Universitatea "Alexandru Ioan Cuza", Iaşi
Facultatea de Matematică

Aspecte probabilistice ale teoriei grupurilor finite

Teză de Doctorat

Conducător ştiinţific:
Prof. dr. TĂRNĂUCEANU MARIUS

Doctorand:
LAZOREC MIHAI SILVIU

Iaşi, 2019

Cuprins

Notaţii şi câteva observaţii

Toate grupurile cu care lucrăm sunt considerate finite. De aceea, uneori omitem cuvântul “finit”. De asemenea, toate grupurile sunt înzestrate cu o lege de compoziţie multiplicativă pe care alegem să nu o specificăm efectiv pentru uşurinţa scrierii. Atunci când lucrăm cu p-grupuri, omitem adesea să menţionăm că p este un număr prim.

Câteva grupuri care apar pe parcursul lucrării:

- $\mathbb{Z}_n$ este grupul ciclic cu n elemente, unde $n \geq 2$;
- $\mathbb{Z}_p^n$ este p-grupul abelian elementar cu p^n elemente, unde $n \geq 1$;
- $G_{n,p} \cong \mathbb{Z}_p^{n-1} \rtimes \mathbb{Z}_q$ este P-grupul neabelian finit de ordin $p^{n-1}q$, unde p şi q sunt numere prime astfel încât $p > 2$ şi $q|p-1$ (a se vedea secţiunea 2.2 din [44]);
- $D_{2n} = \langle x, y \mid x^n = y^2 = 1, yxy = x^{n-1} \rangle$ este grupul diedral cu $2n$ elemente, unde $n \geq 1$; întrucât $D_2 \cong \mathbb{Z}_2$ şi $D_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, de cele mai multe ori ne referim la cazul $n \geq 3$.
- $Q_{2^n} = \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^4 = 1,\ yxy^{-1} = x^{2^{n-1}-1} \rangle$ este grupul cuaternionic generalizat cu 2^n elemente, unde $n \geq 3$;
- $QD_{2^n} = \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1,\ yxy = x^{2^{n-2}-1} \rangle$ este grupul cvasidiedral cu 2^n elemente, unde $n \geq 4$;
- $M(p^n) = \langle x, y \mid x^{p^{n-1}} = y^p = 1, y^{-1}xy = x^{p^{n-2}+1} \rangle$ este p-grupul modular cu p^n elemente, unde $n \geq 4$, dacă $p = 2$, şi $n \geq 3$, dacă $p \geq 3$;
- $ZM(m, n, r) = \langle a, b \mid a^m = b^n = 1,\ b^{-1}ab = a^r \rangle$ este un ZM-grup cu mn elemente, unde tripletul $(m, n, r) \in \mathbb{N}^3$ satisface condiţiile $(m, n) = (m, r-1) = 1$ şi $r^n \equiv 1\ (mod\ m)$;
- $Dic_{4n} = \langle a, \gamma \mid a^{2n} = 1, \gamma^2 = a^n, \gamma a \gamma^{-1} = a^{-1} \rangle$ este grupul diciclic cu $4n$ elemente, unde $n \geq 1$;
- $Dic_{4n}(G) = \langle G, \gamma \mid \gamma^4 = 1, \gamma^2 \in G \setminus \{1\}, \gamma g \gamma^{-1} = g^{-1},\ \forall\ g \in G \rangle$ este un grup diciclic generalizat cu $4n$ elemente, G fiind un grup abelian arbitrar cu $2n$ elemente, unde $n \geq 1$;
- $D(G) = \langle G, y \mid y^2 = 1, ygy = g^{-1},\ \forall\ g \in G \rangle$ este grupul diedral generalizat cu $2n$ elemente, G fiind un grup abelian cu n elemente, unde $n \geq 2$;
- S_n este grupul permutărilor de grad n, unde $n \geq 1$;
- A_n este grupul altern de grad n, unde $n \geq 1$;

Capitolul 1

Introducere

Studiul grupurilor finite constituie un vast domeniu de cercetare al algebrei abstracte. Un interes major a fost acordat introducerii unor noi instrumente cu ajutorul cărora pot fi caracterizate una sau mai multe dintre clasele uzuale de grupuri finite. În acest sens, evidenţiem o bine cunoscută înşiruire de incluziuni stricte între clasele de grupuri finite cu care se lucrează frecvent:

$$\text{ciclice} \subsetneq \text{abeliene} \subsetneq \text{nilpotente} \subsetneq \text{superrezolubile} \subsetneq \text{rezolubile}.$$

Este cunoscut faptul că teoria probabilităţilor are un rol semnificativ în stabilirea unor rezultate aplicative corespunzătoare statisticii sau matematicii financiare. În ceea ce ne priveşte, ţinând cont că această lucrare se canalizează pe teoria grupurilor finite, este suficient să reţinem doar definiţia clasică a probabilităţii dată de numărul cazurilor favorabile raportat la numărul cazurilor posibile.

Îmbinând cele două ramuri matematice menţionate mai sus, s-a format un nou domeniu de cercetare numit teoria probabilistică a grupurilor finite, de unde derivă şi tema acestei lucrări. Întrebarea care stă la baza acestei arii de cercetare poate fi formulată astfel: presupunând că avem un grup finit G pentru care suficient de multe elemente structurale au o anumită proprietate, ce s-ar putea spune despre natura/structura lui G? Pentru a răspunde la această întrebare, de-a lungul timpului au fost introduse mai multe aspecte probabilistice asociate teoriei grupurilor finite.

1.1 Gradul de comutativitate al unui grup finit

Fie G un grup finit. Un aspect probabilistic studiat frecvent în ultimele decenii este *gradul de comutativitate al lui* G. Acest concept, aşa cum este cunoscut în prezent, a fost introdus de Gustafson în [18], fiind definit prin

$$d(G) = \frac{1}{|G|^2} |\{(x, y) \in G \times G \mid xy = yx\}|.$$

Menţionăm că ideea de a număra perechile de elemente $(x, y) \in G \times G$ ce satisfac proprietatea $xy = yx$ a fost sugerată ceva mai devreme de Erdös şi Turán în [13]. Observăm că $d(G)$ măsoară probabilitatea ca alegând arbitrar două elemente ale grupului G, ele comută. Cu alte cuvinte, acest aspect probabilistic măsoară cât de "aproape" este grupul G de a fi abelian.

Pentru grupuri neabeliene, în [18], Gustafson a demonstrat că $d(G) \leq \frac{5}{8}$. Urmând raţionamentul său, ne putem da seama că egalitatea $d(G) = \frac{5}{8}$ are loc dacă şi numai dacă $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Câteva exemple de grupuri neabeliene al căror grad de comutativitate este $\frac{5}{8}$ sunt grupul cuaternionilor Q_8 şi grupul diedral D_8. Rezumând ideile anterioare, putem enunţa următoarea teoremă care indică un criteriu de determinare a grupurilor abeliene ce invocă gradul de comutativitate al unui grup finit.

Teorema 1.1. *Fie G un grup finit. Dacă $d(G) > \frac{5}{8}$, atunci G este abelian.*

Alte criterii de tipul celui indicat de Teorema 1.1 au fost determinate de Lescot în [31, 32, 33], şi Barry, MacHale şi Ní Shé în [3]. Mai exact, s-au demonstrat câteva rezultate pe care le includem în următoarea teoremă.

Teorema 1.2. *Fie G un grup finit.*

i) Dacă $d(G) > \frac{1}{2}$, atunci G este nilpotent.

ii) Dacă $d(G) > \frac{1}{3}$, atunci G este superrezolubil.

iii) Dacă $|G|$ este impar şi $d(G) > \frac{11}{75}$, atunci G este superrezolubil.

iv) Dacă $d(G) > \frac{1}{12}$, atunci G este rezolubil.

În ceea ce priveşte valorile posibile ale gradului de comutativitate ale unui grup finit G, o consecinţă a rezultatului lui Gustafson pe care l-am punctat mai sus, este faptul că $d(G) \notin (\frac{5}{8}, 1)$. De aici a luat naştere o nouă direcţie de cercetare. Mai exact, s-au determinat valorile posibile pe care le poate lua $d(G)$ de îndată ce această cantitate depăşeşte o anumită valoare. În [41], Rusin a afirmat că a determinat valorile lui $d(G)$ incluse în intervalul $(\frac{11}{32}, 1]$. Acestea sunt $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{4^n})$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \frac{11}{27}, \frac{2}{5}, \frac{25}{64}$ şi $\frac{3}{8}$. Totuşi, în [11], Das şi Nath au punctat că Rusin a omis un caz pentru care se obţine valoarea $\frac{5}{14}$, care trebuie adăugată în enumerarea de mai sus. În aceeaşi lucrare, cei doi au determinat toate valorile posibile ale lui $d(G)$ atunci când $|G|$ este impar şi $d(G) \geq \frac{11}{75}$.

Legătură dintre gradul de comutativitate al grupurilor finite şi analiza matematică a fost şi ea investigată. În acest sens, s-au demonstrat mai multe rezultate privitoare la punctele de acumulare ale mulţimii

$$A = \{d(G) \mid G \text{ este un grup finit}\}.$$

De exemplu, în [12], Eberhard a demonstrat următoarea teoremă.

Teorema 1.3. *Toate punctele de acumulare ale mulţimii A sunt numere raţionale.*

În final, merită să menţionăm că, în [14], Erovenko şi Sury au arătat că numerele de forma $\frac{1}{n^2}$, unde $n \geq 2$ este un număr întreg, sunt puncte de acumulare ale mulţimii A. De asemenea, în [38], s-a demonstrat că şi numerele de forma $\frac{1}{n}$, unde $n \geq 2$ este un număr întreg, au aceeaşi proprietate.

1.2 Gradul de comutativitate al subgrupurilor unui grup finit

Notăm laticea subgrupurilor unui grup finit G prin $L(G)$. Fie H şi K două subgrupuri ale lui G. Un rezultat elementar de teoria grupurilor afirmă că

$$HK \text{ este un subgrup al lui G} \Longleftrightarrow HK = KH.$$

Egalitatea din partea dreaptă a echivalenţei de mai sus este strâns legată de noţiunea de permutabilitate a unui subgrup ce a fost introdusă de Ore în [39].

Definiţia 1.4. *Fie G un grup finit şi H un subgrup al său. Spunem că H este un subgrup permutabil al lui G dacă $HK = KH$, pentru orice $K \in L(G)$.*

Se cunosc condiţii necesare şi suficiente care asigură permutabilitatea tuturor subgrupurilor unui grup finit. Acestea se referă la o altă proprietate a unor subgrupuri, şi anume modularitatea acestora.

Definiţia 1.5. *Fie G un grup finit şi H un subgrup al său. Spunem că H este un subgrup modular al lui G dacă pentru orice $K, N \in L(G)$ astfel încât $H \subseteq N$, avem*

$$\langle H \cup (K \cap N)\rangle = \langle H \cup K\rangle \cap N.$$

Dacă grupul G are toate subgrupurile modulare, spunem că G este un grup modular.

În [22], Iwasawa a caracterizat p-grupurile modulare finite formulând următoarea teoremă.

Teorema 1.6. *Fie G un p-grup finit. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) *G este un grup modular;*

ii) *$G \cong Q_8 \times \mathbb{Z}_{2^n}$, unde $n \in \mathbb{N}$;*

iii) *G conţine un subgrup normal abelian A astfel încât $\frac{G}{A}$ este ciclic; mai mult, există un element $b \in G$ pentru care $G = A\langle b\rangle$ şi un număr natural pozitiv s astfel încât $b^{-1}ab = a^{1+p^s}$, $\forall\, a \in A$, cu $s \geq 2$ dacă $p = 2$.*

În ceea ce priveşte condiţiile necesare şi suficiente ce asigură permutabilitatea tuturor subgrupurilor, amintim următorul rezultat preluat din monografia lui Schmidt [44] privitoare la latice de subgrupuri.

Teorema 1.7. *Fie G un grup finit. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) *G are toate subgrupurile permutabile;*

ii) *G este produsul direct al subgrupurilor sale Sylow şi toate acestea sunt modulare;*

iii) *G este un grup modular nilpotent.*

Având în vedere contribuţia lui Iwasawa asupra modularităţii pe care am menţionat-o mai sus, numele său a fost folosit pentru a desemna o clasă de grupuri.

Definiţia 1.8. *Un grup finit G se numeşte Iwasawa dacă satisface una dintre condiţiile echivalente ale Teoremei 1.7.*

Merită să menţionăm că p-grupurile modulare

$$M(p^n) = \langle x, y \mid x^{p^{n-1}} = y^p = 1, y^{-1}xy = x^{p^{n-2}+1} \rangle,$$

unde $n \geq 4$, dacă $p = 2$, şi $n \geq 3$, dacă $p \geq 3$, constituie o clasă remarcabilă de grupuri Iwasawa.

Ţinând cont de Definiţia 1.4, este clar că între comutativitatea elementelor unui grup finit G şi permutabilitatea subgrupurilor sale există o analogie. Aşadar este natural să ne întrebăm dacă s-ar putea defini un aspect probabilistic similar cu gradul de comutativitate al grupului G în ideea de a cuantifica probabilitatea ca alegând arbitrar două subgrupuri ale lui G, ele comută. Un răspuns afirmativ a fost oferit în articolul [47], în care Tărnăuceanu introduce *gradul de comutativitate al subgrupurilor lui G* definit ca

$$sd(G) = \frac{1}{|L(G)|^2} |\{(H, K) \in L(G) \times L(G) \mid HK = KH\}|.$$

Este evident că $0 < sd(G) \leq 1$, iar egalitatea $sd(G) = 1$ are loc dacă şi numai G este un grup Iwasawa. Altfel spus, gradul de comutativitate al subgrupurilor unui grup finit G măsoară cât de "aproape" este grupul G de a fi Iwasawa.

Determinarea formulelor explicite de calcul ale gradelor de comutativitate ale subgrupurilor pentru câteva clase remarcabile de grupuri a constituit un subiect de interes din două motive. În primul rând a fost vizat aspectul computaţional, iar, mai apoi, determinarea unor clase de grupuri ale căror grade de comutativitate ale subgrupurilor tind la 0 atunci când ordinele grupurilor devin foarte mari. În acest sens, în [47, 51], Tărnăuceanu a determinat formule explicite de calcul ale gradului de comutativitate al subgrupurilor pentru P-grupurile neabeliene finite $\{G_{n,p}\}_{n \geq 2, p > 2}$, grupurile diedrale $\{D_{2n}\}_{n \geq 3}$, grupurile cuaternionice generalizate $\{Q_{2^n}\}_{n \geq 3}$ şi grupurile cvasidiedrale $\{QD_{2^n}\}_{n \geq 4}$. Mai mult, trecând la limită în expresiile obţinute, s-a arătat că

$$\lim_{n \to \infty} G_{n,p} = \lim_{n \to \infty} D_{2^n} = \lim_{n \to \infty} Q_{2^n} = \lim_{n \to \infty} QD_{2^n} = 0.$$

Câteva rezultate de acest tip s-au dovedit a fi adevărate şi pentru clase de grupuri simple neabeliene. În [2], Aivazidis a demonstrat un criteriu ce asigură că gradul de comutativitate al subgrupurilor asociat unei clase de grupuri $\{G_n\}_{n \geq 1}$, unde n apare în scrierea explicită a ordinului lui G_n, poate fi făcut oricât de mic de îndată ce n este suficient de mare. În aceeaşi lucrare, autorul a aplicat cu succes acest criteriu pentru a arăta că

$$\lim_{n \to \infty} Sz(2^{2n+1}) = 0,$$

$Sz(2^{2n+1})$ fiind grupul Suzuki construit peste un corp cu 2^{2n+1} elemente, unde $n \geq 1$. Acelaşi autor a demonstrat în [1] că

$$\lim_{n \to \infty} PSL(2, 2^n) = 0,$$

$PSL(2, 2^n)$ fiind grupul liniar special proiectiv construit peste un corp cu 2^n elemente, unde $n \geq 3$.

În final, menţionăm că o generalizare a gradului de comutativitate al subgrupurilor unui grup finit a fost introdusă de Tărnăuceanu în [48]. Pentru un grup finit G şi un subgrup H al lui G, cantitatea

$$sd(H,G) = \frac{1}{|L(H)||L(G)|}|\{(H_1, G_1) \in L(H) \times L(G) \mid H_1G_1 = G_1H_1\}|$$

a fost numită *gradul relativ de comutativitate al subgrupurilor lui H în G*. Este evident că $sd(G,G) = sd(G)$ şi că $0 < sd(H,G) \leq 1$, egalitatea $sd(H,G) = 1$ având loc dacă şi numai dacă toate subgrupurile lui H sunt permutabile în G. În [48] au fost demonstrate mai multe proprietăţi ale gradului relativ de comutativititate al subgrupurilor. Ne limităm la a aminti doar următoarea proprietate.

Propoziţia 1.9. *Două subgrupuri conjugate ale unui grup finit au acelaşi grad relativ de comutativitate al subgrupurilor. În particular, funcţia $sd(-,G) : L(G) \longrightarrow [0,1]$ este constantă pe clasele de conjugare ale subgrupurilor.*

1.3 Numărul de factorizări ale unui grup finit

Fie G un grup finit. Aşa cum am menţionat în secţiunea anterioară, pentru două subgrupuri H şi K ale lui G, avem $HK = KH$ dacă şi numai dacă HK este un subgrup al lui G. În particular, este posibil ca prin compunerea elementelor din H şi K să obţinem întreg grupul G. În acest caz, se obţine o factorizare a grupului G.

Definiţia 1.10. *Fie G un grup finit. O pereche de subgrupuri $(H,K) \in L(G)^2$ se numeşte factorizare a grupului G dacă $G = HK$.*

Numărul total de perechi de subgrupuri cu proprietatea indicată în definiţia anterioară se numeşte *numărul de factorizări ale lui G* şi se notează cu $F_2(G)$.

În trecut a existat un interes major pentru factorizările grupurilor finite simple, mai ales datorită progresului privitor la clasificarea acestor grupuri. În acest sens, cititorul poate consulta [5, 17, 35]. Mai recent, numărul de factorizări ale unui grup finit G a revenit în prim plan după apariţia gradului de comutativitate al subgrupurilor lui G, întrucât cele două concepte sunt legate prin următoarea egalitate

$$sd(G) = \frac{1}{|L(G)|^2} \sum_{H \in L(G)} F_2(H).$$

Practic, cunoscând numerele de factorizări ale subgrupurilor lui G, se poate determina gradul de comutativitate al subgrupurilor lui G. În [43], această technică a fost folosită cu succes de Saeedi şi Farrokhi care au determinat gradul de comutativitate al subgrupurilor grupurilor finite simple de tipul $PSL(2,p^n)$, unde p este un număr prim, $n \geq 1$ este un număr întreg şi $p^n \notin \{2,3\}$. Pe de altă parte, dacă se cunosc cantităţile $sd(H)$, pentru orice $H \in L(G)$, aplicând formula de inversiune a lui Möbius în egalitatea de mai sus, putem reobţine numărul de factorizări ale lui G.

Definiţia 1.11. *Fie $(X, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Aplicaţia $\mu : X \times X \longrightarrow \mathbb{Z}$ se numeşte funcţie Möbius dacă satisface următoarele proprietăţi:*

i) $\mu(a,b) = 0, \ \forall\, a,b \in X$ *cu* $a \not\leq b$;

ii) $\mu(a,a)=1,\ \forall\ a\in X$*;*

iii) $\sum\limits_{a\leq b\leq c}\mu(a,b)=0, \forall\ a,c\in X$ *cu* $a<c$*.*

Dacă X *are un cel mai mic element, notat cu* 0*, scriem* $\mu(a)$ *în loc de* $\mu(0,a)$*.*

Formula de inversiune a lui Möbius afirmă că dată o funcţie $f: X\longrightarrow\mathbb{Z}$, unde $(X,\leq)$ este o mulţime parţial ordonată, dacă definim $g: X\longrightarrow\mathbb{Z}$ astfel încât

$$g(x)=\sum_{z\leq x}f(z),$$

atunci

$$f(x)=\sum_{z\leq x}g(z)\mu(z,x).$$

Aplicând această formulă în cazul nostru, deducem că

$$F_2(G)=\sum_{H\in L(G)}sd(H)|L(H)|^2\mu(H,G).$$

În [19] (a se vedea şi [20]), Hall a demonstrat următorul rezultat referitor la valorile pe care le ia funcţia Möbius în cazul p-grupurilor finite.

Teorema 1.12. *Fie* G *un* p*-grup de ordin* p^n*, unde* $n\in\mathbb{N}$*. Atunci* $\mu(G)=0$ *ori de câte ori* G *nu este abelian elementar, caz în care* $\mu(G)=(-1)^n p^{C_n^2}$*. Prin convenţie* $C_0^2=C_1^2=0$*.*

Dacă grupul G este abelian, atunci $sd(H)=1$, pentru orice $H\in L(G)$. Mai mult, laticea subgrupurilor $L(G)$ este autoduală. Drept urmare

$$F_2(G)=\sum_{H\in L(G)}|L(H)|^2\mu(H,G)=\sum_{H\in L(G)}\left|L\left(\frac{G}{H}\right)\right|^2\mu(H).$$

Pentru un p-grup ciclic G de ordin p^n, unde $n\geq 1$, este uşor de văzut că $F_2(G)=2n+1$. Utilizând Teorema 1.22 şi formula de mai sus, în [50, 52], Tărnăuceanu a determinat numărul de factorizări pentru p-grupuri abeliene elementare şi pentru p-grupuri abeliene de rang 2 şi 3. Pentru toate celelalte p-grupuri abeliene finite, numărul de factorizări se poate calcula cu ajutorul formulei explicite dedusă de Farrokhi în [15].

În final, menţionăm că, în [42], Saeedi şi Farrokhi au determinat numărul de factorizări pentru grupuri diedrale, grupuri cvasidiedrale, p-grupuri modulare, grupuri diciclice şi grupuri de tip $PSL(2,p^n)$, unde p este un număr prim, $n\geq 1$ este un număr întreg şi $p^n\notin\{2,3\}$.

Capitolul 2

Contribuţii personale

2.1 Două noi aspecte probabilistice asociate grupurilor finite

2.1.1 Gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale unui grup finit

Plecând cu un grup finit G şi având în vedere legătura dintre gradul de comutativitate al subgrupurilor lui G şi numărul de factorizări ale lui G, ne propunem să introducem şi să studiem alte două aspecte probabilistice asociate lui G: *gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale lui G* şi *numărul de factorizări ciclice ale lui G*. În acest sens, ne restricţionăm la a lucra cu mulţimea parţial ordonată a subgrupurilor ciclice ale grupului G, pe care o notăm cu $L_1(G)$.

Înlocuind $L(G)$ cu $L_1(G)$ în definiţia lui $sd(G)$, obţinem o nouă cantitate semnificativă, şi anume

$$csd(G) = \frac{1}{|L_1(G)|^2} |\{(H, K) \in L_1(G) \times L_1(G) \mid HK = KH\}|.$$

Această cantitate este numită *gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale grupului finit G* şi măsoară probabilitatea ca alegând arbitrar două subgrupuri ciclice ale lui G, ele comută.

Este evident că gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice $csd(G)$ satisface următoarea relaţie

$$0 < csd(G) \leq 1.$$

Mai mult, datorită Consecinţei (9) de pe pagina 202 a referinţei [44], permutabilitatea unui subgrup $H \in L(G)$ cu toate subgrupurile ciclice ale lui G este echivalentă cu permutabilitatea lui H cu toate subgrupurile lui G. Aceasta conduce la

$$csd(G) = 1 \Longleftrightarrow sd(G) = 1.$$

Deci, conform Teoremei 1.13, grupurile finite G ce satisfac $csd(G) = 1$ sunt de fapt grupurile Iwasawa.

Ca şi proprietăţi generale ale gradului de comutativitate ale subgrupurilor ciclice, enumerăm:

– $csd(G) \geq \dfrac{|N(G) \cap L_1(G)|}{|L_1(G)|}$;

– $csd(G) \geq \dfrac{2|L_1(G)|-1}{|L_1(G)|^2}$;

– $csd(G) \geq \left(\dfrac{|L_1(M)|}{|L_1(G)|}\right)^2 csd(M),\ \forall\ M \in L(G)$;

– $G_1 \cong G_2 \Longrightarrow csd(G_1) = csd(G_2)$;

– $csd(\bigtimes_{i=1}^{k} G_i) = \prod_{i=1}^{k} csd(G_i)$, unde $(G_i)_{i=\overline{1,k}}$ o familie de grupuri finite având ordinele relativ prime;

În continuare punctăm formule explicite de calcul ale gradului de comutativitate al subgrupurilor ciclice pentru câteva clase cunoscute de grupuri finite. Menţionăm că pentru a deduce rezultate de acest tip, este necesar să descriem structura mulţimii $L_1(G)$, această problemă fiind, în general, una dificilă. Totuşi, atât numărul subgrupurilor ciclice cât şi structura acestora sunt cunoscute pentru câteva clase remarcabile de grupuri finite.

Teorema 2.1.

i) Gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale P-grupului $G_{n,p}$ este dat de următoarea egalitate

$$csd(G_{n,p})=\frac{\left(2+p+p^2+...+p^{n-2}\right)\left(2+p+p^2+...+p^{n-1}\right)+p^{n-1}\left(3+p+p^2+...+p^{n-2}\right)}{\left(2+p+p^2+...+p^{n-1}\right)^2}.$$

ii) Gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale grupului diedral D_{2n} este dat de următoarea egalitate

$$csd(D_{2n}) = \begin{cases} \frac{\tau(n)(\tau(n)+n)+n(\tau(n)+1)}{(\tau(n)+n)^2} & ,\ \textit{dacă}\ n \equiv 1\ (mod\ 2) \\ \\ \frac{\tau(n)(\tau(n)+n)+n(\tau(n)+2)}{(\tau(n)+n)^2} & ,\ \textit{dacă}\ n \equiv 0\ (mod\ 2) \end{cases}.$$

În particular,

$$csd(D_{2^n}) = \frac{n^2+(n+1)2^n}{(n+2^{n-1})^2}.$$

iii) Gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale grupului cuaternionic generalizat Q_{2^n} este

$$csd(Q_{2^n}) = \frac{n^2+(n+1)2^{n-1}}{(n+2^{n-2})^2}.$$

iv) Gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale grupului cvasidiedral QD_{2^n} este

$$csd(QD_{2^n}) = \frac{n^2+3n\cdot 2^{n-2}+5\cdot 2^{n-3}}{(n+3\cdot 2^{n-3})^2}.$$

În ceea ce priveşte comportarea asimptotică a cantităţilor descrise mai sus, următorul rezultat evidenţiază trei clase de grupuri ale căror grade de comutativitate ale subgrupurilor ciclice tind la 0 atunci când ordinele grupurilor devin foarte mari.

Corolarul 2.2.

i) $\lim_{n\to\infty} csd(G_{n,p}) = \dfrac{2p-1}{p^2}$.

ii) $\lim_{n\to\infty} csd(D_{2^n}) = 0.$

iii) $\lim_{n\to\infty} csd(Q_{2^n}) = 0.$

iv) $\lim_{n\to\infty} csd(QD_{2^n}) = 0.$

Aşa cum am amintit în secţiunea 1.1, un rezultat remarcabil privind gradul de comutativitate al unui grup finit G este că dacă $d(G) > \frac{5}{8}$ atunci G este abelian, iar egalitatea $d(G) = \frac{5}{8}$ are loc dacă şi numai dacă $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. În această subsecţiune studiem o problemă similară pentru gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice, şi anume: *Există o constantă $c \in (0,1)$ astfel încât dacă $csd(G) > c$, atunci G este Iwasawa*? Următorul rezultat oferă un răspuns acestei întrebări.

Teorema 2.3. *Gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale grupului non-Iwasawa $\mathbb{Z}_{2^n} \times Q_8$, unde $n \geq 2$, tinde la 1 când n tinde la infinit.*

Folosind rezultatul indicat de teorema precedentă, deducem că oricum am alege o constantă $c \in (0,1)$, există un număr întreg n_c suficient de mare, şi implicit un grup non-Iwasawa, şi anume $\mathbb{Z}_{2^{n_c}} \times Q_8$, astfel încât $csd(\mathbb{Z}_{2^{n_c}} \times Q_8) > c$. Prin urmare, enunţăm următorul corolar.

Corolarul 2.4. *Nu există o constantă $c \in (0,1)$ astfel încât dacă $csd(G) > c$, atunci G este un grup Iwasawa.*

Totuşi, dacă înlocuim condiţia $csd(G) > c$ cu ipoteza mai puternică $csd^*(G) > c$, unde

$$csd^*(G) = \min\{csd(S) \mid S \text{ este o secţiune a lui } G\},$$

putem oferi un răspuns pozitiv pentru problema pusă la începutul acestei subsecţiuni. Ideea de a folosi cantitatea $csd^*(G)$ a fost sugerată de faptul că un p-grup este modular dacă şi numai dacă orice secţiune a sa de ordin p^3 este modulară. Mai mult, dacă un p-grup nu este modular, atunci conţine o secţiune izomorfă cu D_8 dacă $p = 2$, sau o secţiune izomorfă cu grupul neabelian de ordin p^3 şi exponent p

$$E(p^3) = \langle x, y \mid x^p = y^p = [x,y]^p = 1, [x,y] \in Z(E(p^3))\rangle,$$

dacă $p > 2$ (a se vedea Lema 2.3.3 din referinţa [44]).

În continuare, evidenţiem un criteriu de modularitate pentru p-grupuri finite şi un criteriu de nilpotenţă pentru grupuri finite.

Propoziţia 2.5. *Fie G un p-grup finit astfel încât $csd^*(G) > \frac{41}{49}$. Atunci G este modular. În consecinţă, G este un grup Iwasawa.*

Propoziţia 2.6. *Fie G un grup finit astfel încât $csd^*(G) > \frac{19}{25}$. Atunci G este nilpotent.*

Utilizând propoziţiile anterioare, se demonstrează următorul criteriu valabil pentru orice grup finit.

Teorema 2.7. *Fie G un grup finit astfel încât $csd^*(G) > \frac{41}{49}$. Atunci G este un grup Iwasawa. Mai mult, avem $csd^*(G) = \frac{41}{49}$ dacă şi numai dacă $G \cong X \times Y$, unde X este un 2-grup cu $csd^*(X) = \frac{41}{49}$ şi Y este un grup Iwasawa de ordin impar.*

2.1.2 Numărul de factorizări ciclice ale unui grup finit

Aşa cum am remarcat în secţiunea 1.3, pentru un grup finit G există o legătură strânsă între gradul de comutativitate al subgrupurilor lui G şi numărul de factorizări ale lui G. Aşadar, este natural să ne gândim să introducem o nouă cantitate care corespunde lui $csd(G)$ aşa cum $F_2(G)$ corespunde lui $sd(G)$. În continuare vom nota prin $CF_2(G)$ numărul perechilor $(H, K) \in L_1(G)^2$ ce satisfac $G = HK$. Această cantitate va fi numită *numărul de factorizări ciclice ale lui* G, iar scopul acestei subsecţiuni este studiul acestui concept.

Câteva proprietăţi generale ale numărului de factorizări ciclice sunt următoarele:

- $CF_2(G) \leq F_2(G)$; egalitatea are loc dacă şi numai dacă G este ciclic;
- $G_1 \cong G_2 \Longrightarrow CF_2(G_1) = CF_2(G_2)$;
- $CF_2(\bigtimes_{i=1}^{k} G_i) = \prod_{i=1}^{k} CF_2(G_i)$, unde $(G_i)_{i=\overline{1,k}}$ o familie de grupuri finite având ordinele relativ prime;
- Pentru un p-grup finit G, cu $p \geq 3$, este cunoscut faptul că G poate fi scris ca produsul a două subgrupuri ciclice dacă şi numai dacă G este metaciclic (a se vedea [21], I); reformulând G este metaciclic dacă şi numai dacă numărul său de factorizări ciclice este nenul.

Să observăm că legăturile între $csd(G)$ şi $CF_2(G)$ sunt similare celor existente între $sd(G)$ şi $F_2(G)$. Mai exact, avem

$$csd(G) = \frac{1}{|L_1(G)|^2} \sum_{H \in L(G)} CF_2(H)$$

şi

$$CF_2(G) = \sum_{H \in L(G)} csd(H)|L_1(H)|^2 \mu(H, G)\,.$$

Următorul rezultat oferă formule de calcul explicite ale numerelor de factorizări ciclice asociate unor clase de grupuri finite.

Teorema 2.8.

i) Numărul de factorizări ciclice ale p-grupului abelian $G \cong \bigtimes_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p^{d_i}}$ *, cu* $1 \le d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_k$*, este dat de următoarea egalitate*

$$CF_2(G) = \begin{cases} 2d_1 + 1 & , \text{ dacă } k = 1 \\ p^{2d_1-1}[(2d_2 - 2d_1 + 1)p - 2d_2 + 2d_1 + 1] & , \text{ dacă } k = 2 \\ 0 & , \text{ dacă } k \ge 3 \end{cases}.$$

ii) Numărul de factorizări ciclice ale grupului diedral D_{2n}*, unde* $n \ge 3$*, este*

$$CF_2(D_{2n}) = 2n.$$

iii) Numărul de factorizări ciclice ale grupului cuaternionic generalizat Q_{2^n} *este dat de*

$$CF_2(Q_{2^n}) = \begin{cases} 6 & , \text{ dacă } n = 3 \\ 2^{n-1} & , \text{ dacă } n \ge 4 \end{cases}.$$

iv) Numărul de factorizări ciclice ale grupului cvasidiedral QD_{2^n} *este*

$$CF_2(QD_{2^n}) = 3 \cdot 2^{n-2}.$$

v) Numărul de factorizări ciclice ale p-grupului modular $M(p^n)$ *este dat de*

$$CF_2(M(p^n)) = p(p-1)(2n-3) + 2p.$$

Pentru mai multe detalii referitoare la rezultatele indicate în această secţiune, cititorul poate consulta articolele:

[23] Lazorec, M.S., Tărnăuceanu, M., *Cyclic subgroup commutativity degrees of finite groups*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **139** (2018), 225-240.

[26] Lazorec, M.S., Tărnăuceanu, M., *Cyclic factorization numbers of finite groups*, Ars Combin. **145** (2019), 95-110.

2.2 Aspecte probabilistice ale unor clase de grupuri finite

2.2.1 Aspecte probabilistice ale ZM-grupurilor

Conform [21], un ZM-grup este un grup finit cu toate subgrupurile Sylow ciclice ce are următoarea structură

$$ZM(m, n, r) = \langle a, b \mid a^m = b^n = 1,\ b^{-1}ab = a^r \rangle,$$

unde parametrii $(m, n, r) \in \mathbb{N}^3$ satisfac condiţiile $(m, n) = (m, r-1) = 1$ şi $r^n \equiv 1\ (mod\ m)$. Ordinul lui $ZM(m, n, r)$ este mn şi proprietăţile tripletului (m, n, r) determină faptul că m este un număr natural impar. În [10], subgrupurile unui ZM-grup au fost descrise complet arătând că există o bijecţie între mulţimea

$$L = \left\{(m_1, n_1, s) \in \mathbb{N}^3 \mid m_1|m,\ n_1|n,\ 0 \le s < m_1,\ m_1|s\frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right\}$$

şi $L(ZM(m,n,r))$. Mai mult, pentru fiecare triplet $(m_1, n_1, s) \in L$, subgrupul corespunzător al lui $ZM(m,n,r)$ este

$$H(m_1, n_1, s) = \bigcup_{i=1}^{\frac{n}{n_1}} \alpha(n_1, s)^i \langle a^{m_1} \rangle = \langle a^{m_1}, \alpha(n_1, s) \rangle,$$

unde $\alpha(x,y) = b^x a^y$, pentru $x \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}, y \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}$. Întrucât $(\frac{m}{m_1}, \frac{n}{n_1}) = 1$, deducem că ordinul subgrupului $H(m_1,n_1,s) \in L(ZM(m,n,r))$ este $\frac{mn}{m_1 n_1}$. De asemenea, conform [49], există o bijecţie între mulţimea

$$L_1 = \left\{(m_1, n_1, s) \in L \mid \frac{m}{m_1} | r^{n_1} - 1\right\}$$

şi mulţimea parţial ordonată a subgrupurilor ciclice $L_1(ZM(m,n,r))$. Aşadar, subgrupurile (ciclice) ale unui ZM-grup sunt descrise complet.

Clasele de conjugare ale subgrupurilor unui ZM-grup joacă un rol important în studiul nostru. De aceea, revizuim câteva proprietăţi ale mulţimii formate din clasele de conjugare ale subgrupurilor unui grup arbitrar. Menţionăm că cititorul poate găsi demonstraţii detaliate ale rezultatelor ce urmează a fi expuse în secţiunea III.3 a referinţei [46] şi în [8]. Notăm mulţimea claselor de conjugare ale subgrupurilor unui grup G şi clasa de conjugare a unui subgrup $H \in L(G)$, prin $\mathscr{C}(G)$, respectiv $[H]$. Dacă G este finit, atunci $(\mathscr{C}(G), \le)$ este o mulţime parţial ordonată, relaţia de ordine parţială fiind definită astfel: pentru $[H_1], [H_2] \in \mathscr{C}(G)$, avem $[H_1] \le [H_2]$ dacă şi numai dacă există $g \in G$ astfel încât $H_1 \subseteq H_2^g$. Două rezultate importante care leagă ZM-grupurile de mulţimea parţial ordonată a claselor de conjugare ale subgrupurilor sale sunt următoarele.

Propoziţia 2.9. *Fie G un ZM-grup. Atunci două subgrupuri ale lui G sunt conjugate dacă şi numai dacă au acelaşi ordin.*

Teorema 2.10. *Fie G un grup finit. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

i) G este un ZM-grup.

ii) $\mathscr{C}(G)$ este izomorfă cu laticea divizorilor lui $|G|$.

iii) $\mathscr{C}(G)$ este o latice distributivă.

Ordinul clasei de conjugare $[H(m_i, n_i, 0)] \in \mathscr{C}(ZM(m,n,r))$ este dat de

$$|[H(m_i, n_i, 0)]| = \left(m_i, \frac{r^n-1}{r^{n_i}-1}\right),$$

aşa cum a fost demonstrat în [10].

Trecem la determinarea unor formule care să ne ajute să calculăm explicit cantităţile $F_2(G)$ şi $CF_2(G)$, unde G este un ZM-grup. Obţinem două expresii explicite în care apar ordinele claselor de conjugare ale unor subgrupuri ale ZM-grupului. Aşadar, calculul acestor numere de factorizări este redus la sumarea unor produse dintre cei mai mari divizori comuni a două numere naturale.

Teorema 2.11.

i) Numărul de factorizări ale lui $ZM(m,n,r)$ este

$$F_2(ZM(m,n,r)) = \sum_{\substack{m_2,m_3|m\\ n_2,n_3|n\\ (m_2,m_3)=1\\ (n_2,n_3)=1}} \left(m_2, \frac{r^n-1}{r^{n_2}-1}\right)\left(m_3, \frac{r^n-1}{r^{n_3}-1}\right).$$

ii) Numărul de factorizări ciclice ale lui $ZM(m,n,r)$ este

$$CF_2(ZM(m,n,r)) = \sum_{\substack{m_2,m_3|m\\ n_2,n_3|n\\ (m_2,m_3)=1\\ (n_2,n_3)=1\\ \frac{m}{m_2}|r^{n_2}-1,\, \frac{m}{m_3}|r^{n_3}-1}} \left(m_2, \frac{r^n-1}{r^{n_2}-1}\right)\left(m_3, \frac{r^n-1}{r^{n_3}-1}\right).$$

Aşa cum am menţionat în secţiunea 1.3, gradul de comutativitate al subgrupurilor unui grup finit poate fi calculat explicit dacă ştim numerele de factorizări ale subgrupurilor sale. Mai exact, avem

$$sd(G) = \frac{1}{|L(G)|^2} \sum_{H\in L(G)} F_2(H).$$

Pentru un ZM-grup, numărul total de subgrupuri a fost determinat în [10] şi este dat de

$$|L(ZM(m,n,r))| = \sum_{m_1|m}\sum_{n_1|n} \left(m_1, \frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right).$$

Deci, pentru a obţine gradul de comutativitate al subgrupurilor lui $ZM(m,n,r)$, trebuie să găsim o formă explicită a sumei $\sum\limits_{H(m_1,n_1,s)\in L(ZM(m,n,r))} F_2(H(m_1,n_1,s))$. Două subgrupuri conjugate au acelaşi număr de factorizări pentru că sunt izomorfe. Aşadar, putem scrie aceeaşi sumă ca

$$\sum_{[H(m_1,n_1,0)]\in\mathscr{C}(ZM(m,n,r))} |[H(m_1,n_1,0)]| F_2(H(m_1,n_1,0)).$$

Notăm prin f_{m_1,n_1} cantitatea $F_2(H(m_1,n_1,0))$. Următorul pas este să determinăm o formulă de calcul al acestui parametru. Notăm prin (c_1), (c_2), (c_3) condiţiile:

$$(c_1)\begin{cases} m_2,m_3|m\\ n_2,n_3|n\\ (m_2,m_3)=m_1\\ (n_2,n_3)=n_1\\ |[H(m_2,n_2,0)]|=1\\ |[H(m_3,n_3,0)]|=1, \end{cases} \quad (c_2)\begin{cases} m_2,m_3|m\\ n_2,n_3|n\\ (m_2,m_3)=m_1\\ (n_2,n_3)=n_1\\ |[H(m_2,n_2,0)]|\neq 1\\ |[H(m_3,n_3,0)]|=1, \end{cases} \quad (c_3)\begin{cases} m_2,m_3|m\\ n_2,n_3|n\\ (m_2,m_3)=m_1\\ (n_2,n_3)=n_1\\ |[H(m_2,n_2,0)]|\neq 1\\ |[H(m_3,n_3,0)]|\neq 1. \end{cases}$$

Lema 2.12. *Fie $ZM(m,n,r)$ un ZM-grup şi fie $H(m_1,n_1,0)$ un subgrup al său. Atunci*

$$f_{m_1,n_1} = \sum_{(c_1)} \left(m_2, \frac{r^n-1}{r^{n_2}-1}\right)\left(m_3, \frac{r^n-1}{r^{n_3}-1}\right) + 2\sum_{(c_2)} \frac{\left(m_2, \frac{r^n-1}{r^{n_2}-1}\right)\left(m_3, \frac{r^n-1}{r^{n_3}-1}\right)}{\left(m_1, \frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right)}$$
$$+ \sum_{(c_3)} \frac{\left(m_2, \frac{r^n-1}{r^{n_2}-1}\right)\left(m_3, \frac{r^n-1}{r^{n_3}-1}\right)}{\left(m_1, \frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right)^2}.$$

Utilizând Lema 2.12, cantităţile f_{m_1,n_1} pot fi calculate pentru orice divizori m_1 şi n_1 ai lui m, respectiv n. Drept consecinţă, gradul de comutativitate al subgrupurilor unui ZM-grup este dat de următorul rezultat.

Teorema 2.13. *Gradul de comutativitate al subgrupurilor lui $ZM(m,n,r)$ este*

$$sd(ZM(m,n,r)) = \frac{\sum\limits_{m_1|m}\sum\limits_{n_1|n} \left(m_1, \frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right) f_{m_1,n_1}}{\left[\sum\limits_{m_1|m}\sum\limits_{n_1|n} \left(m_1, \frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right)\right]^2}.$$

Numărul de subgrupuri ciclice ale unui ZM-grup a fost determinat în [49] şi valoarea sa este

$$|L_1(ZM(m,n,r))| = \sum_{m_1|m} \sum_{\substack{n_1|n \\ \frac{m}{m_1}|r^{n_1}-1}} \left(m_1, \frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right).$$

Legătura dintre gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale lui $ZM(m,n,r)$ şi numerele de factorizări ciclice ale subgrupurilor sale este dată de

$$csd(ZM(m,n,r)) = \frac{1}{|L_1(ZM(m,n,r))|^2} \sum_{[H(m_1,n_1,0)]\in\mathscr{C}(ZM(m,n,r))} |[H(m_1,n_1,0)]| CF_2(H(m_1,n_1,0)).$$

Notând $CF_2(H(m_1,n_1,0))$ prin cf_{m_1,n_1} şi repetând raţionamentul utilizat pentru a demonstra Lema 2.12, obţinem două rezultate ce ne permit să calculăm explicit cantitatea $csd(ZM(m,n,r))$.

Lema 2.14. *Fie $ZM(m,n,r)$ un ZM-grup şi fie $H(m_1,n_1,0)$ un subgrup al său. Atunci*

$$cf_{m_1,n_1} = \sum_{\substack{(c_1) \\ \frac{m}{m_2}|r^{n_2}-1 \\ \frac{m}{m_3}|r^{n_3}-1}} \left(m_2, \frac{r^n-1}{r^{n_2}-1}\right)\left(m_3, \frac{r^n-1}{r^{n_3}-1}\right) + 2 \sum_{\substack{(c_2) \\ \frac{m}{m_2}|r^{n_2}-1 \\ \frac{m}{m_3}|r^{n_3}-1}} \frac{\left(m_2, \frac{r^n-1}{r^{n_2}-1}\right)\left(m_3, \frac{r^n-1}{r^{n_3}-1}\right)}{\left(m_1, \frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right)}$$
$$+ \sum_{\substack{(c_3) \\ \frac{m}{m_2}|r^{n_2}-1 \\ \frac{m}{m_3}|r^{n_3}-1}} \frac{\left(m_2, \frac{r^n-1}{r^{n_2}-1}\right)\left(m_3, \frac{r^n-1}{r^{n_3}-1}\right)}{\left(m_1, \frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right)^2}.$$

Teorema 2.15. *Gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale lui $ZM(m,n,r)$ este*

$$csd(ZM(m,n,r)) = \frac{\sum\limits_{m_1|m}\sum\limits_{n_1|n}\left(m_1, \frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right)cf_{m_1,n_1}}{\left[\sum\limits_{m_1|m}\sum\limits_{\substack{n_1|n\\ \frac{m}{m_1}|r^{n_1}-1}}\left(m_1, \frac{r^n-1}{r^{n_1}-1}\right)\right]^2}.$$

Înainte de a enunţa următorul rezultat, introducem funcţia $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dată prin

$$g(n) = n \sum_{\substack{r|n\\ s|n}} \frac{1}{(r,s)},$$

ce a fost utilizată în [47] pentru a exprima gradul de comutativitate al subgrupurilor grupului diedral D_{2m}, unde $m \geq 3$ este un număr întreg. Această funcţie este multiplicativă şi pentru orice număr prim p şi $\alpha \in \mathbb{N}^*$, avem

$$g(p^\alpha) = \frac{(2\alpha+1)p^{\alpha+2} - (2\alpha+3)p^{\alpha+1} + p + 1}{(p-1)^2}.$$

De asemenea, pentru un număr întreg pozitiv n, notăm prin $\tau(n)$ şi $\sigma(n)$ numărul divizorilor lui n şi, respectiv, suma acestora. În cele ce urmează, indicăm o formă explicită a rezultatelor date de Teoremele 2.13 şi 2.15 pentru o clasă particulară de ZM-grupuri.

Propoziţia 2.16. *Fie $ZM(m,n,r)$ un ZM-grup astfel încât n este un număr prim. Atunci*

i) $sd(ZM(m,n,r)) = \frac{\tau(m)^2+2\tau(m)\sigma(m)+g(m)}{(\tau(m)+\sigma(m))^2}$;

ii) $csd(ZM(m,n,r)) = \frac{\tau(m)(\tau(m)+m)+m(\tau(m)+1)}{(\tau(m)+m)^2}$.

Este interesant că pentru un număr prim n, formulele explicite de calcul ale gradelor de comutativitate ale subgrupurilor (ciclice) ale ZM-grupurilor depind doar de parametrul m. Deci, dacă considerăm un alt număr prim n_1 şi o valoare corespunzătoare r_1 satisfăcând

$$(m,n_1) = (m, r_1 - 1) = 1 \text{ şi } r_1^{n_1} \equiv 1 \ (mod\ m),$$

atunci au loc $sd(ZM(m,n,r)) = sd(ZM(m,n_1,r_1))$ şi $csd(ZM(m,n,r)) = csd(ZM(m,n_1,r_1))$. În consecinţă, există o infinitate de ZM-grupuri având acelaşi grad de comutativitate al subgrupurilor (ciclice).

În final, indicăm o nouă clasă de grupuri ale căror grade de comutativitate ale subgrupurilor (ciclice) tind la 0 odată ce ordinele grupurilor tind la infinit.

Corolarul 2.17. *Fie n şi $p \geq 3$ două numere prime şi fie α un număr întreg pozitiv. Atunci*

$$\lim_{\alpha\to\infty} sd(ZM(p^\alpha,n,r)) = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{\alpha\to\infty} csd(ZM(p^\alpha,n,r)) = 0.$$

2.2.2 Aspecte probabilistice ale grupurilor diciclice (generalizate)

O altă clasă remarcabilă de grupuri finite este cea a grupurilor diciclice. În [42], autorii au determinat o formulă explicită de calcul a numărului de factorizări ale acestor grupuri, un rezultat pe care îl vom aminti pe parcurs. Completăm studiul aspectelor probabilistice ale grupurilor diclicle determinând gradul de comutativitate al subgrupurilor (ciclice) precum şi numărul de factorizări ciclice ale acestora. Apoi, ne îndreptăm atenţia asupra aceloraşi trei aspecte probabilistice asociate unei clase de grupuri diciclice generalizate.

Un prim obiectiv al acestei subsecţiuni este să determinăm o formulă explicită de calcul a gradului de comutativitate al subgrupurilor (ciclice ale) grupului diciclic

$$Dic_{4n} = \langle a, \gamma \mid a^{2n} = 1, \gamma^2 = a^n, \gamma a \gamma^{-1} = a^{-1} \rangle, \text{ unde } n \geq 1.$$

Întrucât, prin definiţie $Dic_4 \cong \mathbb{Z}_4$, ne interesează în special cazul $n \geq 2$.

Teorema 2.18. *Fie $n = 2^m m' \geq 2$, unde $m \in \mathbb{N}$ şi $m' \geq 1$ este un număr întreg impar.*

i) Gradul de comutativitate al subgrupurilor grupului diciclic Dic_{4n} este

$$sd(Dic_{4n}) = \frac{(m+2)^2\tau(m')^2 + 2(m+2)\tau(m')\sigma(n) + [(m-1)2^{m+3} + 9]g(m')}{[(m+2)\tau(m') + \sigma(n)]^2}.$$

ii) Gradul de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale grupului diciclic Dic_{4n} este dat de

$$csd(Dic_{4n}) = \begin{cases} \frac{\tau(2n)(\tau(2n)+n)+n(\tau(2n)+1)}{(\tau(2n)+n)^2} & , \text{ dacă } n \equiv\ 1 \ (mod\ 2) \\ \\ \frac{\tau(2n)(\tau(2n)+n)+n(\tau(2n)+2)}{(\tau(2n)+n)^2} & , \text{ dacă } n \equiv\ 0 \ (mod\ 2) \end{cases}.$$

Întrucât $Dic_8 \cong Q_8$, rezultă cu uşurinţă că $F_2(Dic_8) = 14$. Numărul de factorizări ale grupului diciclic Dic_{4n}, unde $n \geq 3$, a fost studiat în [42]. Pentru a determina o formulă explicită de calcul a cantităţii $F_2(Dic_{4n})$, în urma descompunerii lui n într-un produs de factori primi, i.e. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, autorii au introdus parametrii

$$\delta_n = \prod_{i=1}^{k} \left(\alpha_i + \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) - n \quad \text{şi} \quad \Phi_x(n) = \prod_{i=1}^{k} \left(2\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} - 1 \right),$$

şi au demonstrat următorul rezultat.

Teorema 2.19. *Numărul de factorizări ale grupului diciclic Dic_{4n}, unde $n \geq 3$, este*

$$F_2(Dic_{4n}) = \begin{cases} \Phi_x(n) + 4\delta_n + 6n & , \text{ dacă } n \equiv 1 \ (mod\ 2) \\ \Phi_x(n) + 2\Phi_x(\frac{n}{2}) + 2\delta_n + 2n & , \text{ dacă } n \equiv 0 \ (mod\ 2) \end{cases}.$$

Pentru a completa studiul asupra aspectelor probabilistice ale grupurilor diciclice, în cele ce urmează, indicăm o formulă explicită de calcul a numărului de factorizări ciclice ale acestor grupuri. Pentru $n = 2$, avem $CF_2(Dic_8) = CF_2(Q_8) = 6$.

Teorema 2.20. *Numărul de factorizări ciclice ale grupului diciclic Dic_{4n}, unde $n \geq 3$, este*

$$CF_2(Dic_{4n}) = \begin{cases} 4n & , \text{ dacă } n \equiv 1 \ (mod\ 2) \\ 2n & , \text{ dacă } n \equiv 0 \ (mod\ 2) \end{cases}.$$

Pentru un grup abelian arbitrar G de ordin $2n$, unde $n \geq 1$, un grup diciclic generalizat asociat, notat prin $Dic_{4n}(G)$, are următoarea structură

$$Dic_{4n}(G) = \langle G, \gamma \mid \gamma^4 = 1, \gamma^2 \in G \setminus \{1\}, \gamma g \gamma^{-1} = g^{-1},\ \forall\ g \in G \rangle.$$

Se observă cu uşurinţă că $Dic_{4n}(\mathbb{Z}_{2n}) = Dic_{4n}$. În ceea ce priveşte studiul aspectelor probabilistice asociate acestor grupuri diciclice generalizate, un rol important îl joacă numărul de elemente $g \in G$ cu proprietatea $ord(g) = 2$. Fiecare astfel de element, poate fi ales ca fiind γ^2. Tocmai de aceea, ne limităm la a lucra cu $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$, unde $n \geq 2$ este un număr întreg par, caz în care avem doar 3 alegeri posibile pentru γ^2.

Fie aşadar a şi b generatorii grupurilor ciclice $\mathbb{Z}_n$, şi respectiv $\mathbb{Z}_2$. Cum $\gamma^2 \in A \setminus \{1\}$ şi $\gamma^4 = 1$, deducem că $\gamma^2 \in \{a^{\frac{n}{2}}, b, a^{\frac{n}{2}}b\}$. Notăm că fiecare alegere a lui γ^2 determină un grup diciclic generalizat, deci avem 3 grupuri distincte. Pentru a găsi formulele explicite de calcul ale cantităţilor $sd(Dic_{4n}(G))$ şi $csd(Dic_{4n}(G))$, avem nevoie de două rezultate preliminare pentru a analiza cazul caracterizat de $n = 2^m$, unde $m \geq 2$ este un număr întreg, şi $\gamma^2 = a^{\frac{n}{2}}$. Notăm cantitatea $\frac{n}{2} = 2^{m-1}$ prin n'.

Lema 2.21 *Numărul de subgrupuri ale produsului direct $\mathbb{Z}_2 \times D_{2n'}$ este*

$$|L(\mathbb{Z}_2 \times D_{2n'})| = 5\sigma(n') + 3\tau(n') - 2n' - 1.$$

Corolarul 2.22. *Numărul de subgrupuri ale grupului $\mathbb{Z}_2 \times Q_{4n'}$ este*

$$|L(\mathbb{Z}_2 \times Q_{4n'})| = 5\sigma(n') + 3\tau(n') - 2n' + 2.$$

Avem toate instrumentele necesare pentru a determina gradele de comutativitate ale subgrupurilor (ciclice ale) grupurilor diciclice generalizate $Dic_{4n}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n)$.

Teorema 2.23. *Fie $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$ un grup abelian, unde $n = 2^m m' \geq 2$, $m \in \mathbb{N}^*$ şi $m' \geq 1$ este un număr întreg impar.*

i) Dacă $m \geq 1, m' \neq 1$ şi $\gamma^2 \in \{a^{\frac{n}{2}}, b, a^{\frac{n}{2}}b\}$, sau, dacă $m \geq 2, m' = 1$ şi $\gamma^2 \in \{b, a^{\frac{n}{2}}b\}$, gradul de comutativitate al subgrupurilor grupului diciclic generalizat $Dic_{4n}(G)$ este

$$sd(Dic_{4n}(G)) = \frac{|L(G)|^2 + 2|L(G)|\sigma(n) + [(m-1)2^{m+3} + 9]g(m')}{(|L(G)| + \sigma(n))^2},$$

în timp ce gradul său de comutativitate al subgrupurilor ciclice este

$$csd(Dic_{4n}(G)) = \frac{|L_1(G)|(|L_1(G)| + n) + n(|L_1(G)| + 2)}{(|L_1(G)| + n)^2}.$$

ii) Dacă $m \geq 2, m' = 1$ şi $\gamma^2 = a^{\frac{n}{2}}$, grupul diciclic generalizat $Dic_{4n}(G)$ este izomorf cu produsul direct $\mathbb{Z}_2 \times Q_{2^{m+1}}$, gradul de comutativitate al subgrupurilor sale este

$$sd(\mathbb{Z}_2 \times Q_{2^{m+1}}) = \frac{2^{m+2}(24m - 37) + 9m^2 - 18m + 185}{[2^{m+2} + 3(m-1)]^2},$$

în timp ce gradul de comutativitate al subgrupurilor sale ciclice este

$$csd(\mathbb{Z}_2 \times Q_{2^{m+1}}) = \frac{2^m(4m + 8) + (2m + 2)^2}{(2^m + 2m + 2)^2}.$$

iii) Dacă $m = m' = 1$ şi $\gamma^2 \in \{a^{\frac{n}{2}}, b, a^{\frac{n}{2}}b\}$, grupul diciclic generalizat $Dic_{4n}(G)$ este izomorf cu grupul abelian $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ şi

$$sd(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) = csd(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) = 1.$$

Ca o consecinţă a Teoremei 2.23, evidenţiem un alt exemplu de clasă de grupuri ale căror grade de comutativitate ale subgrupurilor (ciclice) tind la 0 odată ce ordinele grupurilor tind la infinit.

Corolarul 2.24. $\lim_{m\to\infty} sd(\mathbb{Z}_2 \times Q_{2^{m+1}}) = 0$ *şi* $\lim_{m\to\infty} csd(\mathbb{Z}_2 \times Q_{2^{m+1}}) = 0.$

Ultimul aspect probabilistic asociat grupurilor diciclice generalizate pe care îl studiem este numărul de factorizări ciclice. Din nou, alegem să lucrăm doar cu grupurile $Dic_{4n}(G)$, unde $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$ şi $n \geq 2$ este un număr întreg par. Notăm cu a şi b generatorii grupurilor ciclice $\mathbb{Z}_n$ şi, respectiv, $\mathbb{Z}_2$.

Teorema 2.25. *Fie $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$ un grup abelian, unde $n = 2^m m' \geq 2$, $m \in \mathbb{N}^*$ şi $m' \geq 1$ este un număr întreg impar.*

i) Dacă $m = 1, m' \neq 1$ şi $\gamma^2 \in \{a^{\frac{n}{2}}, b, a^{\frac{n}{2}}b\}$, sau, dacă $m \geq 2, m' \geq 1$ şi $\gamma^2 \in \{b, a^{\frac{n}{2}}b\}$, numărul de factorizări ciclice ale grupului diedral generalizat $Dic_{4n}(G)$ este

$$CF_2(Dic_{4n}(G)) = 4n.$$

ii) Dacă $m \geq 2, m' \neq 1$ şi $\gamma^2 = a^{\frac{n}{2}}$, numărul de factorizări ciclice ale grupului diedral generalizat $Dic_{4n}(G)$ este

$$CF_2(Dic_{4n}(G)) = 0.$$

iii) Dacă $m \geq 2, m' = 1$ şi $\gamma^2 = a^{\frac{n}{2}}$, grupul diciclic generalizat $Dic_{4n}(G)$ este izomorf cu produsul direct $\mathbb{Z}_2 \times Q_{2^{m+1}}$ şi numărul său de factorizări ciclice este

$$CF_2(\mathbb{Z}_2 \times Q_{2^{m+1}}) = 0.$$

iv) Dacă $m = m' = 1$ şi $\gamma^2 \in \{a^{\frac{n}{2}}, b, a^{\frac{n}{2}}b\}$, grupul diciclic generalizat $Dic_{4n}(G)$ este izomorf cu grupul abelian $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ şi numărul său de factorizări ciclice este

$$CF_2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) = 10.$$

Pentru mai multe detalii referitoare la rezultatele indicate în această secţiune, cititorul poate consulta articolele:

[24] Lazorec, M.S., *Probabilistic aspects of ZM-groups*, Comm. Algebra **47** (2019), no. 2, 541-552.

[28] Lazorec, M.S., Tărnăuceanu, M., *On some probabilistic aspects of (generalized) dicyclic groups*, acceptat spre publicare în Quaest. Math., arXiv:1612.01967.

2.3 Generalizări ale gradelor de comutativitate ale subgrupurilor unui grup finit

2.3.1 Grupuri finite cu două grade relative de comutativitate ale subgrupurilor

Fie G un grup finit. Considerăm funcţia

$$f : L(G) \longrightarrow [0,1] \text{ dată prin } f(H) = sd(H,G).$$

Propoziţia 1.9 afirmă că o proprietate relevantă a funcţiei f este faptul că este constantă pe fiecare clasă de conjugare a subgrupurilor lui G. Este uşor de văzut că $|Im\ f| = 1$ dacă şi numai dacă G este un grup Iwasawa. Având în vedere aceste rezultate, scopul nostru este să studiem următoarea clasă de grupuri

$$\mathscr{C} = \{G \text{ este un grup finit} \mid |Im\ f| = 2\}.$$

Notăm prin $\nu(G)$ şi $[H]$ numărul de clase de conjugare ale subgrupurilor non-normale ale lui G, respectiv clasa de conjugare a unui subgrup H al lui G. Este evident că $sd(\{1\}, G) = 1$ şi că orice subgrup normal al lui G este permutabil, deci comută cu toate subgrupurile lui G. De asemenea, este de aşteptat ca, în general, odată ce $\nu(G)$ creşte, probabilitatea ca G să aibă mai mult de două grade relative de comutativitate ale subgrupurilor creşte de asemenea. Aşadar, este natural să ne gândim că un grup G ar putea să fie conţinut în $\mathscr{C}$ dacă $\nu(G) = 1$ sau $\nu(G) = 2$. Această ipoteză suplimentară ne ajută în studiul nostru deoarece toate grupurile finite având una sau două clase de conjugare ale subgrupurilor non-normale au fost clasificate în [7] şi, respectiv, în [37]. Mai exact au fost demonstrate următoarele două teoreme.

Teorema 2.26. *Fie G un grup finit. Atunci $\nu(G) = 1$ dacă şi numai dacă G este izomorf cu unul dintre următoarele grupuri:*

(1) $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_{q^n}$, unde $[\mathbb{Z}_p, \Phi(\mathbb{Z}_{q^n})] = 1$, p, q sunt numere prime astfel încât $q | p-1$ şi n este un număr întreg pozitiv;

(2) $M(p^n) = \langle x, y \mid x^{p^{n-1}} = y^p = 1, y^{-1}xy = x^{1+p^{n-2}} \rangle$, unde p este un număr prim şi $n \geq 3$, dacă $p \geq 3$, sau $n \geq 4$, dacă $p = 2$.

Teorema 2.27. *Fie G un grup finit. Atunci $\nu(G) = 2$ dacă şi numai dacă G este izomorf cu unul dintre următoarele grupuri:*

(1) A_4;

(2) $\langle x, y \mid x^q = y^{p^n} = 1, y^{-1}xy = x^k \rangle$, unde p, q sunt numere prime astfel încât $p^2 | q-1$, $n > 1$ şi $k^{p^2} \equiv 1 \ (mod\ q)$ cu $k \neq 1$;

(3) $\langle x, y, z \mid x^r = y^{p^n} = z^q = [x,z] = [y,z] = 1, y^{-1}xy = x^k \rangle$, unde p, q, r sunt numere prime astfel încât $p \neq q, q \neq r, p | r-1$ şi $k^p \equiv 1 \ (mod\ r)$ cu $k \neq 1$;

(4) $\langle x, y \mid x^{q^2} = y^{p^n} = 1, y^{-1}xy = x^k \rangle$, unde p, q sunt numere prime astfel încât $p | q-1$ şi are loc $k^p \equiv 1 \ (mod\ q^2)$ cu $k \neq 1$;

(5) $M(p^n) \times \mathbb{Z}_q$, *unde* p, q *sunt numere prime astfel încât* $p \neq q$ *şi* $n \geq 3$, *dacă* $p \geq 3$, *sau* $n \geq 4$, *dacă* $p = 2$;

(6) $\mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_4$;

(7) Q_{16};

(8) $\langle x, y \mid x^4 = y^{2^n} = 1, x^{-1}yx = y^{1+2^{n-1}} \rangle$, *unde* $n \geq 3$;

(9) D_8.

Scopul nostru este să parcurgem cele două liste de grupuri şi să le găsim pe cele conţinute în $\mathscr{C}$. Rezultate în acest sens sunt oferite de următoarele două teoreme.

Teorema 2.28. *Fie* G *un grup finit astfel încât* $\nu(G) = 1$. *Atunci* $G \in \mathscr{C}$ *dacă şi numai dacă* $G \cong S_3$.

Teorema 2.29. *Fie* G *un grup finit cu* $\nu(G) = 2$. *Atunci* $G \in \mathscr{C}$ *dacă şi numai dacă* $G \cong S_3 \times \mathbb{Z}_q$, *unde* $q \geq 5$ *este un număr prim.*

Menţionăm că chiar dacă $\nu(G) = n$, unde $n \geq 3$ este un număr întreg, găsim întotdeauna un grup G ce aparţine lui $\mathscr{C}$. Un exemplu ar fi $G \cong S_3 \times \mathbb{Z}_{5^{n-1}}$. De asemenea, remarcăm că teorema precedentă poate fi generalizată prin înlocuirea lui $\mathbb{Z}_q$, unde $q \geq 5$ este un număr prim, cu un grup Iwasawa G astfel încât 6 şi $|G|$ sunt relativ prime.

Corolarul 2.30. *Fie* G *un grup Iwasawa finit astfel încât* $(6, |G|) = 1$. *Atunci* $S_3 \times G$ *este conţinut în* $\mathscr{C}$.

Până acum, am folosit numărul de clase de conjugare ale subgrupurilor non-normale ale unui grup finit G pentru a stabili că $\mathscr{C}$ conţine o infinitate de grupuri. Următorul nostru scop este să găsim o condiţie care să garanteze că un grup finit G nu face parte din $\mathscr{C}$.

Propoziţia 2.31. *Fie* G *un grup finit. Dacă* $sd(G) < \frac{1}{2} + \frac{|N(G)|+1}{2|L(G)|}$, *atunci* $|Im\ f| > 2$.

Remarcăm că marginea superioară $\frac{1}{2} + \frac{|N(G)|+1}{2|L(G)|}$ este cea mai bună posibilă întrucât, dacă $G \cong S_3$, avem $sd(G) = \frac{1}{2} + \frac{|N(G)|+1}{2|L(G)|}$, dar $|Im\ f| = 2$ aşa cum am văzut deja. De asemenea, rezultatul anterior afirmă, în mare, că un grup G ar putea fi conţinut în $\mathscr{C}$ dacă gradul său de comutativitate al subgrupurilor este "mare". În consecinţă, este de aşteptat ca clasele de grupuri, pentru care gradele de comutatitivitate ale subgrupurilor tind la 0 atunci când ordinele grupurilor tind la infinit, să nu fie incluse în $\mathscr{C}$. Aşa cum spuneam în secţiunea 1.2, câteva exemple cunoscute de astfel de clase de grupuri au fost indicate în [47]. Acestea sunt $\{D_{2^n}\}_{n\geq 3}$, $\{Q_{2^n}\}_{n\geq 3}$ şi $\{QD_{2^n}\}_{n\geq 4}$.

Corolarul 2.32. *Mulţimile* $\{D_{2^n}\}_{n\geq 3}$, $\{Q_{2^n}\}_{n\geq 3}$ *şi* $\{QD_{2^n}\}_{n\geq 4}$ *nu sunt incluse în* $\mathscr{C}$.

În ceea ce priveşte grupurile diedrale, rezultatul dat de Corolarul 2.32 poate fi îmbunătăţit, fapt indicat de următoarea teoremă.

Teorema 2.33. $S_3 \cong D_6$ *este unicul grup diedral finit conţinut în* $\mathscr{C}$.

În final, să considerăm următoarele două mulţimi:

$$A = \{sd(G) \mid G \text{ este un grup finit}\} \text{ şi } B = \{sd(H,G) \mid G \text{ este un grup finit}, H \in L(G)\}.$$

Fie $\alpha \in [0,1]$. O problemă interesantă se referă la existenţa unui şir de grupuri $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} sd(G_n) = \alpha$. Cu alte cuvinte, se ridică întrebarea: *Este mulţimea A densă în* $[0,1]$? Această problemă rămâne deschisă, dar următorul rezultat afirmă că un răspuns pozitiv poate fi dat dacă lucrăm cu mulţimea B.

Teorema 2.34 *Mulţimea B este densă în* $[0,1]$.

2.3.2 Gradul relativ de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale unui grup finit

Punctul de plecare al acestei subsecţiuni îl constituie Problema 3.6 indicată în finalul lucrării [48]. Pentru un grup finit G, autorul sugerează studiul "restricţiei" funcţiei

$$sd : L(G) \times L(G) \longrightarrow [0,1]$$

la $L_1(G)\times L_1(G)$. Scopul nostru este să oferim câteva răspunsuri pentru această problemă deschisă. Aşadar, pentru un grup finit G şi un subgrup H al lui G, definim *gradul relativ de comutativitate al subgrupurilor ciclice ale lui H în G* ca fiind cantitatea

$$csd(H,G) = \frac{1}{|L_1(H)||L_1(G)|}|\{(H_1,G_1) \in L_1(H) \times L_1(G) \mid H_1G_1 = G_1H_1\}|.$$

Fie G un grup finit. Este evident că

$$csd(G,G) = csd(G) \text{ şi } 0 < csd(H,G) \le 1,\ \forall\, H \in L(G).$$

De asemenea, pentru un subgrup H al lui G avem $csd(H,G) = 1$ dacă şi numai dacă toate subgrupurile ciclice ale lui H comută cu toate subgrupurile ciclice ale lui G. Dar permutabilitatea subgrupurilor ciclice ale lui H cu toate subgrupurile ciclice ale lui G este echivalentă cu permutabilitatea tuturor subgrupurilor lui H cu toate subgrupurile lui G (a se vedea Consecinţa (9) de pe pagina 202 a referinţei [44]). Aşadar,

$$csd(H,G) = 1 \Longleftrightarrow sd(H,G) = 1.$$

Alte proprietăţi ale gradului relativ de comutativitate al subgrupurilor ciclice sunt:

- $csd(H,G) \ge \frac{|N(G)\cap L_1(G)|}{|L_1(G)|},\ \forall\, H \in L(G)$;
- $csd(H,G) \ge \frac{|L_1(H)|}{|L_1(G)|} csd(H),\ \forall\, H \in L(G), H \ne G$;
- $csd(\bigtimes_{i=1}^{k} H_i, \bigtimes_{i=1}^{k} G_i) = \prod_{i=1}^{k} csd(H_i,G_i)$, unde $(G_i)_{i=\overline{1,k}}$ este o familie de grupuri finite cu ordinele relativ prime;

– Funcţia $csd(-, G) : L(G) \longrightarrow [0,1]$ este constantă pe clasele de conjugare ale subgrupurilor lui G.

În continuare ne concentrăm pe numărul de grade relative de comutativitate ale subgrupurilor ciclice ale unui grup finit G, ce este egal cu $|Im\ f_1|$, unde

$$f_1 : L(G) \longrightarrow [0,1] \text{ este dată de } f_1(H) = csd(H, G),\ \forall\ H \in L(G).$$

Pentru un grup finit G, se observă cu uşurinţă că $|Im\ f_1| = 1$ dacă şi numai dacă toate subgrupurile ciclice ale lui G sunt permutabile. Deci,

$$|Im\ f_1| = 1 \Longleftrightarrow csd(G) = 1 \Longleftrightarrow G \text{ este un grup Iwasawa},$$

cea de-a doua echivalenţă fiind indicată în subsecţiunea 2.1.1. Următorul rezultat este un criteriu care evidenţiază o condiţie suficientă ca un grup finit G să aibă cel puţin 3 grade relative de comutativitate ale subgrupurilor ciclice.

Propoziţia 2.35. *Fie G un grup finit astfel încât are loc inegalitatea $csd(G) < \frac{1}{2} + \frac{|N(G) \cap L_1(G)|}{2|L_1(G)|}$. Atunci $|Im\ f_1| > 2$.*

Ca o aplicaţie a criteriului oferit de Propoziţia 2.35, demonstrăm că nu există 2-grupuri diedrale, 2-grupuri cuaternionice generalizate şi 2-grupuri cvasidiedrale finite cu două grade relative de comutativitate ale subgrupurilor ciclice.

Corolarul 2.36. *Fie G un grup finit izomorf cu un grup conţinut în oricare dintre familiile $\{D_{2^n}\}_{n\geq 3}$, $\{Q_{2^n}\}_{n\geq 3}$, $\{QD_{2^n}\}_{n\geq 4}$. Atunci $|Im\ f_1| \neq 2$.*

Posibilele valori ale lui $|Im\ f_1|$ ce au fost obţinute în demonstraţia corolarului precedent, în cazul 2-grupurilor cuaternionice generalizate, ne indică următorul rezultat.

Teorema 2.37. *Fie G un grup finit izomorf cu Q_{2^n}, unde $n \geq 3$. Atunci*

$$|Im\ f_1| = \begin{cases} 1 & ,\ dacă\ \ n = 3 \\ n, & ,\ dacă\ \ n \geq 4 \end{cases}.$$

O consecinţă directă a Teoremei 2.37 este legată de existenţa unui grup finit G cu un număr prescris de grade relative de comutativitate ale subgrupurilor ciclice.

Corolarul 2.38. *Fie n un număr întreg pozitiv astfel încât $n \neq 2$. Atunci există un grup finit G având n grade relative de comutativitate ale subgrupurilor ciclice.*

Ne mutăm atenţia asupra indicării unor clase de grupuri finite cu puţine grade relative de comutativitate ale subgrupurilor ciclice. Considerând un grup finit G, întrucât dorim să obţinem o valoare mică pentru $|Im\ f_1|$, din nou este natural să alegem să lucrăm cu grupurile G pentru care $\nu(G) = 1$ sau $\nu(G) = 2$. Reamintim că principalul avantaj al alegerii acestor grupuri este faptul că ele au fost clasificate complet, aşa cum indică Teoremele 2.26 şi 2.27. Pentru uşurinţa scrierii, notăm prin G_i grupul finit de tip (i) din fiecare dintre cele două clasificări. Următoarele două rezultate indică valoarea lui $|Im\ f_1|$ pentru fiecare grup G_i.

Teorema 2.39. *Fie G un grup finit cu $\nu(G) = 1$. Atunci*

$$|Im\ f_1| = \begin{cases} 3 & ,\ dac\breve{a}\ \ G \cong G_1 \\ 1 & ,\ dac\breve{a}\ \ G \cong G_2 \end{cases}.$$

Teorema 2.40. *Fie G un grup finit cu $\nu(G) = 2$. Atunci*

$$|Im\ f_1| = \begin{cases} 5, & dac\breve{a}\ \ G\ \ este\ \ izomorf\ \ cu\ \ unul\ \ dintre\ \ grupurile\ \ G_1, G_2 \\ 3, & dac\breve{a}\ \ G\ \ este\ \ izomorf\ \ cu\ \ unul\ \ dintre\ \ grupurile\ \ G_3, G_6, G_9 \\ 4, & dac\breve{a}\ \ G\ \ este\ \ izomorf\ \ cu\ \ unul\ \ dintre\ \ grupurile\ \ G_4, G_7 \\ 1, & dac\breve{a}\ \ G\ \ este\ \ izomorf\ \ cu\ \ unul\ \ dintre\ \ grupurile\ \ G_5, G_8 \end{cases}.$$

Reamintim că un grup Frobenius este un grup finit G care conţine un subgrup propriu H astfel încât $H \cap H^g = \{1\}$, pentru orice $g \in G \setminus H$. Egalitatea precedentă arată că există o legătură între această clasă de grupuri finite şi cantitatea $\nu(G)$. Mai exact, este evident că $\nu(G) \geq 1$ pentru orice grup Frobenius G. Prin urmare, ar fi interesant să se caracterizeze modul în care numărul de grade relative de comutativitate ale subgrupurilor ciclice se raportează la astfel de grupuri. O familie cunoscută de grupuri Frobenius este formată de grupurile diedrale

$$D_{2n} = \langle x, y \mid x^n = y^2 = 1, yxy = x^{n-1} \rangle,$$

unde $n \geq 3$ este un număr întreg impar. Următorul rezultat afirmă că nu există niciun grup diedral având două grade relative de comutativitate ale subgrupurilor ciclice. În particular, afirmaţia este valabilă pentru clasa de grupuri Frobenius amintită mai sus.

Teorema 2.41. *Fie $G \cong D_{2n}$, unde $n \geq 3$. Atunci $|Im\ f_1| \neq 2$.*

Câteva dintre rezultatele din această subsecţiune indică că nu există grupuri finite cu două grade relative de comutativitate ale subgrupurilor ciclice. Argumentele sunt că funcţia $f_1 : L(G) \longrightarrow [0, 1]$ ia n valori pentru orice $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$, şi, faptul că $|Im\ f_1| \neq 2$ pentru toate grupurile cu $\nu(G) = 1$ sau $\nu(G) = 2$. Totuşi, dacă studiem cardinalul mulţimii $Im\ g_1$, unde

$$g_1 : L(G) \longrightarrow [0, 1] \ \text{ este dată de } \ g_1(H) = csd(H),\ \forall\ H \in L(G),$$

putem demonstra că există un grup finit G cu n grade de comutativitate ale subgrupurilor ciclice pentru orice număr întreg pozitiv n. Remarcăm că g_1 este constantă pe clasele de conjugare ale subgrupurilor unui grup finit G, o proprietate ce era satisfăcută şi de f_1. Afirmaţia noastră anterioară privind existenţa unui grup finit cu un număr prescris de grade de comutativitate ale subgrupurilor ciclice este o consecinţă a următorului rezultat.

Teorema 2.42. *Fie G un grup finit izomorf cu $Q_{2^{n+2}}$, unde $n \geq 1$. Atunci $|Im\ g_1| = n$.*

În final, punctăm un rezultat de densitate privitor la mulţimea ce conţine toate gradele relative de comutativitate ale subgrupurilor ciclice ale grupurilor finite. Fie aşadar mulţimea

$$R = \{csd(H, G) \mid G \text{ este un grup finit}, H \in L(G)\}.$$

Teorema 2.43. *Mulţimea R este densă în* $[0,1]$.

Pentru mai multe detalii referitoare la rezultatele indicate în această secţiune, cititorul poate consulta articolele:

[25] Lazorec, M.S., Tărnăuceanu, M., *Finite groups with two relative subgroup commutativity degrees*, Publ. Math. Debrecen. **94** (2019), no. 1-2, 157-169.

[27] Lazorec, M.S., *Relative cyclic subgroup commutativity degrees of finite groups*, acceptat spre publicare în Filomat, arXiv:1803.01149.

2.4 Asupra numărului de subgrupuri (ciclice) ale unui grup finit

2.4.1 O legătură între numărul subgrupurilor şi ordinul unui grup finit

Una dintre caracteristicile principale ale unui grup finit G este laticea subgrupurilor sale $L(G)$. Legăturile dintre G şi $L(G)$ constituie un subiect de cercetare fructuos. În această privinţă, câteva probleme interesante, ce au fost studiate în ultimele decenii, sunt menţionate în Prefaţa monografiei [44], care este una dintre cele mai cunoscute referinţe asupra acestui subiect. De asemenea, determinarea cantităţii $|L(G)|$, unde G face parte dintr-o clasă remarcabilă de grupuri, este o problemă care încă este frecvent studiată. În această subsecţiune, ne concentrăm şi noi atenţia asupra cantităţii $|L(G)|$, pe care o legăm de $|G|$. Aşadar, pentru un grup finit G, introducem şi studiem cantitatea

$$\beta(G) = \frac{|L(G)|}{|G|}.$$

Ca şi proprietăţi generale ale raportului β, enumerăm:

- $\frac{2}{|G|} \leq \beta(G) \leq \frac{|G|^{(\frac{1}{4}+k_{|G|})log_2|G|}}{|G|}$, unde $\lim\limits_{|G|\to\infty} k_{|G|} = 0$;
- $\beta(G) \in (0,\infty)$;
- $G_1 \cong G_2 \Longrightarrow \beta(G_1) = \beta(G_2)$;
- $\beta(\bigtimes\limits_{i=1}^{k} G_i) = \prod\limits_{i=1}^{k} \beta(G_i)$, unde $(G_i)_{i=\overline{1,k}}$ o familie de grupuri finite având ordinele relativ prime;
- $\beta(G) \leq \frac{5}{|G|} \Longrightarrow G$ este abelian.

Notăm prin $\mathscr{P}$ clasa p-grupurilor de ordin p^n, unde $n \geq 3$. Fie $G \in \mathscr{P}$. Atunci

$$\beta(G) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} s_k(G)}{p^n},$$

unde $s_k(G)$ este numărul de subgrupuri de ordin p^k ale lui G, cu $k \in \{0,1,\ldots,n\}$. Cum G are cel puţin un subgrup de ordin p^k, unde $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, valoarea minimă a lui β, pe clasa $\mathscr{P}$, este atinsă dacă şi numai dacă $s_k(G) = 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, i.e., dacă şi numai dacă $G \cong \mathbb{Z}_{p^n}$. Folosind Teorema 5.17 din [4], deducem că β îşi atinge valoarea maximă pe $\mathscr{P}$ dacă şi numai dacă $G \cong \mathbb{Z}_p^n$. Prin urmare, pentru orice grup $G \in \mathscr{P}$, avem

$$\beta(\mathbb{Z}_{p^n}) \leq \beta(G) \leq \beta(\mathbb{Z}_p^n).$$

O legătură între $G \in \mathscr{P}$ şi anumite grupuri factor corespunzătoare lui G, poate fi scrisă drept consecinţă a Teoremei 1.3 din [40]. Mai exact, fie $G \in \mathscr{P}$ şi fie H un subgrup normal al lui G astfel încât $|H| = p$. Atunci,

$$\beta(G) \leq \beta\left(\frac{G}{H} \times \mathbb{Z}_p\right).$$

În acelaşi articol (a se vedea Teorema 1.4), autorul demonstrează că, dacă G nu este un p-grup abelian elementar de ordin p^n, unde p este impar şi $n \geq 3$ este un număr întreg, atunci

$$s_k(G) \leq s_k(M_p(1,1,1) \times \mathbb{Z}_p^{n-3}),\ \forall\ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

grupul $M_p(1,1,1)$ având structura

$$M_p(1,1,1) = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = 1, [a,b] = c, [c,a] = [c,b] = 1\rangle.$$

Autorul presupune că rezultatul ar fi adevărat şi pentru $p = 2$, iar o demonstraţie a acestui fapt este dată în [53]. Aceasta înseamnă că a doua valoare maximă a lui β, pe $\mathscr{P}$, este atinsă când lucrăm cu grupul $M_p(1,1,1) \times \mathbb{Z}_p^{n-3}$.

Ce putem spune despre a doua valoare minimă? Următoarea teoremă oferă un răspuns la această întrebare.

Teorema 2.44. *Fie $G \in \mathscr{P}$ astfel încât $G \ncong \mathbb{Z}_{p^n}$.*

i) Dacă p este impar, atunci $\beta(G) \geq \beta(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^{n-1}}) = \beta(M(p^n))$.

ii) Dacă $p = 2$, atunci $\begin{cases} \beta(G) \geq \beta(Q_8) & ,\ \textit{dacă}\ n = 3 \\ \beta(G) \geq \beta(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8) = \beta(Q_{16}) = \beta(M(16)) & ,\ \textit{dacă}\ n = 4 \\ \beta(G) \geq \beta(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n-1}}) = \beta(M(2^n)) & ,\ \textit{dacă}\ n > 4 \end{cases}.$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă G este izomorf cu unul dintre punctele de minim indicate corespunzătoare fiecărui caz.

În continuare, notăm prin $\mathscr{F}$ clasa tuturor grupurilor finite. Fie $\mathscr{A}$ o subclasă a lui $\mathscr{F}$ ce include toate grupurile abeliene finite. Următorul nostru obiectiv este să oferim informaţii asupra densităţii, în intervalul $[0,1]$, a mulţimilor

$$\{\beta(G) \mid G \in \mathscr{A}\} \text{ şi } \{\beta(G) \mid G \in \mathscr{F}\}$$

Un pas esenţial în vederea atingerii obiectivului enunţat mai sus este datorat următorului rezultat.

Propoziţia 2.45. *Mulţimea*

$$\{\beta(\bigtimes_{i\in I}\mathbb{Z}_{p_i}^4) \mid I\subset\mathbb{N}\setminus\{0\}, |I|<\infty \text{ şi } p_i \text{ este al i-ulea număr prim }, \ \forall\ i\in I\}$$

este densă în $[1,\infty)$.

În plus, întrucât se poate arăta că orice element din intervalul $[0,1)$ este de asemenea un punct aderent al mulţimii $\{\beta(G) \mid G\in\mathscr{A}\}$, deducem că această mulţime este densă în $[0,1]$, fapt ce este valabil şi pentru mulţimea $\{\beta(G) \mid G\in\mathscr{F}\}$.

Teorema 2.46.

i) Mulţimea $\{\beta(G) \mid G\in\mathscr{A}\}$ *este densă în* $[0,\infty)$.

ii) Mulţimea $\{\beta(G) \mid G\in\mathscr{F}\}$ *este densă în* $[0,\infty)$.

Până acum, am studiat câteva proprietăţi şi probleme privitoare la β văzută ca o cantitate asociată unor clase remarcabile de grupuri finite. Alternativ, dat un grup finit G, putem să considerăm funcţia

$$\beta : L(G)\longrightarrow(0,\infty) \text{ dată prin } H\mapsto\beta(H),\ \forall\ H\in L(G),$$

şi să studiem câteva dintre proprietăţile sale.

De exemplu, în cele ce urmează oferim o soluţie pentru următoarea problemă: *Să se clasifice toate p-grupurile abeliene finite G ce satisfac proprietatea* $\beta(H)\leq 1,\ \forall\ H\in L(G)$.

Teorema 2.47. *Fie G un p-grup abelian finit. Atunci* $\beta(H)\leq 1,\ \forall\ H\in L(G)$, *dacă şi numai dacă G este ciclic, G este de rang 2 şi* $p\geq 3$, *sau G este de rang 3 şi* $p\geq 5$.

2.4.2 Numărul de subgrupuri ciclice raportat la ordinul unui grup finit

Fie G un grup finit şi $L_1(G)$ mulţimea parţial ordonată a subgrupurilor sale ciclice. În [16], cantitatea

$$\alpha(G)=\frac{|L_1(G)|}{|G|}$$

a fost introdusă şi studiată, autorii indicând şi demonstrând mai multe rezultate relevante legate de acest raport. Dintre acestea, le amintim pe următoarele:

- $\alpha(G)\geq\frac{1}{2}\Longrightarrow d(G)\geq(2\alpha(G)-1)^2$;
- $\alpha(\bigtimes_{i=1}^{k}G_i)=\prod_{i=1}^{k}\alpha(G_i)$, unde $(G_i)_{i=\overline{1,k}}$ este o familie de grupuri finite având ordinele relativ prime;
- $\alpha(G)=1\Longleftrightarrow G$ este un 2-grup abelian elementar.
- Dacă N este un subgrup normal al lui G, atunci $\alpha(G)\leq\alpha(\frac{G}{N})$ şi, dacă egalitatea are loc, atunci N este un 2-grup abelian elementar;

– $\alpha(G)=\alpha(G\times\mathbb{Z}_2^n),\ \forall\ n\in\mathbb{N}$;

– Grupurile finite G având $\alpha(G)>\frac{3}{4}$ au fost clasificate (a se vedea Teorema 5 din [16]); remarcăm că singurele grupuri abeliene finite ce satisfac această proprietate sunt 2-grupurile abeliene elementare;

– $\frac{3}{4}$ este cel mai mare punct de acumulare netrivial al mulţimii $\{\alpha(G)\mid G \text{ este un grup finit}\}$.

Luând în considerare în special ultimele două proprietăţi, este natural să ne întrebăm dacă este posibil să clasificăm grupurile finite G pentru care $\alpha(G)=\frac{3}{4}$. Un punct de plecare, în ceea ce priveşte un răspuns la această întrebare, este dat în această subsecţiune în care studiem următoarea clasă de grupuri:

$$\mathscr{G}=\left\{G \text{ este un grup nilpotent finit}\mid \alpha(G)=\frac{3}{4}\right\}.$$

Primul pas care trebuie făcut pentru a descrie caracteristicile grupurilor ce fac parte din $\mathscr{G}$ este să găsim grupurile abeliene conţinute în $\mathscr{G}$. Pentru a îndeplini acest prim obiectiv, demonstrăm două rezultate preliminare.

Lema 2.48. *Fie n un număr întreg pozitiv şi fie G un p-grup finit de ordin p^n. Atunci $\alpha(G)\leq\alpha(\mathbb{Z}_p^n)$.*

Lema 2.49. *Fie n un număr întreg pozitiv, p un număr prim impar şi G un p-grup de ordin p^n. Atunci $\alpha(G)<\frac{3}{4}$.*

Fie G un grup abelian finit. Este de remarcat faptul că, în acest caz, funcţia $\alpha: L(G)\longrightarrow[0,1]$ este descrescătoare. Într-adevăr, fie H şi K două subgrupuri ale lui G astfel încât $H\subseteq K$. Cum G este abelian, există un subgrup L al lui K astfel încât $H\cong\frac{K}{L}$. Atunci $\alpha(H)=\alpha(\frac{K}{L})\geq\alpha(K)$. Avem toate ingredientele necesare pentru a determina grupurile abeliene finite ce sunt conţinute în $\mathscr{G}$.

Teorema 2.50. *Singurele grupuri abeliene finite ce fac parte din $\mathscr{G}$ sunt $\mathbb{Z}_2^n\times\mathbb{Z}_4$, unde $n\in\mathbb{N}$.*

Rezultatul principal al acestei subsecţiuni descrie caracteristicile grupurilor ce fac parte din $\mathscr{G}$.

Teorema 2.51. *Fie $G\in\mathscr{G}$. Atunci G este un 2-grup cu $G'=\Phi(G)$ sau există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\frac{G}{G'}\cong\mathbb{Z}_2^n\times\mathbb{Z}_4$ şi G' este abelian elementar.*

Menţionăm că ultimul nostru rezultat poate fi îmbunătăţit dacă grupurile cu proprietăţile indicate de Teorema 2.51 ar fi clasificate. Aceasta ar conduce la o descriere completă a clasei $\mathscr{G}$.

Următorul nostru obiectiv este să studiem dacă există tipuri de grupuri finite cunoscute ce aparţin clasei $\mathscr{G}$. Remarcăm că ne putem limita la studiul 2-grupurilor finite întrucât aceasta era una dintre caracteristicile grupurilor conţinute în $\mathscr{G}$. Deci, ne vom concentra asupra următoarelor clase de grupuri finite: 2-grupuri (aproape) extraspeciale, 2-grupuri diciclice generalizate, 2-grupuri diedrale generalizate şi 2-grupuri ce posedă un subgrup maximal ciclic.

Pentru un grup finit G, notăm prin $I(G)$ numărul involuţiilor lui G, i.e. numărul de elemente de ordin 2 ale lui G. Următorul nostru rezultat arată că, în anumite condiţii, există o legătură între clasa $\mathscr{G}$ şi $I(G)$.

Propoziţia 2.52. *Fie $n \geq 2$ un număr întreg şi fie G un 2-grup de ordin 2^n cu $exp(G) = 4$. Atunci $G \in \mathscr{G}$ dacă şi numai dacă $I(G) = 2^{n-1} - 1$.*

Propoziţia 2.52 indică faptul că 2-grupurile de exponent 4 care aparţin lui $\mathscr{G}$ sunt exact 2-grupurile de exponent 4 descrise în [36]. De asemenea, acest rezultat caracterizează apartenenţa la $\mathscr{G}$ a tuturor claselor de 2-grupuri finite de exponent 4. Două astfel de clase sunt formate de 2-grupurile extraspeciale, şi respectiv, 2-grupurile aproape extraspeciale. Înainte de a studia conexiunea dintre $\mathscr{G}$ şi clasele de grupuri menţionate anterior, reamintim câteva aspecte teoretice legate de produsele centrale de grupuri, urmând secţiunea 3 a referinţei [34].

Fie G un grup finit şi fie H_1, H_2 două subgrupuri ale sale. Atunci G este produsul central intern al subgrupurilor H_1 şi H_2 dacă $G = H_1H_2$ şi $[H_1, H_2] = \{1\}$. Notăm acest lucru prin $G = H_1 * H_2$. Produsul central extern a două grupuri finite G_1 şi G_2 se obţine cu ajutorul produsului direct extern uzual al grupurilor G_1 şi G_2, fapt indicat de Teorema 3.4 din [34]. Mai exact, presupunând că A este un grup abelian astfel încât există morfismele injective $\mu_i : A \longrightarrow Z(G_i)$, unde $i \in \{1, 2\}$, se construieşte mulţimea $Z = \{(\mu_1(a), \mu_2(a^{-1})) \mid a \in A\}$, iar grupul factor $\frac{G_1 \times G_2}{Z}$ este produsul central extern al grupurilor G_1 şi G_2. Urmând aceeaşi referinţă, observăm că $G_1 * G_2 \cong \frac{G_1 \times G_2}{Z}$, deci cele două tipuri de produse centrale sunt izomorfe. Mai menţionăm că Exemplul 3.5, din aceeaşi lucrare, evidenţiază modul în care pot fi obţinute structura subgrupului Z şi produsul central $D_8 * \mathbb{Z}_4$. În continuare, pentru un număr întreg pozitiv r, notăm prin G^{*r} produsul central a r copii ale unui grup finit G.

Reamintim că un 2-grup G este numit

– extraspecial dacă $G' = \Phi(G) = Z(G) \cong \mathbb{Z}_2$;

– aproape extraspecial dacă $G' = \Phi(G) \cong \mathbb{Z}_2$ şi $Z(G) \cong \mathbb{Z}_4$.

Mai mult, conform Teoremei 2.3 din [6],

– dacă G este un 2-grup extraspecial, atunci există un număr întreg pozitiv r astfel încât $|G| = 2^{2r+1}$ şi $G \cong D_8^{*r}$ sau $G \cong Q_8 * D_8^{*(r-1)}$;

– dacă G este un 2-grup aproape extraspecial, atunci există un număr întreg pozitiv r astfel încât $|G| = 2^{2r+2}$ şi $G \cong D_8^{*r} * \mathbb{Z}_4$.

Conexiunea dintre $\mathscr{G}$ şi clasa 2-grupurilor (aproape) extraspeciale finite este dată de următorul rezultat.

Teorema 2.53.

i) Nu există 2-grupuri extraspeciale finite conţinute în $\mathscr{G}$.

ii) Orice 2-grup aproape extraspecial finit aparţine lui $\mathscr{G}$.

În ceea ce priveşte 2-grupurile diciclice generalizate ce sunt conţinute în $\mathscr{G}$, un răspuns este dat de următoarea teoremă.

Teorema 2.54 *Singurele 2-grupuri diciclice generalizate conţinute în $\mathscr{G}$ sunt izomorfe cu grupurile abeliene $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_4$, unde $n \in \mathbb{N}$.*

În continuare, ne propunem să stabilim care sunt 2-grupurile diedrale generalizate ce sunt conţinute în $\mathscr{G}$. Notăm prin y generatorul lui $\mathbb{Z}_2$. Începem prin a menţiona că pentru un grup abelian G, grupul diedral generalizat asociat lui G este $D(G) \cong G \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2$, unde $\varphi : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Aut(G)$ este un morfism dat de:

$$\begin{cases} \varphi(1) = \mathbb{1}_G, \ \mathbb{1}_G(g) = g, \ \forall\ g \in G \\ \varphi(y) = \varphi_y, \ \varphi_y(g) = g^{-1}, \ \forall\ g \in G \end{cases}.$$

O prezentare a grupului diedral generalizat $D(G)$ este următoarea

$$D(G) = \langle G, y \mid y^2 = 1, ygy = g^{-1}, \ \forall\ g \in G \rangle.$$

Este cunoscut că $D(\mathbb{Z}_n) = D_{2n}$ pentru orice număr întreg $n \geq 2$. Alte proprietăţi ale grupurilor diedrale generalizate şi diedralizarea câtorva grupuri abeliene finite sunt prezentate în [9]. Pentru a găsi 2-grupurile diedrale generalizate conţinute în $\mathscr{G}$, avem nevoie de următorul rezultat preliminar ce oferă o clasificare a 2-grupurilor abeliene finite G având $\alpha(G) = \frac{1}{2}$.

Lema 2.55. *Fie G un 2-grup abelian finit. Atunci $\alpha(G) = \frac{1}{2}$ dacă şi numai dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $G \cong \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_8$.*

Următorul nostru rezultat examinează conexiunea dintre $\mathscr{G}$ şi clasa 2-grupurilor diedrale generalizate finite.

Teorema 2.56. *Singurele 2-grupuri diedrale generalizate finite care aparţin lui $\mathscr{G}$ sunt izomorfe cu $\mathbb{Z}_2^n \times D_{16}$, unde $n \in \mathbb{N}$.*

Ultima legătură pe care o studiem este cea dintre $\mathscr{G}$ şi clasa 2-grupurilor finite ce posedă un subgrup maximal ciclic. Fie $n \geq 3$ un număr întreg. Clasa 2-grupurilor finite ce posedă un subgrup maximal ciclic conţine grupuri abeliene de tipul $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{n-1}}$ care, conform Teoremei 2.50, aparţin lui $\mathscr{G}$ dacă şi numai dacă $n = 3$. Prin urmare, este suficient să studiem apartenenţa la $\mathscr{G}$ a 2-grupurilor neabeliene ce posedă un subgrup maximal ciclic. Conform Teoremei 4.1 din [45], II, un astfel de grup este izomorf cu unul ce face parte din una dintre următoarele familii infinite: $\{M(2^n)\}_{n\geq 4}$, $\{D_{2^n}\}_{n\geq 3}$, $\{Q_{2^n}\}_{n\geq 3}$ şi $\{QD_{2^n}\}_{n\geq 4}$.

Teorema 2.57. *Grupul diedral D_{16} este singurul 2-grup neabelian finit ce posedă un subgrup maximal ciclic şi este conţinut în $\mathscr{G}$.*

Pentru mai multe detalii referitoare la rezultatele indicate în această secţiune, cititorul poate consulta articolele:

[29] Lazorec, M.S., Tărnăuceanu, M., *A note on the number of cyclic subgroups of a finite group*, acceptat spre publicare în Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, arXiv:1805.00301.

[30] Lazorec, M.S., *A connection between the number of subgroups and the order of a finite group*, propus pentru publicare în Acta Math. Hung., arXiv:1901.06425.

Bibliografie

[1] Aivazidis, S., *The subgroup permutability degree of projective special linear groups over fields of even characteristic*, J. Group Theory **16** (2013), 383-396.

[2] Aivazidis, S., *On the subgroup permutability degree of the simple Suzuki groups*, Monatsh. Math. **176** (2015), no. 3, 335-358.

[3] Barry, F., MacHale, D., Ní Shé, À, *Some supersolvability conditions for finite groups*, Math. Proc. Royal Irish Acad. **106A** (2006), no. 2, 163-177.

[4] Berkovich, Y., *Groups of prime power order*, vol. 1, de Gruyter, Berlin, 2008.

[5] Blaum, M., *Factorizations of the simple groups $PSL_3(q)$ and $PSU_3(q^2)$*, Arch. Math. **40** (1983), 8-13.

[6] Bouc, S., Mazza, N., *The Dade group of (almost) extraspecial p-groups*, J. Pure Appl. Algebra **192** (2004), 21-51.

[7] Brandl, R., *Groups with few non-normal subgroups*, Comm. Algebra **23** (1995), 2091-2098.

[8] Brandl, R., Cutolo, G., Rinauro, S., *Posets of subgroups of groups and distributivity*, Boll. Un. Mat. Ital. A **9** (1995), 217-223.

[9] Brown, B.A., *Generalized dihedral groups of small order*, Undergraduate thesis, Available in Simpson Library, 2010.

[10] Calhoun, W.C., *Counting subgroups of some finite groups*, Amer. Math. Monthly **94** (1987), 54-59.

[11] Das, A.K., Nath, R.K., *A characterisation of certain finite groups of odd order*, Math. Proc. R. Ir. Acad. **111A** (2011), no. 2, 69-78.

[12] Eberhard, S., *Commuting probabilities of finite groups*, Bull. Lond. Math. Soc. **47** (2015), no. 2, 796-808.

[13] Erdös, P., Turán, P., *On some problems of a statistical group-theory. IV*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **19** (1968), 413-435.

[14] Erovenko, I.V., Sury, B., *Commutativity degree of wreath products of finite abelian groups*, Bull. Aust. Math. Soc. **77** (2008), no. 1, 31-36.

[15] Farrokhi, D.G.M, *Factorization numbers of finite abelian groups*, Int. J. Group Theory **2** (2013), 1-8.

[16] Garonzi, M., Lima, I., *On the number of cyclic subgroups of a finite group*, Bull. Braz. Math. Soc. **49** (2018), 515-530.

[17] Gentchev, T.R., *Factorizations of sporadic simple groups*, Arch. Math. **47** (1986), 97-102.

[18] Gustafson, W.H., *What is the probability that two group elements commute?*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 1031-1034.

[19] Hall, P., *A contribution to the theory of groups of prime-power order*, Proc. London Math. Soc. **36** (1933), 29-95.

[20] Hawkes, T., Isaacs, I.M., Özaydin, M., *On the Möbius function of a finite group*, Rocky Mountain J. Math. **19** (1989), 1003-1033.

[21] Huppert, B., *Endliche Gruppen*, I, II, Springer Verlag, Berlin, 1967, 1968.

[22] Iwasawa, K., *Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen*, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo. Sect. **I.4** (1941), 171-199.

[23] Lazorec, M.S., Tărnăuceanu, M., *Cyclic subgroup commutativity degrees of finite groups*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **139** (2018), 225-240.

[24] Lazorec, M.S., *Probabilistic aspects of ZM-groups*, Comm. Algebra **47** (2019), no. 2, 541-552.

[25] Lazorec, M.S., Tărnăuceanu, M., *Finite groups with two relative subgroup commutativity degrees*, Publ. Math. Debrecen. **94** (2019), no. 1-2, 157-169.

[26] Lazorec, M.S., Tărnăuceanu, M., *Cyclic factorization numbers of finite groups*, Ars Combin. **145** (2019), 95-110.

[27] Lazorec, M.S., *Relative cyclic subgroup commutativity degrees of finite groups*, acceptat spre publicare în Filomat, arXiv:1803.01149.

[28] Lazorec, M.S., Tărnăuceanu, M., *On some probabilistic aspects of (generalized) dicyclic groups*, acceptat spre publicare în Quaest. Math., arXiv:1612.01967.

[29] Lazorec, M.S., Tărnăuceanu, M., *A note on the number of cyclic subgroups of a finite group*, acceptat spre publicare în Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, arXiv:1805.00301.

[30] Lazorec, M.S., *A connection between the number of subgroups and the order of a finite group*, propus pentru publicare în Acta Math. Hung., arXiv:1901.06425.

[31] Lescot, P., *Sur certains groupes finis*, Rev. Math. Spéciales **8** (1987), 276-277.

[32] Lescot, P., *Degré de commutativité et structure d'un groupe fini* (1), Rev. Math. Spéciales **8** (1988), 276-279.

[33] Lescot, P., *Degré de commutativité et structure d'un groupe fini* (2), Rev. Math. Spéciales **4** (1989), 200-202.

[34] Lewis, D., Almousa, A., Elert, E., *Embedding Properties in Central Products*, arXiv:1408.0076.

[35] Liebeck, M.W., Praeger, C.E., Saxl, J., *The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **86**, No. 432 (1990), 1-151.

[36] Miller, G.A., *Group of order g containing g/2-1 involutions*, Tohoku Math. J. **17** (1920), 88-102.

[37] Mousavi, H., *On finite groups with few non-normal subgroups*, Comm. Algebra **27** (1999), 3143-3151.

[38] Nath, R.K., *Commutativity degree, its generalizations, and classification of finite groups*, Ph.D. Thesis, North-Eastern Hill University, Shillong, India, 2010.

[39] Ore, O., *Structures and group theory I*, Duke Math. J. **3** (1937), 149-173.

[40] Qu, H., *Finite non-elementary abelian p-groups whose number of subgroups is maximal*, Israel J. Math. **195** (2013), 773-781.

[41] Rusin, D.J., *What is the probability that two elements of a finite group commute?*, Pacific J. Math. **82** (1979), 237-247.

[42] Saeedi, F., Farrokhi, D.G.M., *Factorization numbers of some finite groups*, Glasg. Math. J. **54** (2012), no. 2, 345-354.

[43] Saeedi, F., Farrokhi, D.G.M., *Subgroup permutability degree of PSL(2,p^n)*, Glasg. Math. J. **55** (2013), no. 3, 581-590.

[44] Schmidt, R., *Subgroup lattices of groups*, de Gruyter Expositions in Mathematics 14, de Gruyter, Berlin, 1994.

[45] Suzuki, M., *Group theory*, I, II, Springer Verlag, Berlin, 1982, 1986.

[46] Tărnăuceanu, M., *Groups determined by posets of subgroups*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

[47] Tărnăuceanu, M., *Subgroup commutativity degrees of finite groups*, J. Algebra **321** (2009), 2508-2520.

[48] Tărnăuceanu, M, *Addendum to "Subgroup commutativity degrees of finite groups"*, J. Algebra **337** (2011), 363-368.

[49] Tărnăuceanu, M., Tóth, L., *Cyclicity degrees of finite groups*, Acta Math. Hung. **145** (2015), 489-504.

[50] Tărnăuceanu, M., *On the factorization numbers of some finite p-groups*, Ars Combin. **128** (2016), 3-9.

[51] Tărnăuceanu, M., *The subgroup commutativity degree of finite P-groups*, Bull. Aust. Math. Soc. **93** (2016), no. 1, 37-41.

[52] Tărnăuceanu, M., *Factorization numbers of finite rank 3 abelian p-groups*, J. Combin. Math. Combin. Comput. **105** (2018), 77-80.

[53] Tărnăuceanu, M., *On a conjecture by Haipeng Qu*, J. Group Theory **22** (2019), no. 3, 505-514.