Controlabilitate, stabilizare şi probleme inverse pentru sisteme parabolice

Elena-Alexandra Melnig

Această teză este dedicată studiului controlabilităţii, stabilizării şi estimării sursei în probleme parabolice. Atât în problemele de control abordate cât şi în problemele inverse intervin operatori de control şi de observare distribuiţi în subdomenii. În aceste situaţii un instrument esenţial de analiză este reprezentat de inegalităţile Carleman globale, iar studiul acestora ocupă un loc important în teză.

O scurtă prezentare a domeniului

Controlabilitatea ecuaţiei căldurii cu controale frontieră sau distribuite în subdomenii a fost stabilită de D. Russell [90] în conexiune cu problema controlabilităţii pentru ecuaţia undelor; mai tarziu, G. Lebeau şi L. Robbiano [66] au obţinut rezultate de controlabilitate pentru ecuaţia căldurii fără condiţii geometrice. O. Yu. Imanuvilov a stabilit un rezultat de controlabilitate cu controale distribuite în subdomenii pentru ecuaţii parabolice în formă generală folosind estimări Carleman potrivite pentru soluţiile problemei adjuncte (v. [57]). Controlabilitatea locală a ecuaţiilor sau sistemelor neliniare este în general o consecinţă a controlabilităţii sistemului liniarizat. Această etapă a demonstraţiei se bazează de obicei pe un argument de punct fix pentru aplicaţii multivoce (*e.g.* teorema de punct fix a lui Kakutani).

Estimările Carleman sunt fundamentale atât în studiul controlabilităţii problemelor liniare obţinute prin mecanismul de liniarizare, cât şi în paşii de verificare a anumitor ipoteze din teoremele de punct fix aplicate (v. *e.g.* [**11**] sau [**15**]). Condiţii de creştere la infinit pentru neliniaritate se impun pentru a obţine rezultate de controlabilitate globală (v. [**54**, **49**]).

Un argument bazat pe proprietăţile de regularizare ale fluxului parabolic furnizează estimări Carleman în cadrul $L^\infty - L^1$, iar acestea sunt utile pentru a demonstra regularitatea pentru controalele obţinute în problemele de controlabilitate (v. [**16**]). Acest tip de argument se regăseşte în [**39**] unde se stabilesc estimări L^∞ pentru control; acest rezultat este ulterior folosit pentru a demonstra controlabilitatea într-o vecinătate L^∞ a unei traiectorii particulare a sistemului neliniar considerat. Astfel de estimări sunt folosite şi atunci când restricţii de stare se impun, cum ar fi pozitivitatea în modelele de reacţie-difuzie [**39**, **40**, **65**].

Controlabilitatea sistemelor semiliniare cu un număr redus de controale este o problemă de interes şi rezultate pozitive se obţin în condiţii potrivite asupra termenilor de cuplaj. Studiul sistemelor parabolice controlate cu un număr de controale mai mic decât numărul de ecuaţii necesită estimări Carleman adecvate, cu observaţii parţiale pentru adjunctul sistemului liniarizat. Un exemplu în acest sens este cazul sistemelor cu cuplaje de tip "cascadă", cu un singur control, studiat în [**59**].

În anumite situaţii, cum ar fi cazul cuplajelor constante sau depinzând numai de timp, există condiţii algebrice de tip Kalman, implicând operatorii de cuplaj şi respectiv cel de control, necesare pentru obţinerea inegalităţilor de observabilitate (v. [**4**, **6**]).

În cazul în care nu se verifică ipoteze de cuplaj adecvate astfel încât sistemul liniarizat să fie controlabil, o posibilitate de abordare a studiului controlabilităţii este metoda întoarcerii a lui J.-M. Coron, metodă ce constă în liniarizare în jurul unei soluţii particulare, construite de manieră să asigure un cuplaj bun şi, în consecinţă, controlabilitatea sistemului liniarizat (v. [**38**, **39**, **40**]).

O lucrare recentă, E. Zuazua şi P. Lissy [76], studiază sisteme liniare cuplate (nu numai parabolice) şi estimări de observabilitate corespunzătoare; sistemele studiate sunt cuplate cu coeficienţi de cuplaj constanţi, în părţile principale sau/şi în termenii de ordin zero, şi sunt obţinute rezultate pozitive de observabilitate în condiţii algebrice de tip Kalman.

Evaluări ale costului controlabilităţii aproximative se sprijină pe o analiză fină a estimărilor Carleman şi a constantelor ce intervin, în funcţie de lungimea intervalului de observaţie şi a normelor coeficieţilor operatorului parabolic (v. [55]). Consecinţe ale unor astfel de estimări vizează şi proprietăţi de unică continuare la momentul iniţial (v. [70, 8]).

Stabilizarea cu controale feedback pentru sistemele parabolice poate de asemenea să treacă printr-o procedură de liniarizare. Stabilizarea sistemului liniarizat cu controale feedback robuste face apel la ecuaţii Riccati şi legile feedback care se obţin sunt adecvate, măcar local, sistemului neliniar. Menţionăm în acest sens lucrările V. Barbu şi Wang [12, 28] pentru stabilizarea sistemelor parabolice şi lucrările V. Barbu, I. Lasiecka, R. Triggiani [27, 21, 22, 23] pentru stabilizarea ecuaţiilor Navier-Stokes cu controale interne sau frontieră. În aceste articole autorii folosesc condiţii Kalman pentru proiecţiile finit dimensionale ale ecuaţiilor pe subspaţiile invariante instabile cu scopul de a construi legi feedback stabilizante pentru sistemul liniarizat, ca punct de pornire pentru rezolvarea unei ecuaţii algebrice Riccati adecvate. Aceste condiţii Kalman se obţin din proprietăţi de unică continuare pentru sisteme de autofuncţii ale părţii eliptice.

O alternativă la ecuaţiile Riccati se bazează pe ecuaţia Lyapunov. O ecuaţie Lyapunov asociată unei probleme liniare furnizează norme echivalente potrivite în spaţii de funcţii adecvate, norme în raport cu care se poate demonstra stabilizarea locală a problemei neliniare (v. [67, 68]). În această abordare se folosesc proprietăţi de unică continuare pentru sisteme de ecuaţii eliptice şi parabolice, proprietăţi a căror demonstrare face apel de asemenea la estimări de tip Carleman (v. [91]).

Estimările costului controlabilităţii aproximative sunt utile în problemele de stabilizare feedback a soluţiilor nestaţionare ale sistemelor parabolice (v. [26, 69]).

Menţionăm monografia recentă V.Barbu [18] dedicată controlului şi stabilizării sistemelor parabolice sau de tip parabolic (modele de dinamica fluidelor, ecuaţii Navier-Stokes).

Problemele inverse apar din practică şi sunt aşadar importante din punctul de vedere al aplicaţiilor. Acestea se referă la modele în care anumite cantităţi ce intervin (coeficienţi, surse etc.) nu sunt cunoscute şi se doreşte a se obţine informaţii despre acestea prin măsurători suplimentare asupra soluţiei. Estimările de stabilitate pentru cantităţile necunoscute sunt utile în dezvoltarea unor algoritmi stabili de aproximare şi simulare numerică. Facem referinţă la monografia M. Choulli [36] pentru o introducere în domeniu. În teză ne ocupăm de estimări de stabilitate în norme L^p pentru surse, în sisteme parabolice. Acest demers are ca punct de pornire lucrarea O. Yu. Imanuvilov şi M. Yamamoto [61].

Regularitatea soluţiilor problemei

$$y' + Ay = f, y(0) = 0, \ t \in (0, T) \tag{0.1}$$

unde A este realizarea L^p a operatorului eliptic L cu date omogene la frontieră şi surse din diferite spaţii de funcţii de tip Hölder, Lebesgue sau Sobolev este importantă în analiza problemelor de control şi a problemelor inverse. Referinţa clasică pentru existenţă şi regularitate pentru soluţiile problemelor parabolice cu $f \in L^p(Q) \simeq L^p(0, T; L^p(\Omega))$ este monografia O. A. Ladyzenskja, V. A. Solonnikov, N. N. Uralceva [64], unde regularitatea maximală este obţinută în spaţiile Sobolev anizotrope $W_p^{2,1}(Q)$.

Regularitatea soluţiilor problemelor parabolice abstracte şi estimări în spaţii de interpolare reală, au fost studiate de Gabriella Di Blasio [46]; în această lucrare, pentru $f \in L^q(X)$ se obţine $S * f \in W^{\theta,q}(X), \theta \in (0, 1)$ şi $S * f \in L^q(D_A(\theta, p)), \theta \in (0, 1)$ (se notează $D_A(\theta, p) = (X, D(A))_{\theta,p}$ iar $W^{\theta,q}(X)$ este spaţiu Sobolev-Slobodeckii space de funcţii cu valori vectoriale).

Existenţa şi regularitatea maximală în probleme parabolice concrete, cu $X = L^p(\Omega)$, a fost stabilită de W. von Wahl [**100**], unde se stabilesc estimări pentru $S{*}f \in L^q(D(A)), D_t(S{*}f) \in L^q(X)$ în funcţie de $f \in L^q(0,T;L^p(\Omega))$, cu $q, p > 1$; acestea se obţin aplicând rezultate de A. Benedek, A.P.Calderón, R. Panzone [**29**] asupra convoluţiei de operatori folosind idei din teoria integralelor singulare. Regularitatea maximală în spaţii de tip $L^q(L^p)$ pentru probleme parabolice cu condiţii la frontieră neomogene au fost obţinute de P. Weidemaier [**102, 103**].

Regularitate maximală în $L^q(X)$ pentru o problemă parabolică abstractă este strâns legată de geometria spaţiului Banach X şi proprietăţi suplimentare ale operatorului A. Astfel, dacă X este spaţiu Banach *UMD* (clasa spaţiilor Banach în care transformarea Hilbert vectorială este mărginită în $L^q(X)$) şi A este operator sectorial cu puteri imaginare mărginite şi unghi spectral $\theta < \frac{\pi}{2}$, *i.e.* $A \in BIP(X, \theta)$, atunci ecuaţia (0.1) are proprietatea de regularitate maximală $y \in W^{1,q}(X) \cap L^q(D(A))$ dacă $f \in L^q(X)$ (v. monografia C. Martinez Carracedo, M. Sanz Alix [**79**], Ch. 8 şi referinţele respective). Un ingredient esenţial în abordarea unor astfel de probleme este o teoremă a lui G. Dore şi A. Venni ce caracterizează inversabilitatea sumelor de operatori din clasa de operatori *BIP*.

Clasa *BIP* este importantă în analiza pe care o facem asupra regularităţii parabolice; aceasta permite caracterizarea domeniilor puterilor fracţionare de operatori care sunt realizări de operatori eliptici cu condiţii omogene la frontieră, ca spaţii de interpolare complexă. În astfel de situaţii, acestea sunt subspaţii închise a unor spaţii de potenţial Bessel, rezultat important datorat lui R. T. Seeley [**94**]. Folosind argumente bazate pe studiul operatorilor de prelungire la întreg spaţiul, se pot stabili legături cu spaţiile Sobolev-Slobodeckii. Alt ingredient important pe care îl folosim este reprezentat de estimările de convoluţie, în $L^r(D(A^\gamma))$, folosind estimările specifice unui semigrup analitic în domeniile puterilor fracţionare ale generatorului acestuia.

Întrucât suntem interesaţi de realizările L^p ale operatorilor eliptici în domenii mărginite, menţionăm că mărginirea puterilor pur imaginare ale acestora a fost demonstrată de R. T. Seeley în [**96**] folosind reprezentări ale rezolventei şi teoria operatorilor pseudodiferenţiali (v. [95], [93]). O altă abordare, mai directă, se găseşte în J. Prüss şi H. Sohr [88] (v. şi Th. 12.1.12 din [79]). Amintim aici lucrarea R. Denk, G. Dore, M. Hieber, J. Prüss, A. Venni [41] pentru un studiu al operatorilor eliptici cu coeficienţi Hölder în partea principală, în conexiune cu calculul $\mathcal{H}^\infty$ şi proprietatea *BIP*.

În ce priveşte inegaltăţile clasice de tip Gagliardo-Nirenberg pentru spaţii Sobolev-Slobodeckii, în cadrul lor cel mai general, facem referire la lucrările H. Brezis, P. Mironescu [32], [33].

Rezultatele principale ale tezei

Partea întâi

Stabilizarea sistemelor de ecuaţii parabolice cuplate

Capitolul 1. Stabilizare cu un control simultan, în formă feedback, a unui sistem de ecuaţii parabolice cuplate. Studiem stabilizarea locală a unui sistem de ecuaţii parabolice într-un domeniu mărginit $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \in \{2, 3\}$, cu frontieră de clasă C^2, asupra căruia acţionează un control distribuit în subdomeniul $\omega \subset\subset \Omega$, care controlează simultan ambele ecuaţii. Prima etapă este liniarizarea sistemului în jurul stării staţionare pe care o stabilizăm şi stabilirea unui rezultat de aproximativă controlabilitate a sistemului liniar. Rezultatul de stabilizare feedback pentru sistemul liniar, rescris în formă abstractă în spaţiul Hilbert $H = [L^2(\Omega)]^2$, se bazează pe o descompunere a spaţiului H, corespunzătoare unei separări a spectrului operatorului eliptic, în sumă directă de două subspaţii închise invariante la semigrupul liniar. Dintre aceste două subspaţii, unul este instabil dar finit dimensional, iar celălalt este infinit dimensional dar stabil în raport cu semigrupul liniar. Sistemul liniar este apoi proiectat pe cele două subspaţii. Rezultatul de aproximativă controlabilitate a sistemului liniar implică controlabilitatea exactă a ecuaţiei din subspaţiul finit dimensional şi prin urmare aceasta este complet stabilizabilă. Astfel putem construi un feedback care stabilizează această ecuaţie şi ulterior se arată că acest feedback stabilizează întreg sistemul liniar. Folosind o normă echivalentă dată de soluţia unei ecuaţii Lyapunov se arată că acelaşi feedback stabilizează şi ecuaţia neliniară.

Sistemul pe care îl avem în vedere este

$$
\left\{\begin{array}{ll}
y_t - d_1\Delta y = f(y,z) + f_1 + \psi_\omega u, & \text{în } (0,T)\times\Omega,\\
z_t - d_2\Delta z = g(y,z) + g_1 + \psi_\omega u, & \text{în } (0,T)\times\Omega,\\
y(t,x) = 0, \quad z(t,x) = 0, & \text{pe } (0,T)\times\partial\Omega,\\
y(0,x) = y_0(x), \quad z(0,x) = z_0(x), & \text{în } \Omega.
\end{array}\right. \tag{0.2}
$$

unde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}_+$ sunt coeficienţii de difuzie, $f, g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt neliniarităţile C^∞ care cuplează sistemul în termeni de ordin zero, $f_1, g_1 \in L^\infty(\Omega)$, $\psi_\omega \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}\psi_\omega = \overline{\omega}$, $\psi_\omega > 0$ în ω. $u(t,\cdot)$ este controlul din $L^2(\omega)$ iar $\psi_\omega u$ notează extensia cu 0 a lui u la Ω înmulţită cu ψ_ω.

Fie $(\overline{y},\overline{z}) \in (L^\infty(\Omega))^2$ starea staţionară pe care vrem să o stabilizăm. Sistemul liniarizat este:

$$
\begin{cases}
\xi_t - d_1\Delta\xi = a(x)\xi + b(x)\eta + \psi_\omega u, (0,T)\times\Omega,\\
\eta_t - d_2\Delta\eta = c(x)\xi + d(x)\eta + \psi_\omega u, (0,T)\times\Omega,\\
\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad (0,T)\times\partial\Omega,\\
\xi(0) = \xi_0, \quad \eta(0) = \eta_0,
\end{cases} \tag{0.3}
$$

unde

$$a(x) := \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{y},\overline{z}), \quad b(x) := \frac{\partial f}{\partial z}(\overline{y},\overline{z}), \quad c(x) := \frac{\partial g}{\partial y}(\overline{y},\overline{z}), \quad d(x) := \frac{\partial g}{\partial z}(\overline{y},\overline{z}).$$

Considerăm spaţiul Hilbert $H = L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ şi operatorii

$$A : D(A) \subset H \longrightarrow H,\; D(A) = (H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))^2,\; A = \begin{pmatrix} d_1\Delta & 0\\ 0 & d_2\Delta\end{pmatrix},$$

$$A_0 : D(A_0) = H \longrightarrow H, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

$$B : L^2(\omega) \longrightarrow H,\ Bu = \begin{pmatrix} \psi_\omega u \\ \psi_\omega u \end{pmatrix} \text{ şi } \quad \mathcal{A} := A + A_0.$$

Notând cu

$$\gamma(x) = [a(x) + b(x) - c(x) - d(x)],$$

$$\alpha(x) := \left[(c(x) - a(x)) - \frac{d_1 \gamma(x)}{d_2 - d_1} \right] = \left[(b(x) - d(x)) - \frac{d_2 \gamma(x)}{d_2 - d_1} \right]$$

şi

$$L_T v := \Delta v + \frac{\gamma(x)}{d_1 - d_2} v,\ D(L_T) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

rezultatul de stabilizare pentru sistemul liniar este următorul:

THEOREM 1.1. *Operatorul $\mathcal{A} = A + A_0$ are rezolventă compactă şi generează un semigrup analitic în H. În situaţia în care coeficienţii de difuzie sunt diferiţi, $d_1 \neq d_2$, şi una dintre următoarele ipoteze are loc:*

- *α nu este identic constantă în ω,*
  sau
- *α este constantă în Ω şi $0 \notin \sigma(L_T)$*

atunci:

(i) Sistemul liniar (0.3) este aproximativ controlabil în orice timp T;
(ii) Pentru orice $\delta > 0$ există $C = C(\delta) > 0$, un subspaţiu finit dimensional $U \subset L^2(\omega)$ şi un operator continuu $K \in L(H, U)$ astfel încât operatorul $\mathcal{A} + BK$ generează un semigrup analitic de tip negativ pentru care are loc

$$\|e^{t(\mathcal{A}+BK)}\|_H \leq Ce^{-\delta t}, \quad t > 0. \tag{0.4}$$

Rezultatul principal asupra stabilizării sistemului neliniar în jurul stării staţionare este:

TEOREMA 1.2. *În ipotezele teoremei anterioare, există $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $C > 0$, $\tau > 0$ astfel încât dacă $\|y_0 - \overline{y}\|_{L^\infty \cap H^1(\Omega)} + \|z_0 - \overline{z}\|_{L^\infty \cap H^1(\Omega)} \leq \varepsilon$ atunci considerând în (0.2) controlul feedback construit în teorema anterioară,*

$$u = K(Y - \overline{Y}), \tag{0.5}$$

are loc stabilizarea locală cu descreştere exponenţială:

$$(0.6)\qquad \begin{aligned}&\|Y(t)-\overline{Y}\|_{H^s(\Omega)} \le Ce^{-\delta t}\|Y_0-\overline{Y}\|_{H^1\cap L^\infty(\Omega)},\ t>\tau, s\in[0,2],\\ &\|Y(t)-\overline{Y}\|_{H^1\cap L^\infty(\Omega)} \le Ce^{-\delta t}\|Y_0-\overline{Y}\|_{H^1\cap L^\infty(\Omega)},\ t>0.\end{aligned}$$

Capitolul 2. Stabilizare feedback pentru sisteme parabolice cuplate în termeni de ordin zero sau unu. Studiem stabilizarea locală cu controale interne în formă feedback pentru sisteme de ecuaţii parabolice în dimensiune spaţială unu, *i.e.* într-un interval mărginit $\Omega \subset \mathbb{R}$. Ecuaţiile sunt cuplate în termeni de ordin zero sau unu iar condiţiile la frontieră sunt generale, omogene, de tip Dirichlet, Neumann sau Robin. Stabilim un rezultat de stabilizare feedback cu controale distribuite într-un subdomeniu $\omega \subset \Omega$ atunci când o condiţie de tip Kalman asupra matricilor de cuplaj şi respectiv de control este îndeplinită.

Strategia este similară celei din capitolul anterior. Considerăm formularea abstractă a problemei într-un spaţiu Hilbert. Pentru a obţine rezultatul de aproximativă controlabilitate pentru sistemul liniarizat în jurul stării staţionare de stabilizat considerăm trei situaţii:

- sistem de două ecuaţii cuplate în termeni de ordin unu şi zero, cu coeficienţi care pot fi neconstanţi şi un singur control acţionând într-o ecuaţie;
- sistem de n ecuaţii cuplate în termeni de ordin zero cu coeficienţi constanţi în care acţionează m controale scalare;
- sistem de n ecuaţii cuplate în termeni de ordin unu cu coeficienţi constanţi în care acţionează m controale scalare.

Pentru sisteme cu $n \ge 3$ ecuaţii şi cuplaje constante obţinem rezultatul de aproximativă controlabilitate demonstrând o proprietate de unică continuare pentru sistemul adjunct în condiţii Kalman pentru matricile de cuplaj si de control.

Fie $\omega \subset\subset \Omega$ o submulţime nevidă a lui Ω. Considerăm sistemul parabolic controlat,

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
D_t y - Ly + F(D_x y, y) = g + B\chi_\omega u, & t > 0, x \in \Omega, \\
(\mathbf{BC}) : \begin{cases} \Gamma_1 D_x y(t,0) + \Gamma_2 y(t,0) = 0, \\ \Gamma_3 D_x y(t,l) + \Gamma_4 y(t,l) = 0, \end{cases} & t > 0, \\
y(0,x) = y^0(x), & x \in \Omega,
\end{array}
\right.
\tag{0.7}
$$

unde $y = (y_1, \cdots, y_n)^\top$, $Ly = (Ly_1, \cdots, Ly_n)^\top$ iar L este un operator uniform eliptic de ordin doi,

$$
Ly = D_x^2 y + \eta_1(x) D_x y + \eta_0(x) y, \quad \eta_0 \in L^\infty(\Omega), \eta_1 \in W^{1,\infty}(\Omega).
$$

Ecuaţiile sunt cuplat în termeni de ordin zero sau unu prin funcţia C^∞ $F(\zeta, y) = (f_1(\zeta, y), \cdots, f_n(\zeta, y))^\top$, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ iar în membrul drept termenul $g = (g_1, \cdots, g_n)^\top$ este $L^\infty(\Omega)$. Controlul este dat prin $B\chi_\omega u$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $u \in L^2((0,T); [L^2(\omega)]^m)$, unde $\chi_\omega u$ este extensia lui u cu 0 la întreg Ω. Pentru o formulare generală a condiţiilor la frontieră considerăm matricile diagonale $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cu proprietăţile

$$
\begin{array}{l}
\Gamma_i = \operatorname{diag}(\gamma_i^j)_{j=\overline{1,n}}, \forall i = \overline{1,4}, j = \overline{1,n}, \\
\operatorname{rank}[\Gamma_1, \Gamma_2] = \operatorname{rank}[\Gamma_3, \Gamma_4] = n.
\end{array}
\tag{0.8}
$$

Considerăm starea staţionară $\overline{y}$ a sistemului necontrolat, pe care dorim să o stabilizăm. Sistemul liniar obţinut prin liniarizarea în jurul acestei stări staţionare este

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
D_t w - Lw + A_1(x) D_x w + A_0(x) w = B\chi_\omega u, & t > 0, x \in \Omega, \\
\Gamma_1 D_x w(t,0) + \Gamma_2 w(t,0) = \Gamma_3 D_x w(t,l) + \Gamma_4 w(t,l) = 0 & t > 0,
\end{array}
\right.
\tag{0.9}
$$

unde $A_0(x), A_1(x) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$
A_1(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \zeta_j}(D_x \overline{y}, \overline{y}) \right)_{i,j=\overline{1,n}}, A_0(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(D_x \overline{y}, \overline{y}) \right)_{i,j=\overline{1,n}}.
$$

Construim formularea abstractă a problemei ca o problemă de evoluţie într-un spaţiu Hilbert $H = [L^2(\Omega)]^n$:

$$\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset H \longrightarrow H,\ D(\mathbb{A}) = \{y \in [H^2(\Omega)]^n | y \text{ satisface } (\mathbf{BC}) \text{ din } (0.7)\},$$

$$\mathbb{A}y = Ly,$$

$$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) = D(\mathbb{A}),\ \mathcal{A}y = Ly - A_1(x)D_x y - A_0(x)y,$$

$$\mathbb{B} : L^2(\omega)^m \longrightarrow H, \quad \mathbb{B}u = B\chi_\omega u.$$

În cazul unui sistem de două ecuaţii cuplate, cu coeficienţi în operatorul L constanţi $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$ şi condiţii Dirichlet omogene la frontieră, sistemul are forma

(0.10)
$$\begin{cases} D_t w_1(t,x) - Lw_1(t,x) & +a(x)D_x w_1 + b(x)D_x w_2 & \\ & +\alpha(x)w_1 + \beta(x)w_2 = \chi_\omega u, & t>0, x\in\Omega, \\ D_t w_2(t,x) - Lw_2(t,x) & +c(x)D_x w_1 + d(x)D_x w_2 & \\ & +\gamma(x)w_1 + \delta(x)w_2 = 0, & t>0, x\in\Omega, \\ w(t,0) = w(t,l) = 0, & & t>0. \end{cases}$$

Notăm cu

$$h(x) := \frac{\gamma(x) - c'(x)}{c(x)}, \tag{0.11}$$
$$k(x) := -h^2(x) - h'(x) + [\eta_1 - d(x)]h(x) - \eta_0 + \delta(x) - d'(x),$$

pentru $c(x) \neq 0$ in ω, şi avem următorul rezultat privind controlabilitatea aproximativă a sistemului liniar de mai sus:

Teorema 2.1. *Pentru sistemul liniar* (0.10), *cu* $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$, *dacă* $c(x) \neq 0$, $x \in \omega$ *şi una dintre următoarele ipoteze este verificată*

- *(H1) coeficienţii sistemului sunt constanţi în întreg domeniul,*

$$a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R};$$

- *(H2) coeficienţii de cuplaj sunt continui în* Ω, *posibil neconstanţi, şi funcţia* $k = k(x)$ *nu este constantă în* ω;

atunci sistemul liniar (0.10) *este aproximativ controlabil în timp* T.

Pentru sistemul (0.9) avem următorul rezultat privind controlabilitatea aproximativă:

Teorema 2.2. *Considerăm sistemul liniar* (0.9) *cu coeficienţi constanţi* η_0, η_1 *şi coeficienţi de cuplaj de ordin zero constanţi, iar* $A_1 \equiv 0$. *Dacă are loc condiţia Kalman,*

$$\operatorname{rank}\,[A_0|B] = n, \tag{0.12}$$

atunci sistemul liniar (0.9) *este aproximativ controlabil în timp* T.

Pentru sistemul cu cuplaj constant de ordin unu avem:

Teorema 2.3. *Considerăm sistemul liniar* (0.9) *cu coeficienţi constanţi* η_0, η_1 *şi coeficienţi de cuplaj de ordin zero constanţi* $A_1 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *iar* $A_0 \equiv 0$. *Dacă următoarele condiţii algebrice asupra matricei de cuplaj şi matricilor care dau condiţiile la frontieră sunt satisfăcute,*

$$\operatorname{rank}\,[A_1|B] = n, \tag{0.13}$$

$$\ker B^\top \cap \ker(\Gamma_2 + \Gamma_1(A_1^\top + \eta_1 I)) \cap \ker(\Gamma_4 + \Gamma_3(A_1^\top + \eta_1 I)) = \{0\} \tag{0.14}$$

atunci sistemul liniar (0.9) *este aproximativ controlabil în timp* T.

Când controlabilitatea aproximativă este verificată avem următorul rezultat de stabilizare feedback pentru sistemul liniarizat:

Teorema 2.4. *Considerăm sistemul liniar* (0.9), *presupunând că ipotezele uneia din Teoremele* 2.1, 2.2 *sau* 2.3 *sunt verificate. Atunci pentru orice* $\delta > 0$ *există* $C = C(\delta) > 0$, *un subspaţiu finit dimensional* $U \subset L^2(\omega)$ *şi un operator liniar* $K \in L(H,U)$ *astfel încât operatorul* $\mathcal{A}+\mathbb{B}K$ *generează un semigrup analitic de tip negativ care satisface*

$$\|e^{(\mathcal{A}+\mathbb{B}K)t}\|_H \le Ce^{-\delta t}, \quad t > 0. \tag{0.15}$$

Rezultatul de stabilizare feedback a sistemului neliniar este:

Teorema 2.5. *Considerăm sistemul neliniar* (0.7) *şi presupunem că ipotezele uneia dintre Teoremele* 2.1, 2.2 *sau* 2.3 *sunt verificate pentru sistemul liniarizat corespunzător.*

Fie $\nu \in (\frac{3}{4}, 1)$. *Atunci există* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $C > 0$, *astfel încât dacă* $y^0 \in H^{2\nu}(\Omega)$ *verifică condiţiile la frontieră* (**BC**) *în* (0.7) *şi* $\|y^0 - \overline{y}\|_{H^{2\nu}(\Omega)} \leq \varepsilon$ *atunci, considerând în* (0.7) *feedbackul construit în Teorema 2.4,*

$$u = K(y - \overline{y}) \tag{0.16}$$

are loc stabilizarea cu descreştere exponenţială:

$$\|y(t) - \overline{y}\|_{H^{2\nu}(\Omega)} + \|y(t) - \overline{y}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ce^{-\delta t}\|y^0 - \overline{y}\|_{H^1(\Omega)}, \; t > 0. \tag{0.17}$$

Partea a doua

Controlabilitatea sistemelor parabolice cuplate

Capitolul 3. Controlabilitate internă a unui sistem de ecuaţii cuplate în formă stea sau arbore. În acest capitol considerăm sisteme de ecuaţii semiliniare cuplate în termeni de ordin zero. Ne interesează să controlăm astfel de sisteme la stări staţionare cu un singur control intern care acţionează doar într-o ecuaţie. Ipotezele esenţiale care asigură controlabilitatea locală se referă la structura cuplajului, descrisă ca un graf stea sau arbore şi la condiţii asupra funcţiilor de cuplaj sau a coeficienţilor de cuplaj în cazul liniar.

Strategia de demonstrare a rezultatului de controlabilitate are la bază liniarizarea sistemului neliniar în jurul stării staţionare. Etapa principală este de a obţine nula controlabilitate a sistemului liniar folosind o inegalitate de observabilitate pentru sistemul liniar adjunct. Această inegalitate de observabilitate este consecinţă a unor estimări Carleman globale, adecvate.

Acestea, la rândul lor, sunt obţinute prin cuplarea unor inegalităţi Carleman standard pentru fiecare ecuaţie, însă folosind funcţii auxiliare şi funcţii pondere diferite, respectând o anumită ordine ce este posibilă datorită structurii particulare a cuplajului sistemului. Ideea de a folosi funcţii auxiliare diferite ce intervin în estimările Carleman se inspiră din lucrarea G. Olive [85] asupra controlabilităţii sistemelor parabolice cu controale acţionând în subdomenii diferite.

Pentru trecerea de la controlabilitatea sistemului liniarizat la controlabilitatea sistemului neliniar este nevoie de studiul controlabilităţii sistemului liniar într-un cadru L^∞; acest lucru este necesar deoarece estimările Carleman obţinute prin metoda indicată sunt sensibile la perturbările de ordin zero ale sistemului. Regularitatea suplimentară pentru controalele din problema liniarizată se obţine ca în lucrarea V. Barbu [16] (v. de asemenea [39]) folosind proprietăţile de regularizare ale fluxului parabolic într-un mecanism de tip "bootstrap". Aceasta permite studiul controlabilităţii sistemului neliniar printr-un argument de punct fix bazat pe teorema lui Kakutani, tehnică folosită în J.-M. Coron, S. Guerrero şi L. Rosier [39] sau [11]. În [39] tehnica este folosită în combinaţie cu metoda întoarcerii, prin care liniarizarea se face în jurul unei traiectorii particulare a sistemului neliniar, astfel încât sistemul liniarizat este bine cuplat; aceasta este de asemenea o situaţie în care cadul L^∞ pentru controlabilitate se impune din motive asemănătoare.

În prima parte a capitolului se studiază sisteme de ecuaţii parabolice cu cuplaje în formă stea, în care y_k este controlată în ecuaţia corespunzătoare prin intermediul unei neliniarităţi depinzând doar de y^0, y^k:

$$
(0.18) \qquad \begin{cases} D_t y_0 - \Delta y_0 = g_0(x) + f_0(x, y_0) + \chi_{\omega_0} u, & \text{în } (0,T)\times\Omega, \\ D_t y_i - \Delta y_i = g_i(x) + f_i(x, y_0, y_i),\ i \in \overline{1,n}, & \text{în } (0,T)\times\Omega, \\ y_0 = ... = y_n = 0, & \text{pe } (0,T)\times\partial\Omega, \\ y(0,\cdot) = y^0, & \end{cases}
$$

cu $g_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = \overline{0,n}$. Cu privire la termenii de cuplaj considerăm următoarele ipoteze:

(H1) $f_i : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt funţii C^1 şi există $\omega_1, ...\omega_n \subset \Omega$ submulţimi deschise ale lui Ω astfel încât

$$(\omega_i \cap \omega_0) \setminus \bigcup_{j\neq 0,i} \omega_j \neq \emptyset, \forall i \in \overline{1,n}, \tag{0.19}$$

şi pentru orice $i \in \overline{1,n}$,

$$f_i(x, y_0, y_i) = 0 \, \forall x \in \Omega \setminus \omega_i, \; y_0, y_i \in \mathbb{R}; \tag{0.20}$$

(H2) Următoarea condiţie de cuplaj are loc:

$$\operatorname{supp} \frac{\partial f_i}{\partial y_0}(x, \overline{y}_0(x), \overline{y}_i(x)) \cap \left\{ (\omega_i \cap \omega_0) \setminus \overline{\bigcup_{j\neq 0,i} \omega_j} \right\} \neq \emptyset. \tag{0.21}$$

Funcţia de control $u : [0,T] \times \omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ acţionează în ecuaţia lui y_0 şi controlează celelalte componente ale soluţiei, $y_1, ..., y_n$, prin acţiunea lui y_0 în fiecare ecuaţie în subdomeniul corespunzător $\omega_i, i \in \overline{1,n}$.

Pentru început considerăm un sistem liniar controlat care apare printr-o procedură de liniarizare a sistemului neliniar în jurul unei stări staţionare $\overline{y} = (\overline{y}_0, ..., \overline{y}_n) \in [L^\infty(\Omega)]^{n+1}$:

$$\begin{cases} D_t z_0 - \Delta z_0 = c_0(t,x) z_0 + \chi_{\omega_0} u, & \text{în } (0,T) \times \Omega, \\ D_t z_i - \Delta z_i = a_{i0}(t,x) z_0 + c_i(t,x) z_i, \; i \in \overline{1,n}, & \text{în } (0,T) \times \Omega, \\ z_0 = ... = z_n = 0, & \text{pe } (0,T) \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.22}$$

Fie $M, \delta > 0$ şi subdomeniile deschise $\underline{\omega_i} \subset\subset (\omega_i \cap \omega_0) \setminus \bigcup_{j\neq 0,i} \omega_j$. Se introduc următoarele clase de coeficienţi:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{M,\delta,\{\underline{\omega}_i\}_i} = \Big\{ & E = \{a_{i0}, c_j\}_{i\in\overline{1,n}, j\in\overline{0,n}} : a_{i0}, c_j \in L^\infty(Q), \|a_{i0}\|_{L^\infty} \leq M, \\ & \|c_j\|_{L^\infty} \leq M; a_{i0} = 0 \text{ în } Q \setminus Q_{\omega_i} \text{ şi } |a_{i0}| \geq \delta \text{ pe } Q_{\underline{\omega}_i}, \forall i, j \Big\}. \end{aligned} \tag{0.23}$$

Se demonstrează că astfel de sisteme liniare cu coeficienţi în $\mathcal{E}_{M,\delta,\{\underline{\omega}_i\}_i}$ sunt nul controlabile cu controale din $L^2 \cap L^\infty$ cu constante de mărginire în raport cu datele iniţiale uniform mărginite, de forma $C = C(M, \delta, \{\underline{\omega}_i\}_i)$.

Pentru a obţine un astfel de rezultat, se consideră sistemul adjunct:

(0.24)
$$\begin{cases} -D_t p_0 - \Delta p_0 = c_0(t,x)p_0 + \sum_{i=1}^{n} a_{i0}(t,x)p_i, & \text{în } (0,T)\times\Omega, \\ -D_t p_i - \Delta p_i = c_i(t,x)p_i,\ i \in \overline{1,n}, & \text{în } (0,T)\times\Omega, \\ p_0 = ... = p_n = 0, & \text{pe } (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

şi se demonstrează o inegalitate de observabilitate, care apare ca o consecinţă a unei estimări Carleman adecvate sistemului considerat. Considerăm submulţimile deschise

$$\tilde{\omega}_j \subset\subset \underline{\omega}_j$$

şi notăm $Q_{\tilde{\omega}_j} = (0,T)\times\tilde{\omega}_j$.

Estimările Carleman necesită o alegere particulară a funcţiilor auxiliare şi a celor pondere. Fie

$$\overline{\alpha}(t) = \overline{\alpha}^{\lambda}(t) := \frac{e^{\lambda\overline{\psi}} - e^{1.5\lambda\overline{\psi}}}{t(T-t)}, \quad \underline{\alpha}(t) = \underline{\alpha}^{\lambda}(t) := \frac{e^{\lambda\underline{\psi}} - e^{1.5\lambda\overline{\psi}}}{t(T-t)}, \tag{0.25}$$

$$\overline{\psi} = \sup_{x\in\Omega}\sup_{i=\overline{0,n}} \psi_i(x) + \epsilon, \qquad \underline{\psi} = \inf_{x\in\Omega}\inf_{i=\overline{0,n}} \psi_i(x) - \epsilon, \tag{0.26}$$

unde familiile de funcţii auxiliare $\{\psi_i\}$ sunt definite similar cu cele din inegalităţile Carleman standard, fiecare concentrându-şi punctele critice în $\tilde{\omega}_i$, cu $0 < \epsilon < \inf \psi_i, i \in \overline{0,n}$. O condiţie tehnică suplimentară impusă este

$$\frac{\sup \psi_i}{\inf \psi_i} < \frac{8}{7}, \forall i = \overline{0,n}. \tag{0.27}$$

Un rezultat important al capitolului se referă la estimările Carleman adecvate problemei studiate:

Teorema 3.1. *Există λ_0, s_0 astfel încât pentru $\lambda > \lambda_0$ există o constantă $C > 0$ depinzând de $(M, \delta, \{\underline{\omega}_i\}_i, \lambda)$, astfel încât pentru orice $s \geq s_0$, următoarea inegalitate are loc*

$$\begin{aligned} &\int_Q (|D_t p|^2 + |D^2 p|^2 + |Dp|^2 + |p|^2) e^{2s\underline{\alpha}} dxdt \\ &\leq C \int_{Q_{\omega_0}} |p_0|^2 e^{2s\overline{\alpha}} dxdt \end{aligned} \tag{0.28}$$

pentru orice $p \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$ *soluţie a problemei* (0.24).

În plus, există $m_0 \in \mathbb{N}$ *şi* $\delta_1 > 0$ *astfel încât pentru sistemul adjunct omogen (i.e. cu* $g \equiv 0$*), are loc următoarea estimare Carleman* $L^\infty - L^2$

$$\|pe^{(s+m_0\delta_1)\underline{\alpha}}\|_{L^\infty(Q)} \le C\|p_0 e^{s\overline{\alpha}}\|_{L^2(Q_{\omega_0})}. \tag{0.29}$$

Rezultatul privind controlabilitatea sistemului liniar (0.22) este:

Teorema 3.2. *Fie sistemul* (0.22) *cu coeficienţi din* $\mathcal{E}_{M,\delta,\{\underline{\omega}_i\}_i}$. *Atunci există* $C = C(M, \delta, \{\underline{\omega}_i\}_i)$ *astfel încât pentru orice* $z^0 \in H$ *există* $u^* \in L^2(0,T;L^2(\omega_0)) \cap L^\infty(Q_{\omega_0})$ *pentru care starea corespunzătoare a sistemului* (0.22)*,* $z = z^{u^*}$ *ajunge în* 0 *la momentul* T*, i.e.* $z(T) = 0$*. În plus, are loc estimarea asupra controlului*

$$\|u^* e^{-s\overline{\alpha}}\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_0))} + \|u^*\|_{L^\infty(Q_{\omega_0})} \le C\|z^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{0.30}$$

În ceea ce priveşte controlabilitatea locală a sistemului neliniar cu cuplaje de tip stea, are loc următorul rezultat:

Teorema 3.3 *Fie* $\overline{y}$ *starea staţionară a sistemului pentru care funcţiile* $f_j, j \in \overline{0,n}$ *satisfac ipotezele* (H1), (H2). *Atunci, pentru orice* $\beta_0 > 0$ *există* $\zeta_0 = \zeta_0(\beta_0) > 0$ *şi* $C = C(\beta_0, \{\underline{\omega}_i\}_i, \overline{y})$ *astfel încât dacă* $\|y^u(0) - \overline{y}\|_{L^\infty(\Omega)} < \zeta_0$ *există un control* $u \in L^\infty(Q_{\omega_0})$ *care satisface*

$$\|u\|_{L^\infty(Q_{\omega_0})} \le C\|y^u(0) - \overline{y}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

şi

$$y^u(T,\cdot) = \overline{y}, \text{ cu } \|y(t,\cdot) - \overline{y}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \beta_0,\ t \in (0,T).$$

Descriem în continuare ceea ce se întelege aici prin sisteme cu cuplaje de tip arbore. Fie sistemul parabolic
(0.31)

$$\begin{cases} D_t z_0 - \Delta z_0 = c_0(t,x) z_0 + \chi_{\omega_0} u, & \text{în } (0,T)\times\Omega, \\ D_t z_i - \Delta z_i = a_{i\mathbf{k}(i)}(t,x) z_{\mathbf{k}(i)} + c_i(t,x) z_i,\ i \in \overline{1,n}, & \text{în } (0,T)\times\Omega, \\ z_0 = ... = z_n = 0, & \text{pe } (0,T)\times\partial\Omega, \\ z(0,\cdot) = z^0, & \text{în } \Omega \end{cases}$$

cu următoarele condiţii asupra funcţiei $\mathbf{k} : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$:
(0.32)

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \exists m = m(i), 1 \le m \le n-1, (\mathbf{k}\circ)^m(i) = \mathbf{k}\circ\ldots\circ\mathbf{k}(i) = 0.$$

Se notează

$$\mathbf{I}_j = \mathbf{k}^{-1}(j) = \{i \in \overline{1,n} : \mathbf{k}(i) = j\}.$$

Se alege o familie de submulţimi deschise $\omega_i \subset \Omega, i \in \overline{1,n}$ astfel încât

$$D_i := \omega_i \cap \omega_{\mathbf{k}(i)} \cap \cdots \cap \omega_{(\mathbf{k}\circ)^{m(i)}} \neq \emptyset. \tag{0.33}$$

$$D_i \setminus \bigcup_{j\neq i, \mathbf{k}(j)=\mathbf{k(i)}} \omega_j \neq \emptyset. \tag{0.34}$$

Se alege o familie de submulţimi deschise $\{\underline{\omega}_j\}_{j\in\overline{0,n}}$ cu proprietăţile

$$\underline{\omega}_0 \subset\subset \omega_0, \quad \underline{\omega}_i \subset\subset D_i \setminus \bigcup_{l\neq i, \mathbf{k}(l)=\mathbf{k(i)}} \omega_l \tag{0.35}$$

$$\underline{\omega}_i \subset\subset \underline{\omega}_{\mathbf{k}(i)} \subset\subset \underline{\omega}_0,\ i \in \overline{1,n}. \tag{0.36}$$

Pentru $M, \delta > 0$ şi familia de submulţimi deschise descrisă mai sus, $\{\underline{\omega}_i\}_i$, se introduce clasa de coeficienţi:
(0.37)

$$\mathcal{E}_{M,\delta,\{\underline{\omega}_i\}_i,\mathbf{k}} = \Big\{ E = \{a_{i\mathbf{k}(i)}, c_j\}_{i\in\overline{1,n}, j\in\overline{0,n}} : a_{i\mathbf{k}(i)}, c_j \in L^\infty(Q), \|a_{i\mathbf{k}(i)}\|_{L^\infty} \le M,$$
$$\|c_j\|_{L^\infty} \le M; a_{i\mathbf{k}(i)} = 0 \text{ în } Q\setminus Q_{\omega_i}, \text{ şi } |a_{i\mathbf{k}(i)}| \ge \delta \text{ on } Q_{\underline{\omega}_i}, \forall i \in \overline{1,n} \Big\}.$$

Rezultatul principal privind nula controlabilitate a sistemului liniar cuplat în formă arbore este:

Teorema 3.5. *Fie sistemul* (0.31) *cu coeficienţi în* $\tilde{\mathcal{E}}_{M,\delta,\{\underline{\omega}_i\}_i}$. *Atunci există o constantă* $C = C(M, \delta, \{\underline{\omega}_i\}_i)$ *astfel încât pentru orice* $z^0 \in H$ *există* $u^* \in L^2(0,T; L^2(\omega_0)) \cap L^\infty(Q_{\omega_0})$, *pentru care starea corespunzătoare a sistemului* (0.31) $z = z^{u^*}$ *ajunge în* 0 *la momentul* T, *i.e.* $z(T) = 0$, *iar controlul satisface estimarea*

$$\|u^* e^{-s\overline{\alpha}}\|_{L^2(0,T;L^2(\omega_0))} + \|u^*\|_{L^\infty(Q_{\omega_0})} \leq C\|z^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{0.38}$$

Controlabilitatea sistemelor neliniare cu cuplaje de tip arbore poate fi studiată într-un mod asemător cazului sistemelor cu cuplaje de tip stea. Pentru aceasta se consideră sisteme de forma

$$\begin{cases} D_t y_0 - \Delta y_0 = g_0(x) + f_0(x, y_0) + \chi_{\omega_0} u, & \text{în } (0,T) \times \Omega, \\ D_t y_i - \Delta y_i = g_i(x) + f_i(x, y_{\mathbf{k}(i)}, y_i),\ i \in \overline{1,n}, & \text{în } (0,T) \times \Omega, \\ y_0 = \ldots = y_n = 0, & \text{pe } (0,T) \times \partial\Omega, \\ y(0,\cdot) = y^0, & \text{în } \Omega, \end{cases} \tag{0.39}$$

unde $g_j \in L^\infty(\Omega)$, $j \in \overline{0,n}$ iar $\overline{y} = (\overline{y}_0, \ldots, \overline{y}_n) \in [L^\infty(\Omega)]^{n+1}$ este o soluţie staţionară corespunzătoare. Presupunem că neliniarităţile verifică următoarele ipoteze:

(H1') $f_0 \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}), f_i \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), i \in \overline{1,n}$ şi există $\omega_1, \ldots \omega_n \subset \Omega$ mulţimi nevide şi deschise a lui Ω care satisfac (0.33), (0.34) şi

$$(\omega_i \cap \omega_{\mathbf{k}(i)}) \setminus \bigcup_{j \neq i, \mathbf{k}(j) = \mathbf{k}(i)} \omega_j \neq \emptyset,\ \forall i \in \overline{1,n}, \tag{0.40}$$

şi pentru orice $i \in \overline{1,n}$,

$$f_i(x, \tau, \xi) = 0,\ \forall x \in \Omega \setminus \omega_i,\ \tau, \xi \in \mathbb{R}; \tag{0.41}$$

(H2') Se definesc, pentru $i \in \overline{1,n}$, coeficienţii

$$a^0_{i\mathbf{k}(i)}(x) := \frac{\partial f_i}{\partial y_{\mathbf{k}(i)}}(x, \overline{y}_{\mathbf{k}(i)}(x), \overline{y}_i(x))$$

$$c_0^0(x) := \frac{\partial f_0}{\partial y_0}(x, \overline{y}_0(x)),\ c_i^0(x) := \frac{\partial f_i}{\partial y_i}(x, \overline{y}_{\mathbf{k}(i)}(x), \overline{y}_i(x)).$$

Pentru o familie de subdomenii $\{\underline{\omega}_i\}_i$ care satisfac (0.35), (0.36), presupunem că există $M_0, \delta_0 > 0$ pentru care are loc

$$\{a^0_{i\mathbf{k}(i)}, c^0_j\}_{i\in\overline{1,n}, j\in\overline{0,n}} \in \mathcal{E}_{M_0,\delta_0,\{\underline{\omega}_i\}_i,\mathbf{k}}. \tag{0.42}$$

Teorema 3.6. *Fie $\overline{y}$ o stare staţionară sistemului necontrolat* (0.39) *(i.e. $u = 0$) şi funcţiile $f_j, j \in \overline{0,n}$ verifică ipotezele* (H1'), (H2'). *Pentru orice $\beta_0 > 0$ există $\zeta_0 = \zeta_0(\beta_0) > 0$ şi $C = C(\beta_0, \{\underline{\omega}_i\}_i, \overline{y})$ astfel încât dacă $\|y^u(0) - \overline{y}\|_{L^\infty(\Omega)} < \zeta_0$ atunci există un control $u \in L^\infty(Q_{\omega_0})$ care satisface*

$$\|u\|_{L^\infty(Q_{\omega_0})} \leq C\|y^u(0) - \overline{y}\|_{L^\infty(\Omega)},$$
$$y^u(T,\cdot) = \overline{y},\ \ \textit{cu}\ \ \|y(t,\cdot) - \overline{y}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \beta_0,\ t \in (0,T).$$

Partea a treia

Probleme inverse de estimare a sursei în sisteme parabolice

Capitolul 4. Stabilitate în norme L^q pentru probleme inverse de estimare a sursei în sisteme parabolice liniare. Considerăm sisteme liniare de ecuaţii parabolice într-un subdomeniu mărginit al lui $\mathbb{R}^N$, cuplate în termeni de ordin zero şi unu. Problema studiată este stabilitatea Lipschitz în norme L^q, $2 \leq q \leq \infty$, pentru sursă, folosind norme corespunzătoare ale soluţiei măsurate într-un subdomeniu. Rezultatul obţinut este de aceeaşi natură cu rezultatul din O. Yu. Imanuvilov şi M. Yamamoto, [61] de estimare a sursei unei ecuaţii parabolice în norme L^2. În acest capitol adresăm şi problema estimărilor sursei în funcţie de observaţii parţiale asupra soluţiei, adică observaţii asupra unui număr redus de componente ale soluţiei. Instrumentul principal în abordare este o familie de estimări Carleman globale.

Primul rezultat al acestui capitol este o familie de estimări Carleman cu ponderi generale în L^q pentru sisteme parabolice neomogene. Acestea sunt obţinute printr-un procedeu de "bootstrap" care se bazează pe efectul regularizant al fluxului parabolic şi pe o familie de inegalităţi Carleman L^2 cu ponderi generale.

Pentru a găsi estimări L^q, $q \in [2, +\infty)$, ale sursei se foloseşte un argument prin reducere la absurd şi familia de inegalităţi Carleman L^q. Estimările L^q obţinute şi o tehnică similară celei din [61] conduc la obţinerea de estimări L^∞ pentru sursă.

Fie $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^2, $T > 0$ şi $Q := (0,T) \times \Omega$. Se fixează $\theta \in (0,T)$ un moment intermediar de observare.

Considerăm un sistem liniar de n ecuaţii parabolice cuplate în termeni de ordin zero şi unu:

$$\begin{cases} D_t y_i + L_i y_i + L_i^1 y + L_i^0 y = g_i, & (0,T) \times \Omega, \quad i = \overline{1,n} \\ y_i = 0, & (0,T) \times \partial\Omega, \quad i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{0.43}$$

unde $y := (y_1, ..., y_n)^\top$ iar $\{L_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o familie de operatori uniform eliptici de oridin doi în formă de divergenţă

$$L_i y_i := -\sum_{j,k=1}^{N} D_j(a_i^{jk} D_k y_i) \quad i = \overline{1,n}. \tag{0.44}$$

Coeficienţii a_i^{jk} aparţin spaţiului $W^{1,\infty}(0,T; W^{1,\infty}(\Omega))$ şi satisfac condiţia de elipticitate
(0.45)
$$\sum_{j,k=1}^{N} a_i^{jk}(t,x)\xi_j\xi_k \geq \mu|\xi|^2, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^N, \quad (t,x) \in Q, \text{ pentru } \mu > 0 \text{ fixat.}$$

Operatorii de cuplaj sunt de forma

$$L_i^1 y = \sum_{\substack{k=\overline{1,N} \\ l=\overline{1,n}}} b_i^{kl} D_k y_l, \quad L_i^0 y = \sum_{l=\overline{1,n}} c_i^l y_l, \quad i = \overline{1,n},$$

cu coeficienţi $b_i^{j,k}, c_i^l \in W^{1,\infty}(0,T; L^\infty(\Omega))$.

Pentru $q \geq 2, \tilde{c} > 0$, $\tilde{\delta} > 0$ şi $\tilde{g} \in [L^{q'}(Q)]^n, \tilde{g} \neq 0$ ($q' = \frac{q}{q-1}$) considerăm mulţimea de surse pentru sistemul (0.43):

$$(0.46) \quad \mathcal{G}_{q,\tilde{c},\tilde{\delta},\tilde{g}} = \left\{ \begin{array}{l} g \in W^{1,1}((0,T);[L^q(\Omega)]^n) : \int_Q g \cdot \tilde{g} \geq \tilde{\delta}\|g\|_{L^q(Q)}, \\ \left|\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}\right| \leq \tilde{c}|g(\theta,x)|, a.e. \, (t,x) \in (0,T) \times \Omega \end{array} \right\}.$$

Pentru sistemul (0.43) considerăm surse $g = (g_i)_{i=\overline{1,n}}$ din conul $\mathcal{G}_{q,\tilde{c},\tilde{\delta},\tilde{g}}$. Se doreşte a se obţine estimări în norme L^q pentru aceste surse în funcţie de soluţia $y = (y_i)_{i=\overline{1,n}}$ măsurată în $Q_\omega := (0,T) \times \omega$, unde $\omega \subset\subset \Omega$ este subdomeniu de observare.

Primul rezultat al capitolului este o familie de estimări Carleman cu ponderi generale, în L^q, pentru sisteme parabolice neomogene.

Considerăm funcţia $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ astfel încât

$$\frac{1}{3} \leq \psi \leq \frac{4}{3}, \quad \psi|_{\partial\Omega} = \frac{1}{3}, \quad \{x \in \overline{\Omega} : |\nabla\psi(x)| = 0\} \subset\subset \omega.$$

De asemenea, considerăm funcţiile pondere

$$(0.47) \qquad \varphi(t,x) := \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \quad \alpha(t,x) := \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{1.5\lambda\|\psi\|_{C(\overline{\Omega})}}}{t(T-t)}.$$

Teorema 4.1. (estimări Carleman L^q) *Fie $g \in (L^q(Q))^n$, cu $q < \infty$ şi $k_0 \in \mathbb{R}$. Atunci există $\lambda_0 = \lambda_0(q,k_0)$, $s_0 = s_0(q,k_0)$, $C = C(q,k_0)$ şi $m = m(q)$ astfel încât, pentru orice $\lambda \geq \lambda_0$, $s \geq s_0$ şi y soluţie a* (0.43), *următoarea inegalitate are loc:*
(0.48)

$$\begin{aligned} &\|\varphi^{k_0-2m-1} y e^{s\alpha}\|_{L^q(Q)} + \|(s\lambda)^{-1}\varphi^{k_0-2m-2} D y e^{s\alpha}\|_{L^q(Q)} \\ &+ \|(s\lambda)^{-2}\varphi^{k_0-2m-4} D_t y e^{s\alpha}\|_{L^q(Q)} + (s\lambda)^{-2}\|\varphi^{k_0-2m-4} D^2 y e^{s\alpha}\|_{L^q(Q)} \\ &\leq C\left[(s\lambda)^{2m}\|\varphi^{k_0} y e^{s\alpha}\|_{L^2(Q_\omega)} + (s\lambda)^{2m-\frac{3}{2}}\|\varphi^{k_0+3} g e^{s\alpha}\|_{L^q(Q)}\right]. \end{aligned}$$

Dacă $N+1<q<\infty$, are loc pentru y estimarea în spaţiul Hölder C^γ cu $\gamma = 1-(N+1)/q$:

$$\begin{aligned}\|\varphi^{k_0-2m-1} y e^{s\alpha}\|_{C^\gamma(Q)} &\leq \\ \leq C\left[(s\lambda)^{2m+2}\|\varphi^{k_0+2} y e^{s\alpha}\|_{L^2(Q_\omega)} + (s\lambda)^{2m+\frac{1}{2}}\|\varphi^{k_0+5} g e^{s\alpha}\|_{L^q(Q)}\right]&.\end{aligned} \tag{0.49}$$

Scopul principal al problemei inverse de estimare a sursei este de a obţine estimări în spaţii Lebesgue sau în spaţii Hölder pentru $g=(g_1,...,g_n)^\top$ în funcţie de norme ale soluţiei măsurate într-un subdomeniu $\omega \subset \Omega$. Un prim astfel de rezultat se referă la estimări ale sursei în norme $L^q, q\geq 2$:

Teorema 4.2. *Fie $q \geq 2$, $\tilde{c}>0$ şi $\tilde{\delta}>0$. Presupunem că sursele satisfac $g \in \mathcal{G}_{q,\tilde{c},\tilde{\delta},\tilde{g}}$. Atunci există o constantă $C=C(q,\tilde{c},\tilde{\delta},\tilde{g})>0$ astfel încât dacă $y \in L^q\left(0,T;(W_0^{1,q}\cap W^{2,q}(\Omega))^n\right)$ este soluţie a problemei (0.43) corespunzătoare sursei g, are loc estimarea sursei:*

$$\|g\|_{L^q(Q)} \leq C\left(\|y\|_{L^q(Q_\omega)} + \|y(\theta,\cdot)\|_{W^{2,q}(\Omega)}\right). \tag{0.50}$$

În ce priveşte estimările sursei în normă L^∞ impunem o ipoteză suplimentară de regularitate şi anume presupunem că sursele sunt Hölder continue: $g \in C^\gamma(Q)$ pentru un $\gamma \in (0,1)$.

Teorema 4.3. *Presupunem că operatorii L_i, L_i^1, L_i^0 au coeficienţi netezi în $\overline{Q}$. Fie $\gamma \in (0,1)$. Presupunem că sursele în (0.43) sunt Hölder continue $g \in (C^\gamma(Q))^n \cap \mathcal{G}_{q,\tilde{c},\tilde{\delta},\tilde{g}}$ cu $q=\frac{N+1}{1-\gamma}$. Atunci există $C=C(\gamma,\tilde{c},\tilde{\delta},\tilde{g})>0$, astfel încât*

$$\|g\|_{L^\infty(Q)} \leq C\left(\|y\|_{L^q(Q_\omega)} + \|y(\theta,\cdot)\|_{C^{2+\gamma}(\Omega)}\right). \tag{0.51}$$

Capitolul 5: Stabilitate în probleme inverse de estimare a sursei pentru sisteme neliniare de reacţie-difuzie. În acest capitol se consideră sisteme de ecuaţii parabolice semiliniare, cuplate în termeni de ordin zero, pentru care se studiază estimări ale surselor în norme L^q şi L^∞ în funcţie de norme ale soluţiei măsurate într-un subdomeniu.

Sistemele pe care le avem în vedere pot modela fenomene de reacţie-difuzie, propagarea căldurii, dinamica populaţiei, etc. În aceste cazuri sursele sunt considerate cu componente pozitive, iar soluţiile rămân de asemenea în conul funcţiilor pozitive atunci când anumite ipoteze asupra neliniarităţilor de cuplaj sunt asigurate.

Rezultatele din acest capitol au ca punct de plecare lucrarea O. Yu. Imanuvilov şi M. Yamamoto [61], unde s-au stabilit estimări L^2 pentru sursele unei ecuaţii liniare parabolice. Vom trata pentru început cazul mai general al estimărilor L^q şi L^∞ pentru un model liniar, pentru ca mai apoi să obţinem rezultate de aceeaşi natură pentru sistemele neliniare de reacţie-difuzie. Reuşim să oţinem estimări care nu mai depind de observaţii ale derivatei în raport cu timpul a soluţiei (aşa cum apăreau în cazul L^2) iar strategia foloseşte o familie de inegalităţi Carleman L^q cu ponderi generale şi un argument prin reducere la absurd utilizând principiul de maxim sau rezultate de invarianţă pentru sisteme parabolice cuplate.

Estimările Carleman L^2 sunt folosite ca punct de plecare într-un procedeu de "bootstrap" care conduce la obţinerea unei familii de inegalităţi Carleman în $L^q, q \geq 2$, cu ponderi generale şi parametri independenţi, pentru sisteme parabolice neomogene cu condiţii la frontieră mixte, omogene. Argumentul de "bootstrap" se bazează pe efectul regularizant al fluxului parabolic în spaţii L^p (v. monografia O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonikov, N. N. Ural'ceva, [64]).

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $\omega \subset\subset \Omega$ o submulţime deschisă a lui Ω, $T > 0$ şi $Q = (0, T) \times \Omega$.

Se notează cu $(L_i)_{i=\overline{1,n}}$ o familie de n operatori uniform eliptici de ordin doi în formă de divergenţă

$$L_i w = -\sum_{j,k=1}^{N} D_j(a_i^{jk} D_k w) \tag{0.52}$$

cu coeficieţii $a_i^{jk} \in W^{1,\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$, $i = \overline{1,n}, j,k = \overline{1,N}$. $A_i = (a_i^{jk})_{j,k=\overline{1,N}}$ sunt matricile coeficienţilor părţilor principale, pentru care are loc condiţia de uniformă elipticitate
(0.53)

$$\exists \mu > 0 \ a.\hat{\imath}. \ \sum_{j,k=1}^{N} a_i^{jk}(t,x)\xi_j\xi_k \geq \mu|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (t,x) \in Q, i = \overline{1,n}.$$

De asemenea se consideră operatorii de ordin unu (aici w este o funcţie scalară),

$$L_i^1 w = \sum_{k=1}^{N} b_i^k D_k w,\ i \in \overline{1,n}, \tag{0.54}$$

unde $b_i^k \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega))$.

Considerăm sisteme de tip reacţie-difuzie de forma

$$\begin{cases} D_t y_i + L_i y_i + L_i^1 y_i + f_i(y_1,...,y_n) = g_i, & (0,T)\times\Omega, \\ \beta_i(x)\frac{\partial y_i}{\partial n_{A_i}} + \eta_i(x) y_i = 0, & (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{0.55}$$

unde $g_i \geq 0, i = \overline{1,n}$ sunt surse interne acţionând în fiecare ecuaţie a sistemului. În cele ce urmează, când se va face referire la o funcţie vectorială $g = (g_i)^\top_{i\in\overline{1,n}}$, spunem că $g \geq 0$ atunci când pozitivitatea se verifică pe componente $g_i \geq 0, i = \overline{1,n}$.

În condiţiile la frontieră, $\frac{\partial}{\partial n_{A_i}}$ notează derivata conormală, $\frac{\partial y}{\partial n_{A_i}} = \langle A_i \nabla y, n\rangle$, $A_i = (a_i^{jk})_{j,k}$. Se impune ca $\beta_i, \eta_i \in C^2(\partial\Omega)$ astfel încât dacă $\Sigma \subset \partial\Omega$ este o componentă conexă a frontierei

$$\beta_i > 0 \text{ pe } \Sigma \qquad \text{sau} \qquad \beta_i \equiv 0 \text{ şi } \eta_i \equiv 1 \text{ pe } \Sigma. \tag{0.56}$$

Cuplajul este asigurat prin neliniarităţile $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^1, cu $f_i(0) = 0$, $i = \overline{1,n}$ şi care verifică următoarele ipoteze:

(H1) (*cvasimonotonie*) pentru $\varepsilon_0 > 0$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y_1, \ldots, y_n) \leq 0$, $y \in \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0) := \{y \geq 0, \|y\| \leq \varepsilon_0\}, j \neq i, i, j = 1, \ldots, n;$

(H2) $f_i(y_1, \ldots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \ldots, y_n) \leq 0, i = \overline{1,n}, y \geq 0.$

Pentru a descrie cadrul în care studiem problema inversă introducem următoarele mulţimi de surse, respectiv mulţimi de soluţii:

Fie $\tilde{G}$ o submulţime compactă a $[L^{q'}(Q)]^n$, $q' = \frac{q}{q-1}$ astfel încât $0 \notin \tilde{G}$. Pentru $q \geq 2, \tilde{c} > 0$, $\tilde{\delta} > 0$ se consideră mulţimile de surse:

$$\mathcal{G}_{q,\tilde{\delta},\tilde{G}} = \left\{ \begin{array}{c} g \in W^{1,1}((0,T); [L^q(\Omega)]^n) : \, g \geq 0 \\ \text{şi } \exists \tilde{g} \in \tilde{G} \ a.\hat{\imath}. \ \int_Q g \cdot \tilde{g} dx dt \geq \tilde{\delta} \|g\|_{L^q(Q)} \end{array} \right\} \tag{0.57}$$

şi

$$\mathcal{G}_{q,\tilde{c},\tilde{\delta},\tilde{G}} = \left\{ \begin{array}{l} g \in W^{1,1}((0,T); [L^q(\Omega)]^n) : \, g \geq 0, \\ \left| \frac{\partial g(t,x)}{\partial t} \right| \leq \tilde{c} |g(\theta, x)|, \quad \text{a.e. } (t,x) \in (0,T) \times \Omega \\ \text{şi } \exists \tilde{g} \in \tilde{G} \ a.\hat{\imath}. \ \int_Q g \cdot \tilde{g} dx dt \geq \tilde{\delta} \|g\|_{L^q(Q)} \end{array} \right\}. \tag{0.58}$$

De asemenea, se consideră mulţimea de funcţii (mulţime căreia presupunem a priori că îi aparţin soluţiile sistemului parabolic studiat):

$$\mathcal{F}_{q,M} = \{y \in [W_q^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)]^n : y \geq 0, \, \|y\|_{L^\infty(Q)} \leq M\}. \tag{0.59}$$

Principalele rezultate privind stabilitatea sistemului neliniar sunt enunţate în următoarele două teoreme:

Teorema 5.1 (estimări de stabilitate în L^q) *Fie* $2 \leq q < \infty$, $\tilde{\delta} > 0, M > 0$ *şi* $\tilde{G} \subset L^{q'}(Q)$ *o mulţime compactă cu* $0 \notin \tilde{G}$. *Se presupune că sursele sistemului* (0.55) *aparţin mulţimii* $\mathcal{G}_{q,\tilde{\delta},\tilde{G}}$ *şi soluţiile corespunzătoare satisfac* $y \in \mathcal{F}_{q,M}$.

Dacă una dintre următoarele condiţii privind neliniaritatea f are loc:

(A) *f satisface ipoteza $(H1)$ în întreg conul $y \geq 0$,*

sau

(B) *$q > \frac{N+2}{2}$ şi f satisface ipotezele $(H1)$, $(H2)$,*

atunci are loc o estimate L^q: există $C = C(\tilde{\delta}, M, \tilde{G}) > 0$ astfel încât

$$\|g\|_{L^q(Q)} \leq C\|y\|_{L^q(Q_\omega)}. \tag{0.60}$$

Teorema 5.2 (estimări de stabilitate în L^∞) *Fie $\varrho \in (0,1)$, $q = \frac{N+1}{1-\varrho}$ şi $\theta \in (0,T)$ un moment intermediar de observare. Fie $\tilde{\delta} > 0$, $M > 0$ şi $\tilde{G} \subset L^{q'}(Q)$ o mulţime compactă, $0 \notin \tilde{G}$ astfel încât sursele din (0.55) aparţin mulţimii $\mathcal{G}_{q,\tilde{c},\tilde{\delta},\tilde{G}} \cap C^\varrho(Q)$ iar soluţiile asociate $y \in \mathcal{F}_{q,M}$. Se presupune de asemenea că una dintre condiţiile (A) sau (B) are loc.*

Atunci există $C = C(\varrho, \tilde{c}, \tilde{\delta}, M) > 0$ astfel încât:

$$\|g\|_{L^\infty(Q)} \leq C(\|y\|_{L^q(Q_\omega)} + \|y(\theta,\cdot)\|_{C^{2+\varrho}(\Omega)}). \tag{0.61}$$

Metoda de a obţine estimări ale sursei sistemului neliniar este de a combina estimări apriori pentru soluţie cu estimări ale sursei pentru sisteme liniare asociate şi care, într-un anumit sens, aproximează modelul neliniar. Rezultatele din cazul liniar dau informaţii asupra sursei în problema neliniară în ipoteze de mărginire în L^∞ pentru familia de soluţii.

Aşadar, pentru început studiem o problemă parabolică liniară, cu aceeaşi parte principală cu a sistemului neliniar (0.55), în care componentele sistemului satisfac una din condiţiile omogene la frontieră Dirichlet, Neumann sau

Robin:

$$(0.62)\qquad \begin{cases} D_t y_i + L_i y_i + L_i^1 y_i + L_i^0 y = g_i, & (0,T)\times\Omega, \\ \beta_i(x)\frac{\partial y_i}{\partial n_{A_i}} + \eta_i(x) y_i = 0, & (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases} \quad i=\overline{1,n}$$

unde $g_i \geq 0, i=\overline{1,n}$ sunt sursele interne iar β_i, η_i sunt date ca în (0.56).

Operatorii de ordin inferior sunt daţi de (w ieste o funcţie scalară, y este o funcţie vectorială):

$$(0.63)\qquad L_i^1 w = \sum_{k=\overline{1,N}} b_i^k D_k w, \quad L_i^0 y = \sum_{l=\overline{1,n}} c_i^l y_l, \quad i=\overline{1,n},$$

cu coeficienţi $b_i^k, c_i^l \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Omega))$, iar cuplajul este doar în termenii de ordin zero.

Scopul este de a obţine estimări în norme L^q şi L^∞ pentru sursa $g = (g_i)_{i=\overline{1,n}}^\top \in \mathcal{G}_{q,\tilde{\delta},\tilde{G}}$ în funcţie de observaţii asupra soluţiei măsurate în Q_ω. Rezultatul în cazul liniar este următorul:

Teorema 5.3. *Fie $2 \leq q < \infty, \tilde{\delta} > 0, \tilde{c} > 0$ şi $\tilde{G} \subset L^{q'}(Q)$ o mulţime compactă cu $0 \notin \tilde{G}$. Pentru surse g din $\mathcal{G}_{q,\tilde{\delta},\tilde{G}}$ şi soluţii corespunzătoare y ale sistemului* (0.62), *$y \in [W_q^{2,1}(Q)]^n$, există $C = C(\tilde{\delta}, q) > 0$, astfel încât*

$$(0.64)\qquad \|g\|_{L^q(Q)} \leq C\|y\|_{L^q(Q_\omega)}.$$

În plus, pentru $\theta \in (0,T)$, $\varrho \in (0,1)$ şi surse g din $\mathcal{G}_{q,\tilde{\delta},\tilde{c},\tilde{G}} \cap C^\varrho(Q)$ cu soluţiile corespunzătoare y ale sistemului (0.62) *$y \in [W_q^{2,1}(Q)]^n$, există $C = C(\tilde{\delta}, q) > 0$, astfel încât*

$$(0.65)\qquad \|g\|_{L^\infty(Q)} \leq C(\|y\|_{L^q(Q_\omega)} + \|y(\theta,\cdot)\|_{C^{2+\varrho}(\Omega)}).$$

Demonstraţia teoremei anterioare se bazează pe estimări Carleman în norme L^q pentru sisteme parabolice cu condiţii omogene la frontieră (de tip Dirichlet, Neumann sau Robin) şi un argument bazat pe principiul de maxim pentru sisteme de ecuaţii parabolice.

Fie un sistem liniar parabolic slab cuplat de forma (0.62) pentru care operatorul de frontieră este dat prin

$$\mathcal{B}y = (B_i y_i)_{i=\overline{1,n}}, \mathcal{B}_i y_i = \beta_i(x)\frac{\partial y_i}{\partial n_{A_i}} + \eta_i(x) y_i, i = \overline{1,n}.$$

În ipoteza suplimentară că termenii din afara diagonalei principale a matricii coeficienţilor lui L^0 sunt negativi,

$$c_i^l \leq 0,\ i \neq l,\ i, l \in \overline{1,n}, \tag{0.66}$$

rezultele din [87], [3] asigură că dacă $y_i(0,\cdot) \geq 0$ în Ω atunci $y_i \geq 0$ în întreg domeniul $(0,T)\times\Omega$. În plus, dacă soluţia se anulează într-un punct interior $(t_0, x_0) \in (0,T)\times\Omega$ atunci $y \equiv 0$ în subcilindrul $\{(t,x) | t < t_0, x \in \Omega\}$.

Rezultatul principal privind estimările Carleman în norme L^q pentru sisteme de ecuaţii liniare (0.62) utilizează câteva funcţii auxiliare. Dat $\omega \subset\subset \Omega$ se consideră funcţia $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ astfel încât

$$\frac{1}{3} \leq \psi \leq \frac{4}{3}, \quad \psi|_{\partial\Omega} = \frac{1}{3}, \quad \{x \in \overline{\Omega} : |\nabla\psi(x)| = 0\} \subset\subset \omega.$$

Se introduc de asemenea funcţiile pondere

$$\varphi(t,x) := \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \quad \alpha(t,x) := \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{1.5\lambda\|\psi\|_{C(\overline{\Omega})}}}{t(T-t)}. \tag{0.67}$$

Rezultatul privind estimările Carleman L^q pentru sistemul liniar (0.62) este următorul:

Propozitie 5.1. (estimări Carleman în L^q) *Fie $g \in (L^q(Q))^n$, cu $2 \leq q < \infty$. Există $s_0 = s_0(q)$, $\lambda_0 = \lambda_0(q)$, astfel încât dacă $\lambda > \lambda_0$, $s', s > s_0$, $\frac{s'}{s} > \Gamma > 1$, atunci există $C = C(q,\Gamma)$astfel încât soluţiile $y \in W_q^{2,1}(Q)$ ale (0.62), satisfac estimarea:*

(0.68)

$$\|ye^{s'\alpha}\|_{L^q(Q)} + \|(Dy)e^{s'\alpha}\|_{L^q(Q)} + \|(D^2y)e^{s'\alpha}\|_{L^q(Q)} + \|(D_t y)e^{s'\alpha}\|_{L^q(Q)}$$
$$\leq C\left[\|ge^{s\alpha}\|_{L^q(Q)} + \|ye^{s\alpha}\|_{L^2(Q_\omega)}\right].$$

Partea a patra

Regularitate şi estimări Carleman în spaţii $L^q(L^p)$ pentru probleme parabolice

Capitolul 6. Asupra regularităţii parabolice, scufundărilor de tip Sobolev şi estimărilor Carleman globale în spaţii $L^q(L^p)$. În acest capitol sunt expuse o serie de rezultate din teoria spaţiilor de funcţii, din teoria spaţiilor de interpolare şi regularitatea parabolică, subiecte cărora le este dedicată o literatură ştiinţifică foarte vastă. Rezultatele de regularitate parabolică prezentate pot fi probabil deduse din literatura existentă asupra subiectului, însă am ales să facem o prezentare într-o formă concentrată, având în vedere aplicaţiile la problemele studiate în teză. Rezultatele de regularitate parabolică obţinute sunt mai apoi folosite pentru a obţine un rezultat de scufundare de tip Sobolev pentru spaţii anizotrope şi neomogene $W^{2,1}_{p,q}(Q)$. De asemenea, se discută inegalităţi de tip Gagliardo-Nirenberg pentru spaţii anizotrope iar argumentele de "bootstrap" şi de regularitate sunt folosite pentru a stabili estimări Carleman în spaţii $L^q(L^p)$, $q, p > 2$ pentru ecuaţii parabolice neomogene.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ un domeniu mărginit cu frontieră $\partial\Omega$ netedă şi $Q = (0,T) \times \Omega$. Se consideră probleme parabolice de forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_t y(t,x) + Ly(t,x) = f(t,x) & t \in (0,T), x \in \Omega, \\ y(t,x) = 0 & t \in (0,T), x \in \partial\Omega, \\ y(0,x) = y_0(x) & x \in \Omega, \end{array} \right. \tag{0.69}$$

unde L este un operator uniform eliptic de forma

$$Ly = -\sum_{j,k=1}^{n} D_j(a_{jk} D_k y) + \sum_{k=1}^{n} b_k D_k y + cy. \tag{0.70}$$

Coeficienţii satisfac ipotezele de regularitate $a_{jk} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $b^k, c \in L^\infty(\Omega)$ iar coeficienţii părţii principale satisfac, pentru $\mu > 0$, condiţia de elipticitate

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq \mu|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega. \tag{0.71}$$

Pentru $p, q \in [1, \infty)$ se consideră spaţiile (v. [**102, 103**]):

$$W^{2,1}_{p,q}(Q) = L^q(W^{2,p}(\Omega)) \cap W^{1,q}(L^p(\Omega)).$$

Unul dintre rezultatele principale ale acestui capitol se referă la scufundări de tip Sobolev pentru spaţii $W^{2,1}_{p,q}(Q)$, iar metoda de abordare se bazează pe regularitatea fluxului generat de un operator eliptic.

Pentru operatorul diferenţial L cu condiţii omogene la frontieră se consideră realizarea sa în spaţii L^p, care ia în considerare rezultatele de regularitate în spaţii L^p pentru ecuaţii eliptice (v. [**58**]); definiţia este dată de $A = A_p : D(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ cu $Au = Lu$, $u \in D(A)$.

Fără a restrânge generalitatea se poate presupune ca operatorul L este pozitiv. În plus, $-A$ generează un semigrup analitic în L^p. Principiul de maxim aplicat operatorului L asigură faptul că $(\lambda I + A)^{-1}$ păstrează pozitivitatea şi astfel $A = A_p$ are puteri imaginare mărginite.

Teorema 6.5. *Operatorul $A = A_p$ cu $p \in (1, \infty)$, realizarea în L^p a operatorului eliptic L cu condiţii omogene pe frontiera $\partial\Omega$, are proprietatea că pentru $\gamma \in (0, 1)$ are loc*

$$D(A^\gamma) = [L^p(\Omega), W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)]_\gamma.$$

($[X, Y]_\gamma$ reprezintă spaţiul de interpolare complexă între spaţiile Banach X şi Y.)

Relaţiile între domeniile puterilor fracţionare ale operatorului A şi spaţiile Sobolev-Slobodeckii sunt redate în propoziţia următoare:

Propoziţia 6.1. *Fie $\gamma \in (0, 1)$. Atunci, pentru $p \geq 2$, au loc scufundările continue*

$$D(A^\gamma) \subset H^{2\gamma,p}(\Omega) \subset W^{2\gamma,p}(\Omega),$$

iar pentru $1 < p < 2$ şi $\gamma' < \gamma$,

$$D(A^\gamma) \subset H^{2\gamma,p}(\Omega) \subset W^{2\gamma',p}(\Omega).$$

Fie $X = L^p(\Omega)$ şi problema parabolică cu dată iniţială nulă:

$$y' + Ay = f, y(0) = 0,\ t \in (0, T), \tag{0.72}$$

cu A realizarea în L^p a operatorului L cu condiţii Dirichlet omogene. Se cunoaşte că $D(A) = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Soluţia *mild* e dată de formula

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds. \tag{0.73}$$

Scopul în continuare este de a obţine regularitate pentru soluţie în $L^r(D(A^\gamma))$ iar apoi, folosind relaţiile dintre $D(A^\gamma)$, spaţiile de potenţial Bessel şi spaţiile Sobolev-Slobodeckii, în spaţii de tip $L^r(H^{s,p}(\Omega))$ şi $L^r(W^{s,p}(\Omega))$, pentru $s > 0, r > 1$ potriviţi.

Propoziţia 6.2. *Fie $q, p \in (1, \infty)$ şi $f \in L^q(L^p(\Omega))$. Pentru $r \in (q, \infty]$ şi $\theta = 2 + \frac{2}{r} - \frac{2}{q}$, soluţia mild y a (0.72), dată prin (0.73), satisface estimarea de regularitate:*

$$\|y\|_{L^r(H^{\theta,p}(\Omega)))} \leq C\|f\|_{L^q(L^p(\Omega))}, \tag{0.74}$$

unde $C = C(p, q, r)$.

În plus, pentru $r_1 \in (q, \infty)$ dacă $q \geq 2$ şi pentru $r_1 \in \left(q, \frac{2q}{2-q}\right]$ dacă $q \in (1, 2)$, alegând $\tilde{\theta} = 1 + \frac{2}{r_1} - \frac{2}{q}$, derivatele spaţiale de ordinul întâi ale soluţiei mild y satisfac estimarea de regularitate:

$$\|Dy\|_{L^{r_1}(H^{\tilde{\theta},p}(\Omega))} \leq \tilde{C}\|f\|_{L^q(L^p(\Omega))}. \tag{0.75}$$

unde $\tilde{C} = \tilde{C}(p, q, r_1)$.

Corolarul 6.1. *Pentru $r \in (q, \infty)$ şi $\theta = 2 + \frac{2}{r} - \frac{2}{q}$ au loc estimările:*

- *dacă $\theta p \leq n$, alegând $\tilde{p} \leq \frac{np}{n-\theta p}$ dacă $\theta p < n$ şi alegând $\tilde{p} \in [p, \infty)$ dacă $\theta p = n$,*

$$\|y\|_{L^r(L^{\tilde{p}}(\Omega)))} \leq C(p, q, r, \tilde{p})\|f\|_{L^q(L^p(\Omega))};$$

- *dacă $\theta p > n$, atunci $y \in L^r(C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}))$ cu $\alpha \in (0,1], k \in \{0,1\}$, $k + \alpha = \theta - \frac{n}{p}$ şi*

$$\|y\|_{L^r(C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}))} \leq C(p,q,r,\tilde{p})\|f\|_{L^q(L^p(\Omega))}.$$

Mai mult, pentru $r_1 \in (q,\infty)$ dacă $q \geq 2$ şi $r_1 \in (q, \frac{2q}{2-q}]$ dacă $q \in (1,2)$, notând cu $\tilde{\theta} = 1 + \frac{2}{r_1} - \frac{2}{q}$ are loc estimarea pentru gradientul soluţiei:

- *dacă $\tilde{\theta}p \leq n$, atunci alegând $\tilde{p}_1 \leq \frac{np}{n-\tilde{\theta}p}$ când $\tilde{\theta}p < n$ şi $\tilde{p}_1 \in [p,\infty)$ când $\tilde{\theta}p = n$,*

$$\|Dy\|_{L^{r_1}(L^{\tilde{p}_1}(\Omega)))} \leq C(p,q,r_1,\tilde{p}_1)\|f\|_{L^q(L^p(\Omega))};$$

- *dacă $\tilde{\theta}p > n$, atunci $y \in L^{r_1}(C^{\alpha_1}(\overline{\Omega}))$ cu $\alpha_1 \in (0,1)$, $\alpha_1 = \tilde{\theta} - \frac{n}{p}$ şi*

$$\|Dy\|_{L^{r_1}(C^{\alpha_1}(\Omega)))} \leq C(p,q,r_1,\tilde{p})\|f\|_{L^q(L^p(\Omega))}.$$

În ce priveşte scufundările de tip Sobolev pentru spaţiul $W^{2,1}_{p,q}(Q)$, are loc:

Teorema 6.8. *Fie $u \in W^{2,1}_{p,q}(Q)$, $p,q \in (1,\infty)$.*

Atunci $u \in Z_1$, unde

$$Z_1 = \begin{cases} L^r(L^{\tilde{p}}(\Omega)),\ r \in [q,\infty], \tilde{p} \leq \frac{np}{n-(2+\frac{2}{r}-\frac{2}{q})p}, & \text{dacă } (2+\frac{2}{r}-\frac{2}{q})p < n, \\ L^r(L^{\tilde{p}}(\Omega)),\ r \in [q,\infty], \tilde{p} \in [p,\infty), & \text{dacă } (2+\frac{2}{r}-\frac{2}{q})p = n, \\ L^r(C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})),\ \alpha \in (0,1], k \in \{0,1\}, & k+\alpha = 2+\frac{2}{r}-\frac{2}{q}-\frac{n}{p}, \\ & \text{dacă } (2+\frac{2}{r}-\frac{2}{q})p > n \end{cases}$$

şi există $C = C(p,q,r,\tilde{p})$, respectiv $C = C(p,q,r)$ în cazul al treilea, astfel încât

$$\|u\|_{Z_1} \leq C\|u\|_{W^{2,1}_{p,q}(Q)}.$$

Mai mult, $Du \in Z_2$ unde

$$Z_2 = \begin{cases} L^{r_1}(L^{\tilde{p}_1}(\Omega)),\ r_1 \in [q,\infty], \tilde{p}_1 \leq \frac{np}{n-(1+\frac{2}{r_1}-\frac{2}{q})p},\ \text{dacă } (1+\frac{2}{r_1}-\frac{2}{q})p < n, \\ L^{r_1}(L^{\tilde{p}_1}(\Omega)),\ r_1 \in [q,\infty], \tilde{p}_1 \in [p,\infty),\ \text{dacă } (1+\frac{2}{r_1}-\frac{2}{q})p = n, \\ L^{r_1}(C^{\alpha}(\overline{\Omega})),\ \alpha \in (0,1], \alpha = 1+\frac{2}{r_1}-\frac{2}{q}-\frac{n}{p}\ \text{dacă } (1+\frac{2}{r_1}-\frac{2}{q})p > n \end{cases}$$

şi există $C = C(p,q,r_1,\tilde{p}_1)$, respectiv $C = C(p,q,r_1)$ în cazul al treilea, astfel încât

$$\|Du\|_{Z_2} \le C\|u\|_{W^{2,1}_{p,q}(Q)}.$$

TEOREMA 6.9. *Pentru $p,q \in (1,\infty)$, fie $\gamma \in (0, \frac{q-1}{q})$ cu $2\gamma - \frac{n}{p} > 0$ neîntreg. Atunci spaţiul $W^{2,1}_{p,q}(Q)$ este continuu scufundat în $C^{\frac{q-1}{q}-\gamma}(C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}))$, unde $k \in \{0,1\}$, $\alpha \in (0,1)$, $k+\alpha = 2\gamma - \frac{n}{p}$.*

Se poate folosi cu uşurinţă Teorema 6.8 pentru a obţine inegalităţi de interpolare de tip Gagliardo-Nirenberg între spaţii $W^{2,1}_{p,q}(Q)$ şi $L^\sigma(L^\tau(\Omega))$, cu $p,q,\sigma,\tau \in (1,\infty)$. Dacă $W^{2,1}_{p,q}(Q) \subset L^r(L^{\tilde{p}})(\Omega)$ cu incluziune continuă şi $u \in W^{2,1}_{p,q}(Q) \cap L^\sigma(L^\tau(\Omega))$, atunci $u \in [L^r(L^{\tilde{p}}(\Omega)), L^\sigma(L^\tau(\Omega))]_\theta$, $\theta \in (0,1)$ şi

$$\|u\|_{L^{\sigma_\theta}(L^{\tau_\theta}(\Omega))} \le C(\theta,p,q,\sigma,\tau)\|u\|^{1-\theta}_{W^{2,1}_{p,q}(Q)}\|u\|^{\theta}_{L^\sigma(L^\tau(\Omega))},$$

unde $\frac{1}{\sigma_\theta} = \frac{\theta}{\sigma} + \frac{1-\theta}{r}$ iar $\frac{1}{\tau_\theta} = \frac{\theta}{\tau} + \frac{1-\theta}{\tilde{p}}$.

Fie $\omega \subset\subset \Omega$. Se poate construi (v. [57]) o funcţie auxiliară ψ cu proprietăţile:

$$\psi_0 \in C^2(\overline{\Omega}),\ 0 < \psi_0 \text{ în } \Omega, \quad \psi_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad \{x \in \overline{\Omega} : |\nabla\psi_0(x)| = 0\} \subset\subset \omega.$$

Se notează cu

$$\psi := \psi_0 + K, \tag{0.76}$$

unde $K > 0$ este o constantă pozitivă fixată astfel încât $\frac{\sup\psi}{\inf\psi} < \delta$ suficient de mic de mic (v. [55]). De asemenea, se introduc funcţiile auxiliare pondere: pentru $s,\lambda > 0$,

$$\varphi(t,x) := \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{t(T-t)}, \quad \alpha(t,x) := \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{1.5\lambda\|\psi\|_{C(\overline{\Omega})}}}{t(T-t)}. \tag{0.77}$$

TEOREMA 6.10. *Fie $f \in L^q(L^p(\Omega)), p,q \in [2,\infty)$ şi $k_0 \in \mathbb{R}$. Atunci există $m = m(q,p) \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 = \lambda_0(p,q,k_0)$, $s_0 = s_0(p,q,k_0)$ şi $C = C(p,q,k_0) >$*

0 *astfel încât pentru orice* $\lambda \geq \lambda_0, s \geq s_0$ *are loc inegalitatea:*
(0.78)

$$\begin{aligned}
&\|\varphi^{k_0-2m} y e^{s\alpha}\|_{L^q(L^p(\Omega))} + s^{-1}\lambda^{-1}\|\varphi^{k_0-2m-1} D y e^{s\alpha}\|_{L^q(L^p(\Omega))}\\
\leq & C[s^{2m}\lambda^{2m}\|\varphi^{k_0+1} y e^{s\alpha}\|_{L^2(Q_\omega)} + s^{2m-\frac{3}{2}}\lambda^{2m-2}\|\varphi^{k_0-\frac{1}{2}} f e^{s\alpha}\|_{L^q(L^p(\Omega))}]\\
\leq & C[s^{2m}\lambda^{2m}\|\varphi^{k_0+1} y e^{s\alpha}\|_{L^q(L^p(\omega))} + s^{2m-\frac{3}{2}}\lambda^{2m-2}\|\varphi^{k_0-\frac{1}{2}} f e^{s\alpha}\|_{L^q(L^p(\Omega))}].
\end{aligned}$$

Articole publicate sau în curs de publicare:

- Cătălin-George Lefter, Elena-Alexandra Melnig, *Feedback stabilization with one simultaneous control for systems of parabolic equations*, Mathematical Control and Related Fields, September 2018, 8(3& 4): 777-787. doi: 10.3934/mcrf.2018034;

- Cătălin-George Lefter, Elena-Alexandra Melnig, *On the parabolic regularity, Sobolev embeddings and global Carleman estimates in* $L^q(L^p)$ *spaces*, Pure and Applied Functional Analysis, to appear;

- Elena-Alexandra Melnig, *Stability in* L^q*-norm for inverse source parabolic problems*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, doi: 10.1515/jiip-2019-0081;

- Elena-Alexandra Melnig, *Stability in inverse source problems for nonlinear reaction-diffusion systems*, submitted for publication in Nonlinear Differential Equations and Applications;

- Elena-Alexandra Melnig, *Internal feedback stabilization for parabolic systems coupled in zero or first order terms*, Evolution Equations and Control Theory, to appear, doi: 10.3934/eect.2020069.

- Cătălin-George Lefter, Elena-Alexandra Melnig, *Internal controllability of parabolic systems with star and tree like couplings*, submitted to Applied Mathematics and Optimization.

Bibliografie

[1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.

[2] Bedr'Eddine Ainseba and Sebastian Aniţa. Internal exact controllability of the linear population dynamics with diffusion. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 112, 11, 2004.

[3] Herbert Amann. Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 65(2):432–467, 1978.

[4] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and M. González-Burgos. A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems. *Differ. Equ. Appl.*, 1(3):427–457, 2009.

[5] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix, and I. Kostin. Controllability to the trajectories of phase-field models by one control force. *SIAM J. Control Optim.*, 42(5):1661–1680, 2003.

[6] Farid Ammar-Khodja, Assia Benabdallah, Cédric Dupaix, and Manuel González-Burgos. A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parbolic systems. *J. Evol. Equ.*, 9(2):267–291, 2009.

[7] Sebastian Aniţa. *Analysis and control of age-dependent population dynamics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[8] Bianca-Elena Aramă. The cost of approximate controllability and a unique continuation result at initial time for the Ginzburg-Landau equation. *Appl. Anal.*, 96(15):2619–2634, 2017.

[9] N. Aronszajn and K. T. Smith. Theory of Bessel potentials. I. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 11:385–475, 1961.

[10] Hajer Bahouri, Jean-Yves Chemin, and Raphaël Danchin. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, volume 343 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2011.

[11] V. Barbu. Exact controllability of the superlinear heat equation. *Appl. Math. Optim.*, 42(1):73–89, 2000.

[12] V. Barbu and G. Wang. Internal stabilization of semilinear parabolic systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 285(2):387–407, 2003.

[13] Viorel Barbu. *Analysis and control of nonlinear infinite-dimensional systems*, volume 190 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993.

[14] Viorel Barbu. *Partial differential equations and boundary value problems*, volume 441 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998. Translated and revised from the 1993 Romanian original by the author.

[15] Viorel Barbu. Controllability of parabolic and Navier-Stokes equations. *Sci. Math. Jpn.*, 56(1):143–211, 2002.

[16] Viorel Barbu. The Carleman inequality for linear parabolic equations in L^q norm. *Differential Integral Equations*, 15(5):513–525, 2002.

[17] Viorel Barbu. *Differential equations*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, Cham, 2016. Translated from the 1985 Romanian original by Liviu Nicolaescu.

[18] Viorel Barbu. *Controllability and stabilization of parabolic equations*, volume 90 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser/Springer, Cham, 2018. Subseries in Control.

[19] Viorel Barbu, Teodor Havârneanu, Cătălin Popa, and S. S. Sritharan. Exact controllability for the magnetohydrodynamic equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56(6):732–783, 2003.

[20] Viorel Barbu, Teodor Havârneanu, Cătălin Popa, and S. S. Sritharan. Local exact controllability for the magnetohydrodynamic equations revisited. *Adv. Differential Equations*, 10(5):481–504, 2005.

[21] Viorel Barbu, Irena Lasiecka, and Roberto Triggiani. Abstract settings for tangential boundary stabilization of Navier-Stokes equations by high- and low-gain feedback controllers. *Nonlinear Anal.*, 64(12):2704–2746, 2006.

[22] Viorel Barbu, Irena Lasiecka, and Roberto Triggiani. Tangential boundary stabilization of Navier-Stokes equations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 181(852):x+128, 2006.

[23] Viorel Barbu, Irena Lasiecka, and Roberto Triggiani. Local exponential stabilization strategies of the Navier-Stokes equations, $d = 2, 3$, via feedback stabilization of its linearization. In *Control of coupled partial differential equations*, volume 155 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 13–46. Birkhäuser, Basel, 2007.

[24] Viorel Barbu and Cătălin Lefter. Optimal control of ordinary differential equations. In *Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. II*, pages 1–75. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

[25] Viorel Barbu and Teodor Precupanu. *Convexity and optimization in Banach spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, fourth edition, 2012.

[26] Viorel Barbu, Sérgio S. Rodrigues, and Armen Shirikyan. Internal exponential stabilization to a nonstationary solution for 3D Navier-Stokes equations. *SIAM J. Control Optim.*, 49(4):1454–1478, 2011.

[27] Viorel Barbu and Roberto Triggiani. Internal stabilization of Navier-Stokes equations with finite-dimensional controllers. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(5):1443–1494, 2004.

[28] Viorel Barbu and G. Wang. Feedback stabilization of periodic solutions to nonlinear parabolic-like evolution systems. *Indiana Univ. Math. J.*, 54(6):1521–1546, 2005.

[29] A. Benedek, A.-P. Calderón, and R. Panzone. Convolution operators on Banach space valued functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 48:356–365, 1962.

[30] Alain Bensoussan, Giuseppe Da Prato, Michel C. Delfour, and Sanjoy K. Mitter. *Representation and control of infinite-dimensional systems. Vol. 1*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[31] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[32] Haïm Brezis and Petru Mironescu. Gagliardo-Nirenberg, composition and products in fractional Sobolev spaces. *J. Evol. Equ.*, 1(4):387–404, 2001. Dedicated to the memory of Tosio Kato.

[33] Haïm Brezis and Petru Mironescu. Gagliardo-Nirenberg inequalities and non-inequalities: the full story. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 35(5):1355–1376, 2018.

[34] Ovidiu Cârjă, Mihai Necula, and Ioan I. Vrabie. *Viability, invariance and applications*, volume 207 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2007.

[35] Thierry Cazenave and Alain Haraux. *An introduction to semilinear evolution equations*, volume 13 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. Translated from the 1990 French original by Yvan Martel and revised by the authors.

[36] Mourad Choulli. *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques*, volume 65 of *Mathématiques & Applications (Berlin)*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[37] Ronald R. Coifman and Guido Weiss. *Transference methods in analysis*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 31.

[38] Jean-Michel Coron. Controllability and nonlinearity. *ESAIM, Proc.*, 22:21–39, 2008.

[39] Jean-Michel Coron, Sergio Guerrero, and Lionel Rosier. Null controllability of a parabolic system with a cubic coupling term. *SIAM J. Control Optim.*, 48(8):5629–5653, 2010.

[40] Jean-Michel Coron and Jean-Philippe Guilleron. Control of three heat equations coupled with two cubic nonlinearities. *SIAM J. Control Optim.*, 55(2):989–1019, 2017.

[41] Robert Denk, Giovanni Dore, Matthias Hieber, Jan Prüss, and Alberto Venni. New thoughts on old results of R. T. Seeley. *Math. Ann.*, 328(4):545–583, 2004.

[42] L. Desvillettes, Th. Lepoutre, and A. Moussa. Entropy, duality, and cross diffusion. *SIAM J. Math. Anal.*, 46(1):820–853, 2014.

[43] Laurent Desvillettes and Klemens Fellner. Exponential decay toward equilibrium via entropy methods for reaction-diffusion equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 319(1):157–176, 2006.

[44] Laurent Desvillettes and Klemens Fellner. Entropy methods for reaction-diffusion equations: slowly growing a-priori bounds. *Rev. Mat. Iberoam.*, 24(2):407–431, 2008.

[45] Laurent Desvillettes, Klemens Fellner, and Bao Quoc Tang. Trend to equilibrium for reaction-diffusion systems arising from complex balanced chemical reaction networks. *SIAM J. Math. Anal.*, 49(4):2666–2709, 2017.

[46] Gabriella Di Blasio. Linear parabolic evolution equations in L^p-spaces. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 138:55–104, 1984.

[47] Gabriella Di Blasio. Sobolev regularity for solutions of parabolic equations by extrapolation methods. *Adv. Differential Equations*, 6(4):481–512, 2001.

[48] Gabriella Di Blasio. Maximal L^p regularity for nonautonomous parabolic equations in extrapolation spaces. *J. Evol. Equ.*, 6(2):229–245, 2006.

[49] A. Doubova, E. Fernández-Cara, M. González-Burgos, and E. Zuazua. On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient. *SIAM J. Control Optim.*, 41(3):798–819, 2002.

[50] Michel Duprez and Pierre Lissy. Positive and negative results on the internal controllability of parabolic equations coupled by zero- and first-order terms. *J. Evol. Equ.*, 18(2):659–680, 2018.

[51] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations. 2nd ed.*, volume 19. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2nd ed. edition, 2010.

[52] Lawrence Christopher Evans. A strong maximum principle for parabolic systems in a convex set with arbitrary boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(9):3179–3185, 2010.

[53] Enrique Fernández-Cara, Manuel González-Burgos, Sergio Guerrero, and Jean-Pierre Puel. Null controllability of the heat equation with boundary fourier conditions : the linear case. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 12(3):442–465, 2006.

[54] Enrique Fernández-Cara and Enrique Zuazua. Controllability for blowing up semilinear parabolic equations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(3):199–204, 2000.

[55] Enrique Fernández-Cara and Enrique Zuazua. The cost of approximate controllability for heat equations: The linear case. *Adv. Differ. Equ.*, 5(4-6):465–514, 2000.

[56] Avner Friedman. *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[57] A.V. Fursikov and O.Yu. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations.* Seoul: Seoul National Univ., 1996.

[58] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[59] Manuel González-Burgos and Luz de Teresa. Controllability results for cascade systems of m coupled parabolic PDEs by one control force. *Port. Math.*, 67(1):91–113, 2010.

[60] Teodor Havârneanu, Cătălin Popa, and S. S. Sritharan. Exact internal controllability for the two-dimensional magnetohydrodynamic equations. *SIAM J. Control Optim.*, 46(5):1802–1830, 2007.

[61] Oleg Yu Imanuvilov and Masahiro Yamamoto. Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate. *Inverse Probl.*, 14(5):1229–1245, 1998.

[62] Victor Isakov. *Inverse problems for partial differential equations. 3rd edition.* Cham: Springer, 3rd edition edition, 2017.

[63] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.

[64] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Uralceva. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[65] Kévin Le Balc'h. Controllability of a 4×4 quadratic reaction-diffusion system. *J. Differential Equations*, 266(6):3100–3188, 2019.

[66] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, 20(1-2):335–356, 1995.

[67] C.-G. Lefter. Feedback stabilization of 2D Navier-Stokes equations with Navier slip boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, 70(1):553–562, 2009.

[68] C.-G. Lefter. Feedback stabilization of magnetohydrodynamic equations. *SIAM J. Control Optim.*, 49(3):963–983, 2011.

[69] C.-G. Lefter. Internal feedback stabilization of nonstationary solutions to semilinear parabolic systems. *J. Optim. Theory Appl.*, 170(3):960–976, 2016.

[70] C.-G. Lefter and A. Lorenzi. Approximate controllability for an integro-differential control problem. *Appl. Anal.*, 91(8):1529–1549, 2012.

[71] C.-G. Lefter and E.-A. Melnig. Feedback stabilization with one simultaneous control for systems of parabolic equations. *Math. Control Relat. Fields*, 8(3-4):777–787, 2018.

[72] C.-G. Lefter and E.-A. Melnig. Internal controllability of parabolic systems with star and tree like couplings. *Submitted*, 2020.

[73] C.-G. Lefter and E.-A. Melnig. On the parabolic regularity, sobolev embeddings and global carleman estimates in $L^q(L^p)$ spaces. *Pure Appl. Funct. Anal.*, to appear, 2020.

[74] J.-L. Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 2*, volume 9 of *Recherches en Mathématiques Appliquées*. Masson, Paris, 1988. Perturbations.

[75] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1.* Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.

[76] Pierre Lissy and Enrique Zuazua. Internal observability for coupled systems of linear partial differential equations. *SIAM J. Control Optim.*, 57(2):832–853, 2019.

[77] Alessandra Lunardi. *Interpolation theory*, volume 16 of *Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie)*. Edizioni della Normale, Pisa, 2018. Third edition [of MR2523200].

[78] Robert H. Martin, Jr. A maximum principle for semilinear parabolic systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 74(1):66–70, 1979.

[79] Celso Martínez Carracedo and Miguel Sanz Alix. *The theory of fractional powers of operators*, volume 187 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001.
[80] E.-A. Melnig. Stability in inverse source problems for nonlinear reaction-diffusion systems. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, submitted, 2019.
[81] E.-A. Melnig. Internal feedback stabilization for parabolic systems coupled in zero or first order terms. *Evol. Equ. Control Theory*, to appear, 2020.
[82] E.-A. Melnig. Stability in L^q norm for inverse source parabolic problems. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, to appear, 2020.
[83] Mihai Necula and Ioan I. Vrabie. A viability result for a class of fully nonlinear reaction-diffusion systems. *Nonlinear Anal.*, 69(5-6):1732–1743, 2008.
[84] Jindřich Nečas. *Direct methods in the theory of elliptic equations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2012. Translated from the 1967 French original by Gerard Tronel and Alois Kufner, Editorial coordination and preface by Šárka Nečasová and a contribution by Christian G. Simader.
[85] Guillaume Olive. Null-controllability for some linear parabolic systems with controls acting on different parts of the domain and its boundary. *Math. Control Signals Systems*, 23(4):257–280, 2012.
[86] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
[87] Murray H. Protter and Hans F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1984. Corrected reprint of the 1967 original.
[88] Jan Prüss and Hermann Sohr. Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p-spaces. *Hiroshima Math. J.*, 23(1):161–192, 1993.
[89] Patrick J. Rabier. Vector-valued Morrey's embedding theorem and Hölder continuity in parabolic problems. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 10, 10, 2011.
[90] David L. Russell. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in Appl. Math.*, 52:189–211, 1973.
[91] Jean-Claude Saut and Bruno Scheurer. Unique continuation for some evolution equations. *J. Differential Equations*, 66(1):118–139, 1987.
[92] H. H. Schaefer and M. P. Wolff. *Topological vector spaces*, volume 3 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1999.
[93] R. Seeley. The resolvent of an elliptic boundary problem. *Amer. J. Math.*, 91:889–920, 1969.
[94] R. Seeley. Interpolation in L^p with boundary conditions. *Studia Math.*, 44:47–60, 1972.
[95] R. T. Seeley. Complex powers of an elliptic operator. In *Singular Integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill., 1966)*, pages 288–307. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.
[96] Robert Seeley. Norms and domains of the complex powers $A_B z$. *Amer. J. Math.*, 93:299–309, 1971.

[97] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[98] Hans Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, volume 18 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[99] Marius Tucsnak and George Weiss. *Observation and control for operator semigroups.* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[100] Wolf von Wahl. The equation $u' + A(t)u = f$ in a Hilbert space and L^p-estimates for parabolic equations. *J. London Math. Soc. (2)*, 25(3):483–497, 1982.

[101] Ioan I. Vrabie. *C_0-semigroups and applications*, volume 191 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2003.

[102] Peter Weidemaier. Existence results in L_p-L_q spaces for second order parabolic equations with inhomogeneous Dirichlet boundary conditions. In *Progress in partial differential equations, Vol. 2 (Pont-à-Mousson, 1997)*, volume 384 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 189–200. Longman, Harlow, 1998.

[103] Peter Weidemaier. Maximal regularity for parabolic equations with inhomogeneous boundary conditions in Sobolev spaces with mixed L_p-norm. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 8:47–51, 2002.

[104] Hans F. Weinberger. Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems. *Rend. Mat. (6)*, 8:295–310, 1975. Collection of articles dedicated to Mauro Picone on the occasion of his ninetieth birthday.

[105] Oleg Yu. Imanuvilov and Masahiro Yamamoto. Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 39, 09 2003.