultatul pentru cazul 2-dimensional, Teorema 4.3.5.

În cea de-a doua demonstraţie a teoremei 4.3.5, enunţăm o metodă de a calcula obstrucţii la trivialitatea unui fibrat peste o sumă conexă din obstrucţiile fibratelor peste componente şi morfismul de lipire pe frontiera comună a sumei. Aceasta ne permite să calculăm obstrucţia pentru $T(N\#M) \oplus T(N\#M) \to (N\#M)$ din obstrucţiile pentru $TM \oplus TM \to M$ şi $TN \oplus TN \to N$. Teorema de clasificare pentru suprafeţe compacte afirmă că orice 2-varietate compactă este fie o sferă, fie o sumă conexă de tori, fie o sumă conexă de plane proiective. Teoremele 4.4.1-4.4.4 calculează explicit obstrucţiile pentru cazurile de bază ale sferei, torului şi planului proiectiv. Folosind Teorema 4.3.5 şi metoda noastră pentru sume conexe, calculăm explicit obstrucţia pentru trivialitatea lui $TM \oplus TM \to M$ când M e o suprafaţă compactă. Aceasta e 0 cu exceţia cazului când M e o sumă a unui număr impar de plane proiective sau, analog, când are caracteristica Euler impară. Combinând cu o analiză separată a cazului non-compact cu Teorema 4.2.1, obţinem din nou Teorema 4.3.5.

Teorema 4.4.6 studiază paralelizibilitatea $TM - M$, fibratul tangent al unei 2-varietăţi M, din care secţiunea nulă a fost scoasă. Obţinem că $TM - M$ e mereu paralelizabil, spre deosebire de TM. În cazul orientabil paralelizibilitatea lui $TM - M$ a fost folosită de Berwald şi construită explicit sub forma reperelor Berwald.

Ultima secţiune se preocupă de obţinerea unor rezultate analoage teoremelor 4.3.5 şi 4.4.6 pentru cazul 3-dimensional. Sunt folosite atât teoria obsrucţiilor cât şi propietăţi ale claselor Stiefel-Whitney din demonstraţiile anterioare.

Teorema 4.5.1 afirmă că un fibrat vectorial $N \to M$ peste o 3-varietate M e trivial dacă şi numai dacă restricţia lui N la 2-scheletul lui M e trivială. Pentru aceasta se bazează pe teoria obstrucţiilor.

Teorema 4.5.2 afirmă că pentru o 3-varietate M, fibratul tangent TM e paralelizabil dacă şi numai dacă $w_1(M) \smile w_1(M) = 0$, unde $w_1(M)$ e prima clasă Stiefel-Whitney al lui M. Demonstraţia combină teoremele 4.2.1, 4.5.1, şi 4.3.1.

Teorema 4.5.4 afirmă că în prezenţa unui câmp vectorial lipsit de zerouri pe M, paralelizibilitatea lui $TM - M$ este echivalentă cu paralelizibilitatea lui TM (demonstraţia se bazează pe folosirea câmpului vectorial pentru a construi un difeomorfism între TM şi o submulţime a lui $TM - M$). Arătând că varietăţile de dimensiune impară (în particular 3-varietăţile) admit câmpuri vectoriale lipsite de zerouri, obţinem Teorema 4.5.5, care este un analog al Teoremei 4.4.6. Aceasta afirmă că, pentru M varietate de dimensiune impară, paralelizibilitatea lui TM este echivalentă cu paralelizibilitatea lui $TM - M$. Observăm diferenţa între criterii faţă de cazul bidimensional.

Capitolul 5

Condiţii algebrice pentru pozitivitatea curburii secţionale

În acest capitol examinăm condiţiile algebrice pentru pozitivitatea secţională a operatorului de curbură Riemann. Obţinem condiţii suficiente pentru $n = 4$, şi o caracterizare completă pentru o submulţime densă deschisă a operatorilor de curbură în dimensiune 4. Studiem şi posibile generalizări pentru dimensiuni mai mari.

Curbura secţional pozitivă este un domeniu de studiu interesant. Operatorii de curbură pozitiv-definiţi sunt usor de caracterizat algebric: valorile critice ale unui operator de curbură sunt rădăcinile polinomului său caracteristic. Astfel, operatorul e pozitiv definit dacă şi numai dacă coeficienţii polinomului caracteristic au semne alternante. În acest capitol aplicăm metodele geometriei algebrice pentru a obţine un obiect analog "polinomului caracteristic", pentru curbura secţională. În dimensiune 4, pentru o mulţime densă deschisă din setul operatorilor de curbură, rădăcinile reale ale polinomului nostru obişnut coincid cu valorile critice ale curburii secţionale. Formula rezultă din aplicarea discriminantului la un obiect algebric construit din operatorul de curbură. Rezultate similare au fost obţinute recent în [3], Theorem C.

Discriminantul unui polinom p de grad d e o expresie algebrică în coeficienţii polinomului p, specifică în funcţie de grad, care dă zero dacă şi numai dacă acesta are o rădăcină (complexă) multiplă. Discriminantul este egal cu determinantul matricei Sylvester a lui p şi p'. Când aplicăm discriminantul la un polinom de grad d al cărui coeficientul dominant 0, expresia devine 0. Aplicarea discriminatului de grad d unui polinom de coeficient dominant 0 nu recuperează expresia discriminantului de grad $d - 1$ în coeficienţii rămaşi.

Notăm cu $\mathrm{disc}_y(p(x, y))$ discriminantul expresiei algebrice $p(x, y)$, luată ca un polinom în y. Din moment ce lucrăm într-un singur punct, nu scriem explicit indicii tensorilor. Metrica ne dă o relaţie de echivalenţă între indicii covarianţi şi contratravarianţi, permiţându-ne şă obţinem mereu cantităţi geometrice.

Valorile critice ale curburii secţionale pot fi caracterizate printr-un Lagrangian. Metoda aceasta a fost aplicată de Thorpe [29], Singer şi Thorpe, şi Püttmann. Construim Lagrangianul pentru dimensiune 4 în Propoziţia 5.3.1, şi pentru dimensiune $n > 4$ în Secţiunea 4. În cazul 4-dimensional, obţinem:

$$L_R(v, x, y) = vRv - x \cdot (vIv - 1) - y \cdot (vKv)$$

unde K este forma volum, şi I este operatorul identitate pe spaţiul 2-formelor. Valorile critice ale curburii secţionale sunt componentele x din punctele critice (v, x, y) ale Lagrangianului.

Definim (x, y) ca fiind un *punct critic* al operatorului R dacă există v astfel încât (v, x, y) să fie punct critic al Lagrangianului (Definiţia 5.3.4).

Prin Teorema 5.3.5, oferim o caracterizare a acestor puncte în funţie de coeficienţii lui $p(x, y) = \det(R - xI - yK)$, eliminând astfel dependenţa de v şi făcând trecerea de la o perspectivă geometrică la una algebrică.

Definiţia 5.3.4. *Date fiind R un operator de curbură în dimensiune 4 şi K forma volum, numim un punct $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$* punct critic *pentru R dacă şi numai dacă coeficienţii celui mai mic polinom omogen nenul al lui $p(x, y) = \det((R - x_1 I - y_1 K) - xI - yK)$ nu au toţi acelaşi semn şi nici nu sunt de semne alternante. Putem spune în mod echivalent, (x_1, y_1) este un punct critic al lui R dacă există un vector v astfel încât (v, x_1, y_1) e un punct critic al Lagrangianului L_R.*

Teorema 5.3.5. *Un operator de curbură R în dimensiune 4 e secţional pozitiv dacă şi numai dacă toate punctele critice (x_1, y_1) ale lui R vor avea x_1 pozitiv.*

În Teorema 5.3.7 arătăm că mulţimea rădăcinilor reale ale lui $q(x) = \mathrm{disc_y}(p(x, y))$ include mulţimea valorilor critice a curburii secţionale. În Teorema 5.3.11 arătăm că în condiţia $\mathrm{disc(q)} \neq 0$, cele două mulţimi coincid. Astfel recuperăm rezultatul principal al capitolului, eunun ţat ca Teorema 5.1.1:

Teorema 5.1.1. (Rezultatul principal)
Fie R un tensor de curbură Riemann în dimensiune 4, considerat ca operator liniar pe Λ^2, spaţiul 6-dimensional al 2-formelor în dimensiune 4. Notăm cu I operatorul identitate pe Λ^2, şi K 4-forma volum cu 2 indici contravarianţi.
Fie $p(x, y) = \det(R - xI - yK)$, şi $q(x) = \mathrm{disc_y}(p(x, y))$.
Mu;ţimea rădăcinilor reale ale lui q include mulţimea valorilor critice ale curburii secţionale dată de R. Când avem $\mathrm{disc_x}(q(x)) \neq 0$, cele două mulţimi coincid.
Prin urmare, dacă toate rădacinile lui q sunt pozitive, atunci R e secţional pozitiv. Când avem $\mathrm{disc_x}(q(x)) \neq 0$, şi reciproca e adevărată: R e secţional pozitiv dacă şi numai dacă toate rădăcinile reale ale lui q sunt pozitive.

În principiu este posibil, prin teorema Tarski-Seidenberg [2], să generăm o descriere completă a condiţiilor pentru curbură secţională pozitivă. Din păcate, aceste descrieri tind să fie lungi, nestructurate, şi dificile computaţional. Descrierea noastră renunţa la completitudinea rezultatului (necesitatea e îndeplinită numai pe mulţimea densă deschisă a operatorilor de curbură dată de $\mathrm{disc(q)} \neq 0$) pentru a obţine o descriere simplă.

Secţiunea 4 examinează posibilitatea aplicării metodelor algebrice pentru operatori de curbură de dimensiune mai mare, şi arată eşecul unei generalizări naive a teoremei noastre.

Ca generalizare a lui $p(x,y) = \det(R - xI - yK)$, obţinem polinomul:

$$p_R : (\mathbb{R}, \Lambda^4) \to \mathbb{R},$$

$$p_R(x, W) = \det(R - Ix - W)$$

unde Λ^4 e spaţiul 4-formelor. Deşi când $n \geq 5$ discriminatul lui p_R faţă de coeficienţii lui W e 0, bănuim că o generalizarea pentru dimensiuni mari a Teoremei 5.3.5 există, şi permite caracterizarea curburii seţionale a lui R din studiul coeficienţilor p_R. Studiul polinomului p_R deschide calea aplicării metodelor algebrice pentru a determina propietăţile geometrice ale lui R.

Secţiunea 5 aplică metode algebrice şi rezultate din secţiunile anterioare pentru a recupera rezultate din [29], legate de curbura puternic-pozitivă. Printre acestea arătăm că, în dimensiune 4, toţi operatorii de curbură secţional pozitivi pozitiv sunt puternic-pozitivi. Mai precis, pentru R operator de curbură secţional pozitiv în dimensiune 4 există o 4-fromă w astfel încât $R + w$ e pozitiv-definit.

În secţiunea 6 examinăm proprietăţile algebrice ale polinomului de curbură şi posibile aplicaţii pentru construcţia de fluxuri geometrice. Notăm cu $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ mulţimea operatorilor de curbură secţional pozitivi sau secţional semipozitivi în dimensiune 4. Dată o operaţie algebrică S, îi vom nota cu $Z(S)$ mulţimea sa de zerouri. Menţionăm din această secţiune următoarele teoreme:

Teorema 5.6.6. *Funcţia* $q_0(R) = \mathrm{disc_y}(\det(R - yK))$ *e cea mai simplă expresie algebrică nontrivială pe spaţiul operatorilor de curbură a cărei set de zerouri include frontiera operatorilor de curbură secţional pozitivi. Orice altă expresie algebrică a cărei set de zerouri include* $\partial\mathcal{P}$ *e divizibilă prin* q_0 *(aceasta reiese şi din faptul că* $q_0(R)$ *e* polinomul minim de definire *al lui* $f\,\mathcal{P}$*, din [3], Theorem C)*

Teorema 5.6.1. *Fie* Λ^2 *spaţiul* 6 *dimensional al* 2*-formelor peste* $\mathbb{R}^4$ *şi* $\mathcal{R} \cong \mathbb{R}^{20}$ *spaţiul operatorilor de curbură în dimensiune* 4*, luaţi ca operatori liniari peste* Λ^2*. Fie* I *operatorul identitate pe* Λ^2 *şi* K 4*-forma volum cu* 2 *indici ridicaţi. Definim:*

$$q_\tau : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$$

$$q_\tau(R) = \mathrm{disc_y}(\det(R - \tau I - yK))$$

şi R_{min} *ca fiind curbura secţională minimă atinsă de* R*. Atunci vom avea* $q_\tau(R) = 0$ *pentru toţi* R *cu* $R_{min} = \tau$ *şi* $q_\tau(R) \geq 0$ *pentru toţi* R *cu* $R_{min} > \tau$*. Dacă impunem* $\mathrm{disc_x}(q_x(R)) \neq 0$ *şi* $R_{min} > \tau$*, vom avea* $q_\tau(R) > 0$ *pentru toţi* R *cu* $R_{min} > \tau$*.*

Teorema 5.6.3. Fie τ o constantă şi M o varietate 4-dimensională de curbură secţională minimă $\geq \tau$. Considerăm fluxul geometric conform dat prin formula $\frac{d}{dt} g_{ab} = -q_\tau(R) g_{ab}$. Curbura secţională minimă al lui M va rământe mai mare sau egală cu τ în toţi $t > 0$ pentru care fluxul există.

Capitolul 6

Ecuaţii tensoriale pentru obiectele algebrice

Formulele pentru discriminatul şi rezultantul polinoamelor sunt de obicei scrise ca expresii ale coeficienţilor argumentelor lor. Acelaşi lucru poate fi zis şi despre formula pentru determinantul unei matrici. În geometria diferenţială, ecuaţiile tensoriale sunt scrise folosind numai produse, sume şi contracţii de tensori, unde indicii sunt aranjaţi de obicei după nişte reguli de permutare. Deoarece nu se fac referinţe la componentele individuale ale tensorilor, ecuaţiile rezultante nu depind de coordonate şi sisteme de referinţă.

În capitolul anterior am folosit operaţii algebrice, cum ar fi determinantul şi discriminantul, pe care le-am aplicat la tensori. În acest capitol vom rescrie aceste operaţii sub formă de ecuaţii tensoriale.

6.1 Introducere

Vom calcula formule pentru discriminantul şi polinoamele de subdiscriminant asociate polinomului caracteristic al unei matrici ${M_a}^b$, scrise direct ca expresii tensoriale ale matricii respective. Aceste formule sunt directe, sărind pasul intermediar de a calcula coeficienţii polinomului caracteristic. Pentru a construi aceste formule, ne bazăm pe faptul că rădăcinile polinomului caracteristic P sunt valorile proprii ale matricii, şi reconstruim structura formulelor în funcţie de rădăcini a discriminantului şi polinoamelor subdiscriminant. Expresiile rezultate, deşi sunt tensoriale, au structura analoagă cu formulele din care au fost construite.

Definiţia 6.1.1. Fie $p(x)$ un polinom de forma

$$p(x) = a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\dots(x - \lambda_n)$$

Discriminantul lui p e dat prin:

$$\mathrm{disc}_x(p(x)) = a^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

Definiţia 6.1.2. Fie p_1, p_2 polinoame astfel încât:

$$p_1 = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$$

$$p_2 = b(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_m)$$

Rezultantul lui p_1 şi p_2 este dat de:

$$\mathrm{res}_x(p_1(x), p_2(x)) = a^m b^n \prod_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} (\alpha_i - \beta_j)$$

Definiţia 6.1.3. Fie $M^b_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operator liniar pătratic de dimensiune n. Puterea exterioară de rank k a lui M e un operator liniar pe spaţiul k-formelor peste $\mathbb{R}^n$, definită prin:

$$\Lambda^k M : \Lambda^k_n \to \Lambda^k_n$$

$$\Lambda^k M = M^{b_1}_{[a_1} M^{b_2}_{a_2} \dots M^{b_k}_{a_k]}$$

Puterea exterioară de rang k al lui M poate fi obţinută prin antisimetrizarea indicilor domeniului puterii tensoriale de rang k a lui M (aceasta este produsul tensorial de k ori al lui M cu sine însuşi). Presupunând că M are vectori proprii V_i cu valorii proprii λ_i, unde $i \in \{1 \dots n\}$, atunci $\Lambda^k M$ va avea vectorii proprii $V_{a_1} \wedge V_{a_2} \dots \wedge V_{a_k}$, cu valori proprii $\lambda_{a_1}\lambda_{a_2}\dots\lambda_{a_k}$, unde $1 \le a_1 < a_2 \dots < a_k \le n$.

6.2 Determinantul unei matrici

Teorema 6.2.1. *Fie M^b_a o matrice $n \times n$. Determinantul lui M poate fi scris ca*

$$\det(M) = M^{a_1}_{[a_1} M^{a_2}_{a_2} \dots M^{a_n}_{a_n]}$$

Notând $N^b_a = xI^b_a - M^b_a$, polinomul caracteristic al lui M este:

$$P_M(x) = N^{a_1}_{[a_1} N^{a_2}_{a_2} \dots N^{a_n}_{a_n]}.$$

Coeficientul de grad l al polinomului caracteristic este:

$$q_l = (-1)^{n-l} M^{a_1}_{[a_1} M^{a_2}_{a_2} \dots M^{a_{n-l}}_{a_{n-l}]}$$

Demonstraţie. Selectăm o bază în care M e matrice diagonală pentru a ne simplifica calculele (mulcţimea matricilor nediagonalizabile are măsură zero în spaţiul matricilor, validitatea relaţiei pentru această mulţime va rezulta din continuitate). Din forma diagonală lui M avem M^j_i pentru $i \ne j$ şi $M^i_j = \lambda_i$ pentru $j = i$. Primul pas e scrierea explicită a sumării $M^{a_1}_{[a_1} M^{a_2}_{a_2} \dots M^{a_n}_{a_n]}$:

$$\det(M) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{a_1,\dots a_n \in \{1\dots n\}\\ \tau \in S_n}} \mathrm{sgn}(\tau) M^{a_{\tau(1)}}_{a_1} M^{a_{\tau(2)}}_{a_2} \dots M^{a_{\tau(n)}}_{a_n}$$

Termenii nuli se anulează, si rearanjăm formula până când ajungem la:

$$\det(M) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

Aceasta este formula în functie de valori proprii ale determinantului, dovedind corectitudinea. Formula pentru coeficienţii polinomului caracteristic se demosntrează într-un mod analog. Metoda de a gândi pe M în funţie de valorile proprii şi a elimina termenii nuli din formula extinsă poate fi folosită ca un mod general de a demonstra corectitudinea formulelor tensoriale. □

6.3 Rezultantul polinoamelor caracteristice

În scrierea vectorială, vom nota cu $\otimes$ produsul tensorial. De exemplu, pentru $V \in \mathbb{R}^n$ şi $P \in \mathbb{R}^m$ avem $V \otimes P \in (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m \cdot n}$. Dacă N este un operator liniar pe $\mathbb{R}^n$ şi M este un operator liniar pe $\mathbb{R}^m$, atunci $N \otimes M$ e operator liniar pe $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$.

Teorema 6.3.1. *Fie M un operator liniar pătratic de dimensiune m, N un operator liniar pătratic de dimensiune n, şi I_k operatorul identitate în dimensiune k. Vom avea*

$$\mathrm{res}(P_M, P_N) = \det(M \otimes I_n - I_m \otimes N)$$

unde P_M şi P_N sunt polinoamele caracteristice ale lui M şi N.

Demonstraţie.
Notăm $P_M(x) = \prod_{k=1}^{m}(x - \alpha_k)$ şi $P_N(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - \beta_k)$.
Fie $A = \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m\}$, $B = \{\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n\}$.

Formula în funcţie de rădăcini a rezultantului P_M şi P_N este:

$$\mathrm{res}(P_M, P_N) = \prod_{\alpha \in A,\ \beta \in B} (\alpha - \beta)$$

Acum vom obţine formula pentru $\mathrm{res}(P_M, P_N)$ în funcţie de M şi N.

Fie $T_a^b = M_{a_1}^{b_1} I_{a_2}^{b_2} - I_{a_1}^{b_1} M_{a_2}^{b_2}$, $a_1, b_1 \in \{1 \ldots m\}$, $a_2, b_2 \in \{1 \ldots n\}$, $a, b \in \{1 \ldots m \cdot n\}$. Acesta acţionează ca un operator liniar pe $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$. Perechile lui de vector propriu-valoare proprie vor lua forma $(V_p \otimes K_s, \alpha_p - \beta_s)$, unde (V_p, α_p), $(K_s, \beta s)$ sunt perechile vector propriu-valoare proprie ale lui M şi N. Din formula in funcţie de rădăcini ale rezultantului, determinantul lui T va fi egal cu $\mathrm{res}(P_M, P_N)$. □

6.4 Discriminantul polinomului caracteristic

Teorema 6.4.1. *Fie M o matrice $m \times m$ şi P_M polinomul său caracteristic. Atunci*

$$disc(P_M) = T_{[a_1}^{a_1} T_{a_2}^{a_2} \ldots T_{a_{m(m-1)}]}^{a_{m(m-1)}}$$

unde $T = M \otimes I - I \otimes M$. *De observat că* $\{a_1, a_2 \dots a_{m(m-1)}\}$ *sunt indici peste o bază a lui* $(\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m \cdot m}$ *deci valorile lor merg de la* 1 *la* $m \cdot m$.

Demonstraţie. Fie $P_M(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$. Formula în funcţie de rădăcini pentru discriminantul lui P_M este:

$$disc(P_M) = \prod_{p,q \in \{1..m\},\ p \neq q} (\alpha_p - \alpha_q)$$

Demonstraţia este analoagă cu cea a teoremei anterioare, calculând vectorii şi valorile proprii ale lui $T_a^b = M_{a_1}^{b_1} I_{a_2}^{b_2} - I_{a_1}^{b_1} M_{a_2}^{b_2}$ □

6.5 Aplicaţii: Formula pentru polinomul de curbură

Prin metodele descrise anterior putem obţine o formulă tensorială explicită pentru polinomul

$$p(x) = \mathrm{disc_y}(\det(R - xI - yK))$$

folosit în capitolul anterior. Reamintim că R este un tensor de curbură algebric în dimensiune 4, I este operatorul identitate pe spaţiul 2-formelor, iar K este forma volum în dimensiune K. Scrierea lor explicită este dată prin:

$R_{ab}^{cd} = R_{abmn}\, g^{mc} g^{nd}$
$K_{ab}^{cd} = K_{abmn}\, g^{mc} g^{nd}$
$I_{ab}^{cd} = \delta_a^c \delta_b^d - \delta_a^d \delta_b^c$

Necesităm o formulă pentru discriminantul în y a determinantului operatorului $R_{ab}^{cd} - xI_{ab}^{cd} - yK_{ab}^{cd}$. Ştiind că $K_{ab}^{cd} K_{cd}^{ef} = -I_{ab}^{ef}$ şi $\det(K) = -1$, vom obţine:

$\mathrm{disc_y}(\det(R - xI - yK)) = \mathrm{disc_y}(\det((xK - RK) - yI))$

Rezultă că $p(x)$ e discriminantul polinomului caracteristic al lui $xK - RK$. Prin teoremele 6.4.1 şi 6.2.1, acesta este coeficienţul de grad 6 al polinomului caracteristic al lui

$$Q = (xK - RK) \otimes I - I \otimes (xK - RK)$$

Notăm $T_{a_l b_l}^{a_u b_u} = xK_{a_l b_l}^{a_u b_u} - R_{a_l b_l}^{mn} K_{mn}^{a^u b^u}$ şi $Q_{a_l b_l c_l d_l}^{a_u b_u c_u d_u} = T_{a_l b - l}^{a_u b_u} I_{c_l d_l}^{c_u d_u} - I_{a_l b - l}^{a_u b_u} T_{c_l d_l}^{c_u d_u}$. Vom obţine:

$$p(x) = \frac{1}{30!} \sum_{\tau \in S_{30}} \mathrm{sgn}(\tau)\ Q_{a_1\ \ b_1\ \ c_1\ \ d_1}^{a_{\tau(1)} b_{\tau(1)} c_{\tau(1)} d_{\tau(1)}} Q_{a_2\ \ b_2\ \ c_2\ \ d_2}^{a_{\tau(2)} b_{\tau(2)} c_{\tau(2)} d_{\tau(2)}} \dots Q_{a_{30}\ \ b_{30}\ \ c_{30}\ \ d_{30}}^{a_{\tau(30)} b_{\tau(30)} c_{\tau(30)} d_{\tau(30)}}$$

Rescriind termenul $Q = (xK - RK) \otimes I - I \otimes (xK - RK)$ ca $x(K \otimes I - I \otimes K) - (RK \otimes I - I \otimes RK)$, observăm că rangul matricii $(K \otimes I - I \otimes K)$ asociată lui x este 18. Operaţia aplicată lui Q pentru a obţine $p(x)$ este o operaţie de tip determinant şi are rangul 30. Prin urmare gradul lui $p(x)$ este cel mult 18. Pentru un operator generic de curbură, putem spune că gradul lui p e 18.

6.6 Polinoame subdiscriminant

În aceasta seţiune vom aplica tehnicile folosite pentru obţinerea formulelor tensoriale la obiecte algebrice mai complexe, anume polinoamele subdiscriminant. Vom calcula formule tensoriale pentru polinoamele subdiscriminant al polinomului caracteristic al matricii M. Pentru un polinom

$$p(x) = \prod_{r \in \{1 \cdot\cdot m\}} (x - \alpha_r)$$

observăm complexitatea formulei pentru polinomul subdiscriminant de grad d:

$$sdisc_d(x) = \sum_{\substack{B \subset \{1 \cdot\cdot m\} \\ |B| = (m-d)}} \Bigg(\prod_{\substack{p,q \in B \\ p \neq q}} (\alpha_p - \alpha_q) \prod_{\substack{t \in \{1 \cdot\cdot m\} \\ t \notin B}} (x - \alpha_t) \Bigg)$$

Sub forma extinsă, formula este scrisă ca:

$$\sum_{\substack{k_1 < k_2 < \cdot\cdot < k_{(m-d)} \\ p_1 < p_2 < \cdot\cdot < p_d \\ \{k_1, \cdot\cdot k_{(m-d)}\} \cup \{p_1, \cdot\cdot p_d\} = \{1, \cdot\cdot m\}}} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & (\alpha_{k_1} - \alpha_{k_2}) & \dots & (\alpha_{k_1} - \alpha_{k_{(m-d-1)}}) & (\alpha_{k_1} - \alpha_{k_{(m-d)}}) \\ (\alpha_{k_2} - \alpha_{k_1}) & 1 & \dots & (\alpha_{k_2} - \alpha_{k_{(m-d-1)}}) & (\alpha_{k_2} - \alpha_{k_{(m-d)}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_{k_{(m-d-1)}} - \alpha_{k_1}) & (\alpha_{k_{(m-d-1)}} - \alpha_{k_2}) & \dots & 1 & (\alpha_{k_{(m-d-1)}} - \alpha_{k_{(m-d)}}) \\ (\alpha_{k_{(m-d)}} - \alpha_{k_1}) & (\alpha_{k_{(m-d)}} - \alpha_{k_2}) & \dots & (\alpha_{k_{(m-d)}} - \alpha_{k_{(m-d-1)}}) & 1 \\ & ((x-\alpha_{p_1})(x-\alpha_{p_2}) & \dots & (x-\alpha_{p_d})) & \end{array} \right)$$

Pornind de la identificarea cu α_k a valorilor proprii al lui M, vom construi ecuaţia tensorială pentru subdiscriminantul polinomului sau caracteristic. Fie $T^{a_2 b_2}_{a_1 b_1} = M^{a_2}_{a_1} I^{b_2}_{b_1} - I^{a_2}_{a_1} M^{b_2}_{b_1}$, $H^a_b = x I^a_b - M^a_b$, $p = m - d$.
Definim:

$$D^{(a_{11} \quad a_{12} \; \dots \; a_{1p} \quad)(b_{11} \quad b_{21} \; \dots \; b_{p1} \quad)}_{(a_{(p+1)1} a_{(p+1)2} \dots a_{(p+1)p})(b_{1(p+1)} b_{2(p+1)} \dots b_{p(p+1)})} =$$

$$= \begin{array}{cccccc} I^{a_{11}}_{a_{21}} I^{b_{11}}_{b_{12}} & T^{a_{12} b_{12}}_{a_{22} b_{13}} & T^{a_{13} b_{13}}_{a_{23} b_{14}} & \dots & T^{a_{1(p-1)} b_{1(p-1)}}_{a_{2(p-1)} b_{1p}} & T^{a_{1p} b_{1p}}_{a_{2p} b_{1(p+1)}} \\ T^{a_{21} b_{21}}_{a_{31} b_{22}} & I^{a_{22}}_{a_{32}} I^{b_{22}}_{b_{23}} & T^{a_{23} b_{23}}_{a_{33} b_{24}} & \dots & T^{a_{2(p-1)} b_{2(p-1)}}_{a_{3(p-1)} b_{2p}} & T^{a_{2p} b_{2p}}_{a_{3p} b_{2(p+1)}} \\ T^{a_{31} b_{31}}_{a_{41} b_{32}} & T^{a_{32} b_{32}}_{a_{42} b_{33}} & I^{a_{33}}_{a_{43}} I^{b_{33}}_{b_{34}} & \dots & T^{a_{3(p-1)} b_{3(p-1)}}_{a_{4(p-1)} b_{3p}} & T^{a_{3p} b_{3p}}_{a_{4p} b_{3(p+1)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T^{a_{(p-1)1} b_{(p-1)1}}_{a_{p1} b_{(p-1)2}} & T^{a_{(p-1)2} b_{(p-1)2}}_{a_{p2} b_{(p-1)3}} & T^{a_{(p-1)3} b_{(p-1)3}}_{a_{p3} b_{(p-1)4}} & \dots & I^{a_{(p-1)(p-1)}}_{a_{p(p-1)}} I^{b_{(p-1)(p-1)}}_{b_{(p-1)p}} & T^{a_{(p-1)p} b_{(p-1)p}}_{a_{pp} b_{(p-1)(p+1)}} \\ T^{a_{p1} b_{p1}}_{a_{(p+1)1} b_{p2}} & T^{a_{p2} b_{p2}}_{a_{(p+1)2} b_{p3}} & T^{a_{p3} b_{p3}}_{a_{(p+1)3} b_{p4}} & \dots & T^{a_{p(p-1)} b_{p(p-1)}}_{a_{(p+1)(p-1)} b_{pp}} & I^{a_{pp}}_{a_{(p+1)p}} I^{b_{pp}}_{b_{p(p+1)}} \end{array}$$

Notăm cu $C^{a_{11} \quad a_{12} \; \dots \; a_{1p}}_{b_{1(p+1)} b_{2(p+1)} \dots b_{p(p+1)}}$ tensorul obţinut din D (cu indicii notaţi ca mai sus) prin contracţionarea lui b_{k1} cu $a_{(p+1)k}$, $k \in \{1 \dots p\}$.
Vom obţine:

$$sdisc_d(x) = C^{a_1 a_2 \dots a_p}_{[a_1 a_2 \dots a_p} H^{b_1}_{b_1} x H^{b_2}_{b_2} \dots H^{b_d}_{b_d]}$$

Am obţinut o formulă tensorială pentru polinomul subdiscriminant de grad d al polinomului caracteristic al lui M, pornind de la formula în funcţie de rădăcini. Aceste tipuri de formule pot fi rescrise în mai multe forme. Folosind formulele lui Sylvester de sumă simplă sau dublă, se pot calcula şi formule tensoriale pentru subrezultantul a două polinoame caracteristice. Dar, din moment ce în formulele cu rădăcini ale subrezultantului apar rapoarte, acestea vor necesita folosirea de subformule pentru matrici adjugate.

Bibliografie

[1] M. Atiyah, R. Bott, V.K. Patodi, *On the heat equation and the index theorem*, Inventiones math. 19, 279-330 (1973)

[2] S. Basu, R. Pollack and M.F. Roy, *Algorithms in Real Algebraic Geometry, second edition*, Algorithms and Computations in Mathematics, Volume 10, Springer, 2016.

[3] R. Bettiol, M. Kummer, and R. Mendes, *Convex algebraic geometry of curvature operators with sectional curvature bounds* (to appear).

[4] R. G. Bettiol, R. A. E. Mendes, *Strongly positive curvature*, Annals of Global Analysis and Geometry, **53**(3), 2018, 287–309.

[5] C. Böhm, B. Wilking, *Manifolds with positive curvature operators are space forms*, Annals of Mathematics, 167 (2008), 1079–1097.

[6] G. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, 1993.

[7] M. P. do Carmo, *Riemmanian Geometry*, Birkhäuser, 1992

[8] S. Chern, *An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface*, Proceedings of the American Mathematical Society,Vol. 6, No. 5 (Oct., 1955), pp. 771–782.

[9] D. Fodor, *Expressing the curvature tensor and connection of a given metric in terms of those of another metric*, arXiv:1801.07122.

[10] D. Fodor, *Isometric immersions of Riemannian manifolds in k-codimensional Euclidean space*, arXiv:1908.11616

[11] D. Fodor, *Algebraic conditions for the positivity of sectional curvature*, Contributions to Algebra and Geometry, DOI: 10.1007/s13366-019-00464-9

[12] D. Fodor, *On the parallelizability of tangent bundles for* 2 *and* 3*-dimensional manifolds*, Bulletin Mathématique, Vol. 62 (110)/2019, Nr. 4, 387–401.

[13] S. A. Fulling, R. C. King, B. G. Wybourne, C. J. Cummins *Normal forms for tensor polynomials. I. The Riemann tensor*, Classical and Quantum Gravity, Vol. 9, Nr. 5.

[14] D. T. Guarrera, N. G. Johnson, H. F. Wolfe, *The Taylor Expansion of a Riemannian Metric.*

[15] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. Volume 17, (1982), 255–306.

[16] R. S. Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, J. Differential Geom. Volume 24, Number 2 (1986), 153–179.

[17] Q. Han, J-X. Hong, *Isometric Embedding of Riemannian Manifolds in Euclidean Spaces*, American Mathematica Society, 2006.

[18] A. Hatcher, *Vector Bundles & K-Theory*, https://www.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VB.pdf

[19] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, https://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf

[20] Yin Li, *The Gauss-Bonnet-Chern Theorem on Riemannian Manifolds*, arXiv:1111.4972 [math.DG]

[21] M. Marcus, *Determinants of Sums*, College Mathematics Journal, **2**(21), 1990, 130–135.

[22] J. Milnor, J. Stasheef, *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.

[23] T. Muir, *A treatise on the theory of determinants*, Macmillan & Co. 1882

[24] O. G. Medrano, P. W. Michor, *The Riemmanian Manifold of all Riemmanian Metrics*, Quarterly Journal of Mathematics (Oxford) 42 (1991), 183–202.

[25] Lei Ni, *Ricci flow and nonnegativity of curvature*, arXiv:math/0305246

[26] T. Regge, *General Relativity without Coordinates*, Il Nuovo Cimento, February 1961, Volume 19, Issue 3, pp 558–571.

[27] R. Sharipov, *Multiple discriminants and critical values of a multivariate polynomial*, arXiv:1508.00551

[28] N. Steenrod, *Topology of fiber bundles*, Princeton University Press, 1957.

[29] J. A. Thorpe, *The zeroes of non-negative curvature operators*, J. Differential Geom., **5**(1-2), 1971, 113–125.

[30] B. Wilking, *Nonnegatively and Positively curved manifolds*, Surveys in differential geometry. Vol. XI, Int. Press, Somerville, MA, 2007, 25-62.