

UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA”, IAȘI

FACULTATEA DE MATEMATICĂ



MODELAREA DINAMICII ȘI ANALIZA STABILITĂȚII CORPURILOR CEREȘTI

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător științific:

Prof. Dr. CĂTĂLIN GALEȘ

Doctorand:

GABRIELA-ANA NADABAICĂ

CĂS. AZANFIREI

Ianuarie 2026

Iași

Cuprins

1	Preliminarii	2
2	Modelarea dinamicii în jurul corpurilor nesferice	3
3	Efectele seculare și lung periodice	10
4	Analiza stabilității orbitale	19
5	Studiu de caz	30
6	Concluzii și perspective	40
	Bibliografie	42

Lista publicațiilor științifice

1. Nadabaică G.: 2024, *On the long-term orbital evolution of a satellite revolving around an oblate body*, **Cambridge University Press**, DOI: 10.1017/S1743921323003915, 159–164.
2. Nadabaică G.: 2025, *Secular dynamics around asteroids with joint effects of oblateness and third body perturbations*, **Romanian Astronomical Journal**, DOI: 10.59277/RoAJ.2025.1-2.03, **35**, 37–57, Factor de Impact 0.8.
3. Galeș C., Apetrii M. & Nadabaică G.: 2025, *Modeling the resonant dynamics of infinitesimal particles orbiting non-spherical rotating bodies*, **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, DOI: 10.1007/s10569-025-10258-y, **137** (28), Factor de Impact 1.4.

1 Preliminarii

Motivația acestei lucrări derivă atât din nevoia de a dezvolta modele dinamice pentru studiul orbitelor în jurul corpurilor având forme neregulate, cât și din utilitatea practică a acestor modele în proiectarea misiunilor spațiale viitoare. Multe dintre obiectele studiate nu posedă un mediu gravitațional cunoscut a priori, în consecință, simulările numerice și abordările analitice devin instrumente indispensabile în evaluarea riscurilor, stabilității și fezabilității unor traiectorii orbitale sigure.

Lucrarea de față se înscrie astfel în efortul internațional de a caracteriza din punct de vedere dinamic spațiul din jurul corpurilor mici ale Sistemului Solar, cu implicații directe asupra siguranței și eficienței explorării automate sau umane a acestor regiuni spațiale.

Tema de cercetare vizează două obiective esențiale, și anume: *modelarea dinamicii și analiza stabilității*.

Modelarea dinamicii este un proces matematic complex, prin intermediul căruia are loc definirea unor modele utilizând ecuații diferențiale care iau în considerare efectele perturbatoare, precum nesfericitatea asteroidului, rotația sa, atracția solară și presiunea radiației solare. În prezenta lucrare, modelarea dinamicii are la bază mai multe concepte cheie, și anume: abordarea carteziană, formalismul hamiltonian, utilizarea elementelor Milankovitch, dar și implementarea unor propagatoare numerice, indicatori de haos, programe de calcul ce permit studiul modelelor (vezi Scheeres (2012); Celletti (2010)).

Cel de-al doilea obiectiv menționat mai sus, respectiv analiza stabilității, implică concepte și procedee de bază în mecanica cerească și sistemele dinamice, precum determinarea tipurilor de rezonanțe, locația acestora, efectele induse pe termen mediu și lung, reducerea modelelor generale la modele simplificate (de exemplu, la un pendul matematic perturbat), care caracterizează cu o suficient de bună acuratețe evoluția elementelor orbitale. Procedee matematice la fel de importante folosite în această lucrare sunt determinarea punctelor de echilibru, a curbilor separatoare, caracterizarea tipurilor de mișcări (oscilatorii, circulatorii sau haotice), dar și studiul analitic (dublat printr-un studiu numeric) a evoluției planelor orbitale.

2 Modelarea dinamicii în jurul corpurilor nesferice

Este propus un model general care descrie mișcarea unei particule infinitezimale, notată cu P , a cărei masă este neglijabilă în comparație cu masa oricărui alt obiect din sistem, aflată pe o orbită în jurul unui corp nesferic (un asteroid sau o cometă). Se presupune că obiectul nesferic, notat cu A , se mișcă în jurul Soarelui pe o orbită kepleriană și se rotește uniform în jurul unei axe fixe, aliniată cu axa corpului (adică axa principală cu cel mai mare moment de inerție). Particula P este supusă atracției gravitaționale a corpului A , atracției gravitaționale a Soarelui și presiunii radiației solare.

Axa de rotație a corpului A rămâne fixă în timpul mișcării orbitale. Aceasta intersectează sfera cerească în două puncte, numite polul pozitiv și, respectiv, polul negativ. Notăm prin P_A polul pozitiv. Atunci, în coordonate ecliptice, poziția lui P_A este dată de (λ, β) , considerate cunoscute în acest studiu, unde $\lambda \in [0^\circ, 360^\circ)$ este longitudinea ecliptică și $\beta \in [-90^\circ, 90^\circ]$ este latitudinea ecliptică (vezi Cunningham (1985)).

Conform ipotezelor de mai sus, λ și β nu variază în timp, iar planul ecuatorial al corpului nesferic A nu își schimbă poziția față de planul ecliptic. Din acest motiv, mișcarea corpului infinitezimal P este raportată la sistemul cvasi-inerțial $\mathbf{R}_A^e = \{A; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, unde \mathbf{e}_3 este vectorul unitar al dreptei care unește centrul de masă al lui A cu polul pozitiv al corpului nesferic A , $\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{i}_3}{|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{i}_3|}$, iar $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$.

În final, se introduce un sistem de referință sinodic $\mathbf{R}_A^f = \{A; \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, centrat în centrul de masă al corpului nesferic A , unde $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3$, iar \mathbf{f}_1 și \mathbf{f}_2 se rotesc cu aceeași viteză unghiulară ca și corpul A . Notăm cu θ unghiul de rotație, și anume unghiul dintre \mathbf{e}_1 și \mathbf{f}_1 . Deoarece corpul A se rotește uniform în jurul axei sale, unghiul θ variază liniar în timp. Presupunem că $\dot{\theta}$ și θ_0 , unde $\theta_0 = \theta(t_0)$ la un moment dat t_0 , sunt cunoscute.

Fie \mathbf{r} vectorul de poziție al particulei infinitezimale P cu coordonatele (x, y, z) în sistemul cvasi-inerțial \mathbf{R}_A^e și (X, Y, Z) în sistemul sinodic \mathbf{R}_A^f :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = X\mathbf{f}_1 + Y\mathbf{f}_2 + Z\mathbf{f}_3 .$$

În sistemul de referință centrat în asteroid, \mathbf{R}_A^e , mișcarea particulei P este descrisă de ecuația:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathcal{G} \int_{V_A} \rho(\mathbf{r}_M) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|^3} dV_A - \mathcal{G}m_S \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|^3} + \frac{\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|^3} \right) + C_r \frac{\mathcal{A}}{m} \mathcal{P}_\odot a_\odot^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|^3} , \quad (1)$$

unde \mathcal{G} reprezintă constanta gravitațională, $\rho(\mathbf{r}_M)$ este densitatea într-un punct $M(\mathbf{r}_M)$

din volumul V_A al asteroidului, m_S este masa Soarelui, \mathbf{r}_S este vectorul de poziție al Soarelui față de centrul asteroidului A , $r_S = |\mathbf{r}_S|$, C_r este coeficientul de reflexivitate adimensional (fixat la 1 în această lucrare), depinzând de proprietățile optice ale suprafeței particulei infinitezimale, $\mathcal{P}_\odot = 4.56 \cdot 10^{-3} [\frac{kg}{km^2 s^2}]$ este presiunea radiației pentru un obiect situat la $a_\odot = 1 [AU]$ față de Soare și \mathcal{A}/m este raportul arie pe masă, unde \mathcal{A} este secțiunea transversală a particulei P și m masa acesteia.

Relația (1) poate fi rescrisă sub forma:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -R_3(\theta) \nabla_F V(\mathbf{r}) + Gm_S \nabla_I \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|^3} \right) - C_r \frac{\mathcal{A}}{m} \mathcal{P}_\odot a_\odot^2 \nabla_I \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|} \right), \quad (2)$$

unde notăm prin ∇_F și ∇_I gradientul în reperele sinodic și cvasi-inerțial, iar potențialul gravitațional datorat corpului nesferic este dat sub forma:

$$V(\mathbf{r}) = -\mathcal{G} \int_{V_A} \frac{\rho(\mathbf{r}_M)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|} dV_A. \quad (3)$$

În prezenta lucrare, accentul se pune pe stabilitatea orbitală pe termen mediu (și lung) în jurul unui corp nesferic A , adică pe scări de timp mult mai mari decât perioada de rotație a corpului A . În plus, se presupune că orbitele studiate sunt situate în afara sferei Brillouin a corpului A . În acest context, abordarea folosind funcții armonice sferice oferă rezultate precise, cu condiția ca dezvoltarea potențialului gravitațional V să fie luată până la un grad și un ordin suficient de mari.

Potențialul gravitațional V poate fi dezvoltat în serie de funcții armonice sferice după cum urmează (vezi Kaula (1961, 1966)):

$$V(r, \phi, \chi) = -\frac{\mathcal{G}m_A}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_A}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos m\chi + S_{nm} \sin m\chi), \quad (4)$$

unde mărimile P_{nm} sunt polinoamele Legendre asociate.

Deoarece potențialul V este dezvoltat în serii de puteri ale raportului R_A/r , mărimea termenilor armonici scade odată cu creșterea gradului n și a distanței r față de asteroid. În cadrul acestei lucrări, se presupune a fi cunoscuți coeficienții armonici C_{nm} și S_{nm} , pentru $0 \leq m \leq n \leq n_{max}$ cu $n_{max} = 4$.

Figura 1 prezintă o comparație între intensitatea diferitelor forțe care acționează asupra unei particule P care se rotește în jurul asteroidului (4) Vesta (stânga) și, respectiv, (433) Eros (dreapta). Graficele ilustrează influența următoarelor perturbații:

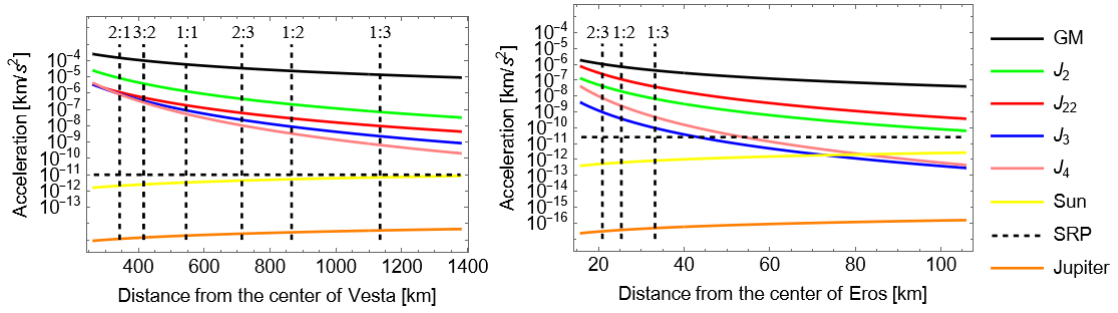


Figura 1: Ordinul de magnitudine al diferitelor tipuri de perturbații ca funcție de distanța față de centrul corpului nesferic A . În stânga este prezentat cazul asteroidului Vesta, în timp ce în dreapta este inclus cazul asteroidului Eros. Curbele colorate indică influența: termenului asociat acțiunii gravitaționale a corpului nesferic (negru), J_2 (verde), J_{22} (roșu), J_3 (albastru), J_4 (roz), atracția Soarelui (galben), a planetei Jupiter (portocaliu) și presiunea radiației solare (SRP) pentru $\mathcal{A}/m = 0.01 [m^2/kg]$ (linia orizontală punctată neagră). Liniile punctate verticale indică locația principalelor rezonanțe teserale.

termenul monopolar al forței gravitaționale exercitate de corpul central (negru), nesfericitatea corpului central A , limitată la coeficienții J_2 (verde), J_{22} (roșu), J_3 (albastru), J_4 (roz), atracția Soarelui (galben), a planetei Jupiter (portocaliu) și presiunea radiației solare (SRP) pentru $\mathcal{A}/m = 0.01 [m^2/kg]$ (linia orizontală punctată neagră). Liniile verticale punctate negre indică poziția principalelor rezonanțe teserale, care vor fi discutate în secțiunile următoare.

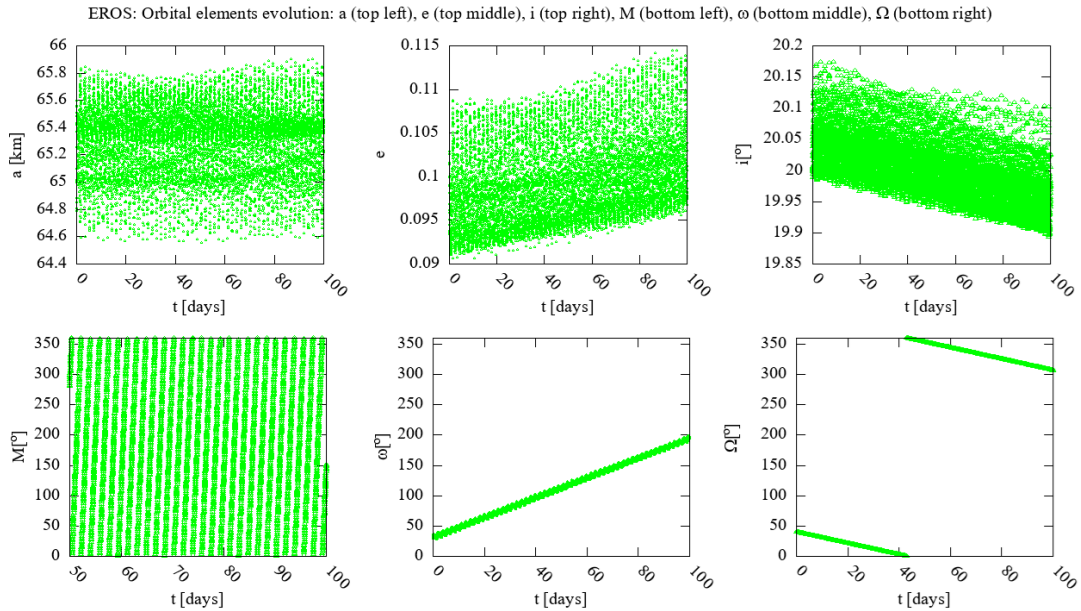


Figura 2: Evoluția elementelor orbitale ale unei orbite din jurul asteroidului Eros, ținând cont de efectele perturbatorii induse de Soare, de presiunea radiației solare pentru $\mathcal{A}/m = 0.001 [m^2/kg]$ și de termenii armonici până la ordinul și gradul $n = m = 4$. Condițiile inițiale sunt $a = 65 \text{ km}$, $e = 0.1$, $i = 20^\circ$, $M = 50^\circ$, $\omega = 30^\circ$, $\Omega = 40^\circ$, iar epoca inițială este J2000.0.

Evident, în vecinătatea corpului A , rolul cel mai important îl joacă termenul asociat forței gravitaționale exercitate de corpul atractor. Apoi, până la o distanță de câteva raze R_A față de sfera Brillouin a corpului A , o influență semnificativă este dată de nesfericitatea corpului A . Atracția Soarelui devine importantă la distanțe din ce în ce mai mari de corpul A . În ceea ce privește efectele lui Jupiter, cu excepția cazurilor în care corpul A întâlnește (sau se apropie de) Jupiter, atracția planetei este neglijabilă și este ignorată în prezenta teză. Fiecare grafic din figura 1, chiar și cel care compară forțele care acționează asupra unui corp alungit precum Eros, arată că, începând de la o anumită distanță de sfera Brillouin a corpului A , toate forțele sunt cu cel puțin un ordin de mărime mai mici decât termenul monopolar al forței gravitaționale exercitate de A . Aceasta înseamnă că, dacă distanța minimă față de sfera Brillouin rămâne suficient de mare în timpul mișcării particulei P în jurul lui A , atunci dinamica poate fi modelată ca o problemă a celor două corpuri perturbată. Efectele nesfericității corpului A , atracția Soarelui și presiunea radiației solare pot fi tratate ca perturbații. Într-adevăr, în cazul asteroidului Eros, nesfericitatea și celelalte două perturbații induc pe termen scurt, mediu și lung variații ale elementelor orbitale, așa cum relevă figura 2.

Trecerea de la formularea carteziană la cea hamiltoniană permite o abordare structurată și analitică a dinamicii orbitale, facilitând studiul comportamentului pe termen lung prin identificarea termenilor seculari și a condițiilor de rezonanță. Această formulare este deosebit de eficientă pentru studiul dinamic al sistemelor perturbate. În particular, metodele mecanicii Hamilton sunt în măsură să abordeze problema stabilității orbitale atunci când perturbațiile sunt datorate nesfericității corpului central și prezenței unui al treilea corp.

Analiza dinamicii orbitale pe termen lung se poate realiza prin identificarea termenilor seculari și rezonanți din dezvoltarea în serii a funcțiilor perturbatoare și prin cuantificarea efectelor pe termen mediu și lung induse de acești termeni. Această abordare facilitează identificarea regiunilor stabile, regiunilor de librație și a regiunilor haotice din spațiul fazelor, precum și a rezonanțelor critice care determină evoluția sistemului (vezi Murray & Dermott (1999)). De asemenea, formalismul hamiltonian oferă o eficiență sporită din punct de vedere computațional, fiind preferat în studiul sistemelor complexe.

Potențialul gravitațional (4) poate fi rescris sub forma:

$$V = -\frac{\mathcal{G}m_A}{r} - \frac{\mathcal{G}m_A}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_A}{a}\right)^n J_{nm} \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) S_{nmpq}(M, \omega, \Omega, \theta). \quad (5)$$

În relația (5), funcțiile F_{nmp} , denumite funcții de înclinație ale lui Kaula și funcțiile G_{npq} , numite funcții de excentricitate (vezi Kaula (1966)), joacă un rol esențial. Aceste funcții descriu dependența potențialului gravitațional de înclinația și excentricitatea orbitei.

A treia funcție care apare în (5) este definită astfel:

$$S_{nmpq} = \begin{cases} C_{nm} \cos \Psi_{nmpq} + S_{nm} \sin \Psi_{nmpq} = -J_{nm} \cos \tilde{\Psi}_{nmpq}, & \text{dacă } n - m \text{ este par,} \\ -S_{nm} \cos \Psi_{nmpq} + C_{nm} \sin \Psi_{nmpq} = -J_{nm} \sin \tilde{\Psi}_{nmpq}, & \text{dacă } n - m \text{ este impar,} \end{cases} \quad (6)$$

unde

$$\Psi_{nmpq} = (n - 2p)\omega + (n - 2p + q)M + m(\Omega - \theta) = \tilde{\Psi}_{nmpq} + m\lambda_{nm} \quad (7)$$

este argumentul funcției trigonometrice.

Deoarece elementele orbitale $\Upsilon = (a, e, i, M, \omega, \Omega)$ nu sunt variabile canonice, este convenabilă introducerea elementelor Delaunay $(L, G, H, M, \omega, \Omega)$, unde acțiunile L, G, H sunt definite prin:

$$L = \sqrt{\mu_A a}, \quad G = L\sqrt{1 - e^2}, \quad H = G \cos i, \quad (8)$$

unde $\mu_A = \mathcal{G}m_A$.

Hamiltonianul corespunzător poate fi scris sub forma

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu_A^2}{2L^2} + \mathcal{H}_A(\Upsilon, \theta) + \mathcal{H}_{Sun}(\Upsilon, \Upsilon_S) + \mathcal{H}_{SRP}(\Upsilon, \Upsilon_S), \quad (9)$$

unde $\Upsilon_S = (a_S^*, e_S^*, i_S^*, M_S^*, \omega_S^*, \Omega_S^*)$ desemnează elementele orbitale ale Soarelui.

Funcțiile $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_{Sun}$ și \mathcal{H}_{SRP} descriu perturbațiile induse de nesfericitatea și rotația corpului A , atracția solară și presiunea radiației solare.

Kaula (vezi Kaula (1961)) a dedus dezvoltarea geopotențialului în funcție de elementele orbitale. Deoarece scenariul prezentat este similar cu cel utilizat pentru caracterizarea dinamicii sateliților Pământului, se utilizează aceeași dezvoltare. Prin urmare, conform Kaula (1961) (vezi și Kaula (1966)), funcția hamiltoniană \mathcal{H}_A poate fi

exprimată sub forma

$$\mathcal{H}_A = -\frac{\mu_A}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_A}{a}\right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) S_{nmpq}(M, \omega, \Omega, \theta). \quad (10)$$

Termenii expresiei (10) se numesc *teserali* când $n \neq m$ și $m \neq 0$, sunt denumiți *sectoriali* când $n = m \neq 0$ și se numesc *zonali* când $n \neq 0$ și $m = 0$.

Introducem următoarea funcție definită pe mulțimea numerelor întregi pozitive și cu valori reale:

$$\mu_{SSRP}(l) = \begin{cases} -C_r \frac{A}{m} \mathcal{P}_{\odot} a_{\odot}^2, & \text{dacă } l = 1, \\ \mathcal{G}m_S - C_r \frac{A}{m} \mathcal{P}_{\odot} a_{\odot}^2, & \text{dacă } l \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}. \end{cases} \quad (11)$$

Pentru a exprima funcția perturbatoare datorată Soarelui și presiunii radiației solare, se poate utiliza dezvoltarea lui Kaula (vezi Kaula (1962)) în elementele orbitale Υ ale particulei infinitezimale și Υ_S ale Soarelui. Funcția are o exprimare după cum urmează:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Sun} + \mathcal{H}_{SRP} = & - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu_{SSRP}(l) \frac{a^l}{(a_S^*)^{l+1}} \epsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\ & \times \mathcal{F}_{lmp}(i, i_S^*) \mathcal{H}_{lpq}(e) \mathcal{G}_{lhj}(e_S^*) \cos(\varphi_{lmpqj}), \end{aligned} \quad (12)$$

unde

$$\mathcal{F}_{lmp}(i, i_S^*) \equiv F_{lmp}(i) F_{lmh}(i_S^*),$$

$$\varphi_{lmpqj} \equiv (l-2p)\omega + (l-2p+q)M - (l-2h)\omega_S^* - (l-2h+j)M_S^* + m(\Omega - \Omega_S^*), \quad (13)$$

iar ϵ_m este definit ca

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & \text{dacă } m = 0, \\ 2, & \text{dacă } m \in \mathbb{Z}^*. \end{cases}$$

Funcțiile $\mathcal{H}_{lpq}(e)$ și $\mathcal{G}_{lhj}(e_S^*)$ corespund coeficienților Hansen $X_{l-2p+q}^{l, l-2p}(e)$ și, respectiv, $X_{l-2h+j}^{-(l+1), l-2h}(e_S^*)$ (vezi Giacaglia (1976)).

Pentru a studia comportamentul pe termen lung al orbitelor îndepărtate, vom utiliza un model dublu-mediat, în care funcțiile perturbatoare sunt mediate atât în raport cu anomalia medie a satelitelui, cât și cu cea a Soarelui. În acest model, perturbațiile

semnificative sunt cele generate de termenul J_2 și de atracția gravitațională a Soarelui. Alegerea elementelor Milankovitch (vezi Milankovitch (1939)) este justificată de faptul că această formulare permite obținerea unor rezultate analitice relevante pentru caracterizarea evoluției elementelor orbitale.

Construcția modelului se bazează pe următoarele considerente. În primul rând, observăm că, prin considerarea exclusivă a perturbațiilor datorate termenului J_2 și atracției Soarelui, ecuația mișcării (1) se simplifică la:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_0}{r^3} \mathbf{r} = \nabla_I U, \quad (14)$$

unde $\mu_0 = \mathcal{G}m_0$, $\mu_S = \mathcal{G}m_S$ și U este funcția perturbatoare dată prin

$$U = -\frac{\mu_0 R_0^2 J_2}{r^3} \left(\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) + \mu_S \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|^2} \right). \quad (15)$$

Deoarece $r \ll r_S$, păstrăm doar termenii până la gradul $l = 2$ în următoarea dezvoltare

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|} = \frac{1}{|\mathbf{r}_S|} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}_S|} \right)^l P_l(\cos \Theta),$$

unde Θ este unghiul dintre \mathbf{r} și \mathbf{r}_S , iar P_l sunt polinoamele Legendre.

Ulterior, aplicând o mediere atât peste anomalia medie a satelitului, cât și peste anomalia medie a Soarelui, deducem că funcția perturbatoare dublu-mediată are următoarea formă (vezi Allan & Cook (1964)): $U = na^2 U^*$, cu

$$U^* = \frac{\omega_0}{(1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_A)^2 - \frac{1}{6} \right) + \omega_1 \left(\frac{1}{2} (1-e^2) (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_S)^2 + e^2 \left(1 - \frac{5}{2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}_S)^2 \right) \right), \quad (16)$$

unde n este viteza unghiulară medie a particulei și $\omega_0 = \frac{3nJ_2R_0^2}{2a^2}$, $\omega_1 = \frac{3\mu_S}{4na^3(1-e_S^2)^{3/2}}$.

În ecuația (16), vectorii unitari \mathbf{R} și \mathbf{P} sunt asociați orbitei particulei. Vectorul \mathbf{R} reprezintă normala pozitivă a planului orbital, iar \mathbf{P} este un vector situat în planul orbital, orientat spre pericentru. Vectorul unitar \mathbf{R}_A este aliniat cu axa de rotație a asteroidului, adică $\mathbf{R}_A = \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3$, iar vectorul unitar \mathbf{R}_S este perpendicular pe planul orbital al Soarelui.

În cele din urmă, considerând elementele vectoriale \mathbf{e} și \mathbf{h} definite de

$$\mathbf{e} = e \mathbf{P}, \quad \mathbf{h} = (1-e^2)^{1/2} \mathbf{R}, \quad (17)$$

evoluția elementelor orbitale este descrisă de ecuațiile (vezi Allan & Cook (1964))

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \times \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{h}} + \mathbf{e} \times \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{e}}, \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \times \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{h}} + \mathbf{h} \times \frac{\partial U^*}{\partial \mathbf{e}}. \quad (18)$$

Funcția perturbatoare U^* poate fi exprimată în termeni ai elementelor vectoriale \mathbf{h} și \mathbf{e} sub forma

$$U^* = \omega_0 \left(\frac{1}{2} (1 - e^2)^{-5/2} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{R}_A)^2 - \frac{1}{6} (1 - e^2)^{-3/2} \right) + \omega_1 \left(\frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{R}_S)^2 + e^2 - \frac{5}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{R}_S)^2 \right). \quad (19)$$

3 Efectele seculare și lung periodice

Vom analiza dinamica seculară și lung periodică indusă de armonicile sferice J_2 , J_3 și J_4 . Deși aceste aspecte sunt suficient de detaliate pentru sateliții Pământului (vezi Kozai (1959)), pentru caracterizarea mișcărilor în medii mult mai perturbate decât spațiul circumterestru, precum cele din jurul asteroizilor, este necesară cel puțin o reevaluare cantitativă a problemei, luând în considerare noile valori ale parametrilor.

Considerând dezvoltarea lui \mathcal{H}_A până la gradul $n = 4$ și realizând o mediere după unghiurile rapide M și θ , deducem că părțile seculare (care depind doar de a , e și i) și cele lung periodice (care depind și de ω) sunt:

$$\overline{\mathcal{H}}_A = \overline{\mathcal{H}}_{J_2} + \overline{\mathcal{H}}_{J_3} + \overline{\mathcal{H}}_{J_4}, \quad (20)$$

unde (conform Roy (2005), Kaula (1966) și Vallado (2007))

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_{J_2} &= \frac{\mu_A R_A^2 J_2}{a^3} \left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) (1 - e^2)^{-3/2}, \\ \overline{\mathcal{H}}_{J_3} &= \frac{2\mu_A R_A^3 J_3}{a^4} \left(\frac{15}{16} \sin^3 i - \frac{3}{4} \sin i \right) e (1 - e^2)^{-5/2} \sin \omega, \\ \overline{\mathcal{H}}_{J_4} &= \frac{\mu_A R_A^4 J_4}{a^5} \left(\left(-\frac{35}{32} \sin^4 i + \frac{15}{16} \sin^2 i \right) \frac{3e^2}{2} (1 - e^2)^{-7/2} \cos 2\omega \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{105}{64} \sin^4 i - \frac{15}{8} \sin^2 i + \frac{3}{8} \right) \left(1 + \frac{3e^2}{2} \right) (1 - e^2)^{-7/2} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Ținând cont de ecuațiile planetare ale lui Lagrange (vezi Kaula (1966)), rezultă că toate elementele orbitale, cu excepția semiaxe mari, variază în timp sub influența funcțiilor perturbatoare $\mathcal{R}_{J_2} \equiv -\overline{\mathcal{H}}_{J_2}$, $\mathcal{R}_{J_3} \equiv -\overline{\mathcal{H}}_{J_3}$ și $\mathcal{R}_{J_4} \equiv -\overline{\mathcal{H}}_{J_4}$. Ecuațiile care descriu variația excentricității, înclinației, anomaliei medii, argumentului periheliului

și longitudinii nodului ascendent au forma:

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \dot{e}_{J_3} + \dot{e}_{J_4}, \\
\frac{di}{dt} &= \dot{i}_{J_3} + \dot{i}_{J_4}, \\
\frac{dM}{dt} &= \frac{\mu_A^{1/2}}{a^{3/2}} + \dot{M}_{J_2} + \dot{M}_{J_3} + \dot{M}_{J_4}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \dot{\omega}_{J_2} + \dot{\omega}_{J_3} + \dot{\omega}_{J_4}, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \dot{\Omega}_{J_2} + \dot{\Omega}_{J_3} + \dot{\Omega}_{J_4},
\end{aligned} \tag{22}$$

unde

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{J_2} &= \frac{3J_2\sqrt{\mu_A}R_A^2(3\cos(2i)+1)}{8a^{7/2}(1-e^2)^{3/2}}, \\
\dot{\omega}_{J_2} &= \frac{3J_2\sqrt{\mu_A}R_A^2(3+5\cos(2i))}{8a^{7/2}(1-e^2)^2}, \\
\dot{\Omega}_{J_2} &= -\frac{3J_2\sqrt{\mu_A}R_A^2\cos(i)}{2a^{7/2}(1-e^2)^2}, \\
\dot{e}_{J_3} &= -\frac{3J_3\sqrt{\mu_A}R_A^3(\sin(i)+5\sin(3i))\cos(\omega)}{32a^{9/2}(e^2-1)^2}, \\
\dot{i}_{J_3} &= -\frac{3eJ_3\sqrt{\mu_A}R_A^3\cos(i)(5\cos(2i)+3)\cos(\omega)}{16a^{9/2}(e^2-1)^3}, \\
\dot{M}_{J_3} &= \frac{3(4e^2-1)J_3\sqrt{\mu_A}R_A^3(\sin(i)+5\sin(3i))\sin(\omega)}{32a^{9/2}e(1-e^2)^{5/2}}, \\
\dot{\omega}_{J_3} &= \frac{3J_3\sqrt{\mu}R_A^3\csc(i)\sin(\omega)\left(5(7e^2+1)\cos(4i)-3e^2-4\cos(2i)-1\right)}{64a^{9/2}e(e^2-1)^3}, \\
\dot{\Omega}_{J_3} &= -\frac{3eJ_3\sqrt{\mu_A}R_A^3(15\cos(2i)-7)\cot(i)\sin(\omega)}{16a^{9/2}(e^2-1)^3}.
\end{aligned} \tag{23}$$

În cazul mișcărilor orbitale în jurul corpurilor minore, se anticipează că $\overline{\mathcal{H}}_A$ induce o dinamică seculară și de lungă durată mult mai complexă. Dată fiind diversitatea parametrilor implicați, o caracterizare globală a efectelor cumulative generate de $\overline{\mathcal{H}}_{J_2}$, $\overline{\mathcal{H}}_{J_3}$ și $\overline{\mathcal{H}}_{J_4}$ devine destul de complicată.

Să presupunem că ne interesează evoluția orbitelor aproape circulare în jurul asteroidului (4) Vesta, situate la distanțe de câteva raze față de centrul său, să zicem $a \approx 3R_A \approx 795$ [km]. Figura 3 arată variațiile $|\dot{e}_{J_3}|$, $|\dot{e}_{J_4}|$ (graficul din stânga sus); $|\dot{i}_{J_3}|$,

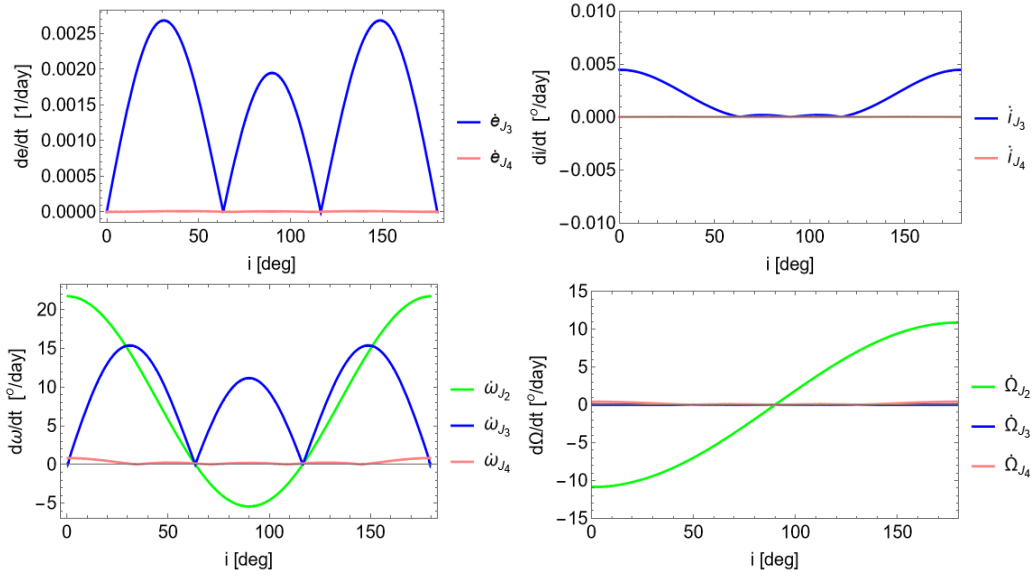


Figura 3: Efecte seculare induse de J_2 , J_3 și J_4 asupra orbitelor aproape circulare în jurul asteroidului (4) Vesta. Variațiile $|\dot{e}_{J_3}|$ (albastru), $|\dot{e}_{J_4}|$ (roz) (stânga sus); $|\dot{i}_{J_3}|$ (albastru), $|\dot{i}_{J_4}|$ (roz) (dreapta sus); $\dot{\omega}_{J_2}$ (verde), $|\dot{\omega}_{J_3}|$ (albastru), $|\dot{\omega}_{J_4}|$ (roz) (stânga jos); $\dot{\Omega}_{J_2}$ (verde), $|\dot{\Omega}_{J_3}|$ (albastru), $|\dot{\Omega}_{J_4}|$ (roz) (dreapta jos), ca funcții de înclinație și pentru următoarele valori fixe ale semiaxei mari, excentricității și argumentului periheliului: $a = 3R_A = 795$ km, unde $R_A = 265$ km este raza de referință, $e = 0.01$, iar ω a fost ales astfel încât $|\dot{s}_{J_k}|$ să fie maxim, unde s este elementul orbital în discuție și $k \in \{3, 4\}$.

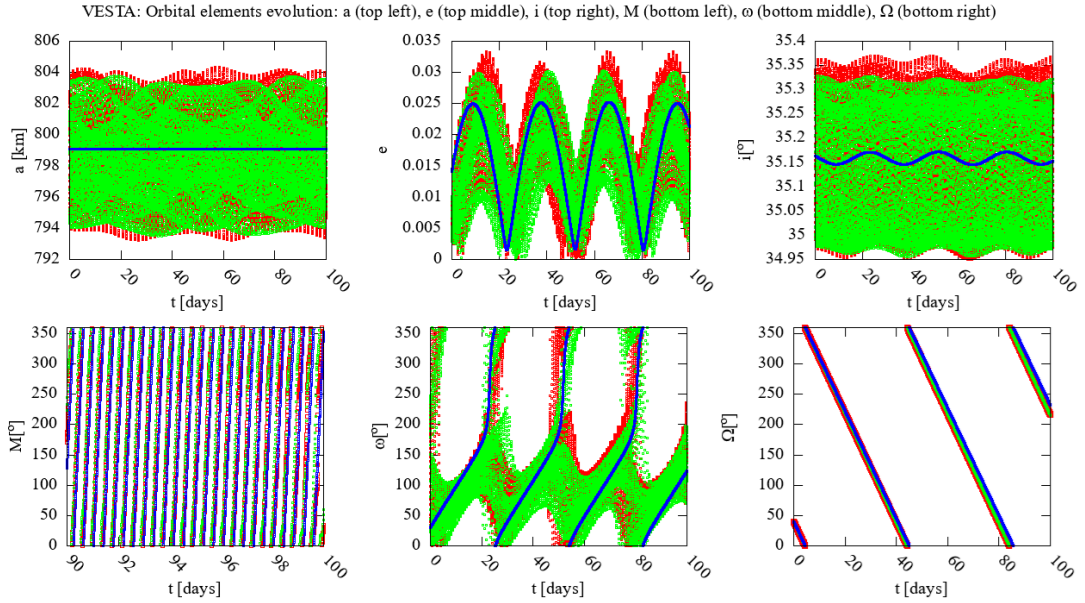


Figura 4: Evoluția elementelor orbitale ale unei orbite în jurul asteroidului (4) Vesta, propagată utilizând ecuațiile carteziene ale mișcării (cu roșu), ecuațiile mișcării în variabilele nesingulare definite în Giacaglia (1977) (cu verde) și hamiltonianul \mathcal{H} obținut prin medierea lui \mathcal{H} definit în (9), în raport cu unghiurile M și θ (cu albastru). Fiecare model ia în considerare efectele perturbatoare datorate nesfericității corpului A , ale Soarelui și ale presiunii radiației solare pentru $\mathcal{A}/m = 0.01$ [m^2/kg]. Condițiile inițiale sunt: $a = 795$ [km], $e = 0.005$, $i = 35^\circ$, $M = 50^\circ$, $\omega = 30^\circ$, $\Omega = 40^\circ$, iar epoca inițială este J2000.0.

$|\dot{i}_{J_4}|$ (graficul din dreapta sus); $\dot{\omega}_{J_2}$, $|\dot{\omega}_{J_3}|$, $|\dot{\omega}_{J_4}|$ (stânga jos); $\dot{\Omega}_{J_2}$, $|\dot{\Omega}_{J_3}|$, $|\dot{\Omega}_{J_4}|$ (dreapta jos), în funcție de înclinația i și pentru $a = 795$ [km], $e = 0.01$ și ω ales astfel încât $|\dot{s}_{J_k}|$ să fie maxim, unde s este elementul orbital în discuție și $k \in \{3, 4\}$. Efectele induse de $\overline{\mathcal{H}}_{J_2}$ sunt seculare (adică $\dot{\omega}_{J_2}$ și $\dot{\Omega}_{J_2}$ nu depind de ω), iar efectele induse de $\overline{\mathcal{H}}_{J_3}$ și $\overline{\mathcal{H}}_{J_4}$ sunt lung periodice. În figura 3, curbele albastre și roz arată amplitudinea variației (calculată pentru o valoare fixă a lui ω), comparativ cu curbele verzi care corespund influenței seculare a lui J_2 . La o asemenea distanță față de centrul de masă al asteroidului (4) Vesta, adică $a = 3R_A$, efectele pe termen lung ale lui J_4 sunt neglijabile. Același comportament (neprezentat aici) se păstrează și pentru $a > 3R_A$ și $a < 3R_A$. Cu toate acestea, efectele pe termen lung ale lui J_3 nu sunt neglijabile, așa cum se observă în figura 3. $\overline{\mathcal{H}}_{J_3}$ este responsabil pentru variații semnificative ale elementelor orbitale, în special pentru variația excentricității, înclinației, anomaliei medii (neprezentată în figura 3) și a argumentului periheliului. Pentru orbite aproape circulare aflate din ce în ce mai aproape de suprafața asteroidului, influența lui J_3 devine și mai relevantă.

Pentru a evidenția influența cumulativă a termenilor $\overline{\mathcal{H}}_{J_2}$, $\overline{\mathcal{H}}_{J_3}$ și $\overline{\mathcal{H}}_{J_4}$ asupra orbitelor aproape circulare, figura 4 prezintă evoluția elementelor orbitale ale unei orbite în jurul asteroidului (4) Vesta, obținută prin propagarea ecuațiilor carteziane ale mișcării (cu roșu), a ecuațiilor mișcării în elementele orbitale nesingulare definite în Giacaglia (1977) (cu verde) și a ecuațiilor canonice asociate hamiltonianului $\overline{\mathcal{H}}$, obținut prin medierea lui \mathcal{H} , definit în (9), în raport cu unghiurile rapide M și θ (cu albastru). Cu roșu și verde este prezentată evoluția elementelor orbitale osculatoare, iar cu albastru este redată evoluția elementelor orbitale medii. Micile diferențe dintre curbele roșii și cele verzi se datorează modelelor diferite folosite; ecuațiile carteziane iau în considerare toți termenii armonici până la ordinul și gradul 4, în timp ce ecuațiile în elemente nesingulare iau în calcul doar influența termenilor J_2 și J_{22} (inclusiv cei scurt periodici), precum și perturbațiile induse de $\overline{\mathcal{H}}_{J_3}$ și $\overline{\mathcal{H}}_{J_4}$. Variațiile pe termen lung ale excentricității și înclinației, prezentate în graficele din mijloc-sus și dreapta-sus ale figurii 4, sunt cauzate de $\overline{\mathcal{H}}_{J_3}$ (vezi și graficele superioare din figura 3). Într-adevăr, din (22) și (23), pentru $i = 35^\circ$, rezultă că $\dot{e}_{J_3} \geq 0$, $\dot{i}_{J_3} \leq 0$ pentru $\omega \in [0^\circ, 90^\circ] \cup [270^\circ, 360^\circ]$ și $\dot{e}_{J_3} \leq 0$, $\dot{i}_{J_3} \geq 0$ pentru $\omega \in [90^\circ, 270^\circ]$, așadar oscilațiile pe termen lung ale lui e și i sunt descrise de o funcție trigonometrică de ω . În ceea ce privește evoluția argumentului periheliului și a longitudinii nodului ascendent, figurile 3 și 4 demonstrează că $\overline{\mathcal{H}}_{J_3}$ și $\overline{\mathcal{H}}_{J_4}$ au un efect neglijabil asupra variației lui Ω , în timp ce variația lui ω este mai complexă. În general, Ω variază liniar în timp pentru orice condiții inițiale, cu excepția

orbitelor polare. În schimb, în cazul argumentului periheliului, deoarece $\dot{\omega}_{J_3}$ este de ordinul $1/e$, pentru excentricități mici, influența combinată a lui $\overline{\mathcal{H}}_{J_2}$ și $\overline{\mathcal{H}}_{J_3}$ conduce la o variație neliniară a valorii medii a lui ω , după cum este ilustrat de curba albastră din graficul central de jos din figura 4. Deoarece $\dot{\omega}_{J_3}$ are semne opuse pe intervalele $\omega \in [0^\circ, 180^\circ]$ și respectiv $\omega \in [180^\circ, 360^\circ]$, rezultă că $\dot{\omega}_{J_2} + \dot{\omega}_{J_3}$ este mai mare pe un interval (adică $\omega \in [180^\circ, 360^\circ]$, vezi graficul de jos mijloc din figura 4) decât pe celălalt.

Pentru valori moderate ale excentricității inițiale, să spunem $e \in [0.1, 0.4]$, rata de variație a excentricității și rata de variație a înclinației nu se modifică semnificativ comparativ cu cazul excentricităților mici. Totuși, variația atât a lui ω , cât și a lui Ω este liniară, fiind guvernată de influența seculară a lui $\overline{\mathcal{H}}_{J_2}$.

Termenii din dezvoltările (10) și (12) pot fi clasificați astfel: *scurt periodici* - dacă Ψ_{nmpq} sau φ_{lmphqj} depind de M și/sau θ , fără comensurabilitate între perioadele unghiurilor rapide, *rezonanți* - când Ψ_{nmpq} implică unghiuri rapide cu relații de comensurabilitate între M și θ , *seculari sau lung periodici* - dacă argumentele trigonometrice sunt independente de M și θ .

Evident, dezvoltările în serii ale părților hamiltoniene \mathcal{H}_A și $\mathcal{H}_{Sun} + \mathcal{H}_{SRP}$, definite de relațiile (10) și (12) conțin un număr infinit de termeni scurt periodici, rezonanți, seculari și lung periodici. Nu toți acești termeni sunt relevanți, atunci când ne propunem să analizăm evoluția pe termen lung a elementelor orbitale. Astfel, conform principiului medierii (vezi Murray & Dermott (1999), Morbidelli (2002)), putem presupune că toți termenii scurt periodici sunt neimportanți, deoarece efectele lor se contrabalansează pe termen lung, dinamica fiind dominată de termenii rezonanți, seculari și lung periodici. Astfel, spre exemplificare, în figura (5) este prezentată evoluția elementelor orbitale ale unei orbite în jurul lui Eros pentru o perioadă de 100 ani. Condițiile inițiale sunt $a = 100$ km, $e = 0.07$, $i = 20^\circ$, $M = 10^\circ$, $\omega = 50^\circ$, $\Omega = 100^\circ$, iar parametrul $\mathcal{A}/m = 10^{-4} m^2/kg$. Cu roșu este reprezentată evoluția elementelor orbitale osculatoare obținută prin propagarea ecuațiilor carteziene (2), care iau în considerare termenii armonici ai potențialului V (definit de relația (4)) până la gradul și ordinul $n = m = 4$, precum și atracția Soarelui și presiunea radiației solare.

Cu albastru este reprezentată evoluția elementelor medii obținută prin integrarea ecuațiilor canonice ale hamiltonianului $\overline{\mathcal{H}}$ care se obține după medierea după unghiurile rapide M și θ ale hamiltonianului (9). Evident, $\overline{\mathcal{H}}_A$ nu include termeni scurt periodici. Comparând cele două abordări, rezultă că este justificată neglijarea termenilor scurt periodici.

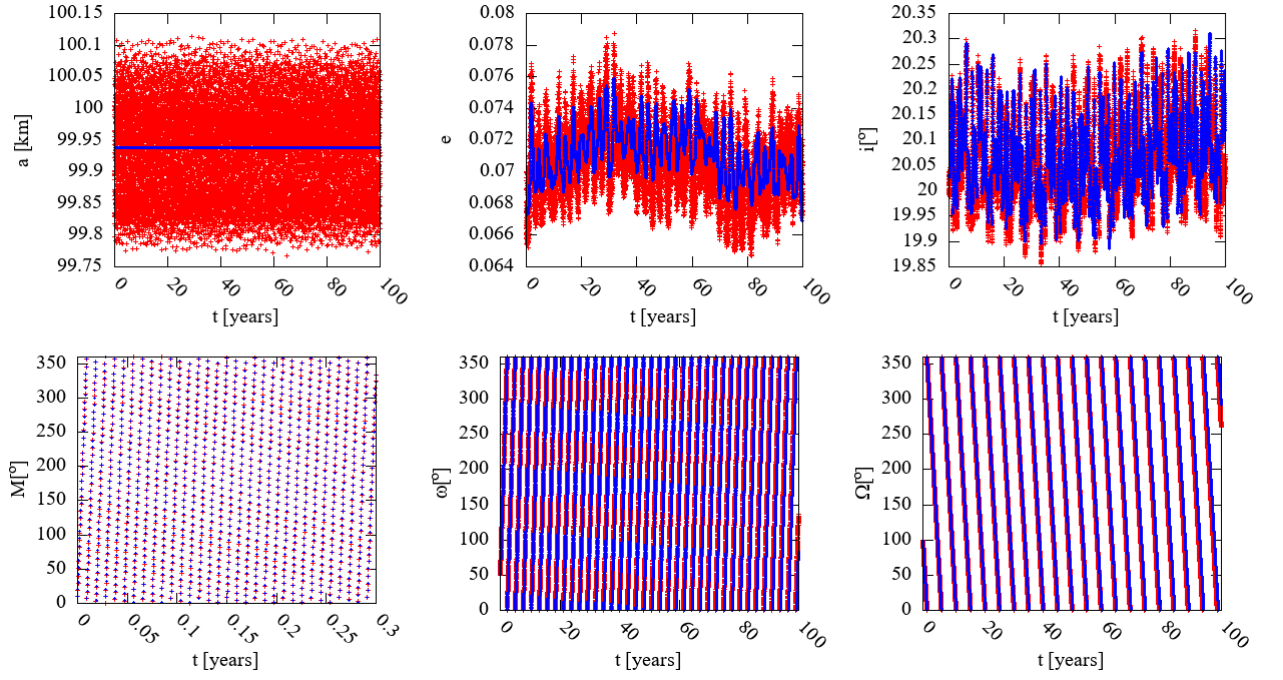


Figura 5: Evoluția elementelor osculatoare (roșu) și a elementelor medii (albastru) pentru o orbită în jurul asteroidului Eros, având elementele orbitale inițiale $a = 100$ km, $e = 0.07$, $i = 20^\circ$, $M = 10^\circ$, $\omega = 50^\circ$, $\Omega = 100^\circ$. Elementele osculatoare au fost obținute prin propagarea ecuațiilor carteziene care iau în considerare termenii armonici din dezvoltarea potențialului gravitațional al asteroidului Eros până la gradul și ordinul $n = m = 4$, precum și perturbațiile induse de atracția solară și de presiunea radiației solare, unde parametrul arie pe masă este $\mathcal{A}/m = 10^{-4}m^2/kg$. Elementele medii au fost obținute prin mediere în raport cu unghiurile rapide M și θ a dezvoltării părții hamiltoniene \mathcal{H}_A până la gradul $n = 4$, și medierea în raport cu M a dezvoltării în serii a părții $\mathcal{H}_{Sun} + \mathcal{H}_{SRP}$ până la ordinul $n = 2$.

În baza relației (7) rezultă că termenii zonali (cei pentru $m = 0$) pot fi de trei tipuri și anume: termeni seculari (independenți de M și ω), termeni lung periodici (depind doar de ω) și termeni scurt periodici (depind de M).

Pe baza aceleiași relații (7), termenii sectoriali și termenii teserali (cei pentru $m \neq 0$) pot fi doar de două tipuri și anume: termeni rezonanți (depind de M și θ , însă există o comensurabilitate între aceste unghiuri) și termeni scurt periodici (depind întotdeauna de θ și, eventual, de M). Important de remarcat faptul că nu există termeni sectoriali și termeni teserali care să fie seculari sau lung periodici. Cu alte cuvinte, termenii sectoriali și teserali sunt relevanți doar în acele regiuni ale spațiului fazelor unde se produc rezonanțe teserale.

În virtutea relației (13), $\mathcal{H}_{Sun} + \mathcal{H}_{SRP}$ poate conține termeni seculari, termeni lung periodici și termeni scurt periodici. Deoarece φ_{lmphqj} (vezi relația(13)) nu depinde de θ , suma $\mathcal{H}_{Sun} + \mathcal{H}_{SRP}$ nu conține termeni rezonanți (termeni care conduc la rezonanțe

teserale).

Așadar, pentru problema considerată se identifică două categorii de rezonanțe:

1. *Rezonanțe sectorial-teserale* (eng. *ground-track resonances*, cf. Delsate (2011); Feng (2017); Boumchita & Feng (2024)), rezultând din comensurabilități între perioada de rotație a corpului A și perioada orbitală a particulei P , fiind generate de nesfericitatea și rotația corpului A ;
2. *Rezonanțe datorate Soarelui și presiunii radiației solare*, implică comensurabilități între ratele de variație a unghiurilor lente Ω , ω și M_S^* , astfel că ele sunt cauzate de influența cuplată a celui de-al treilea corp și/sau a perturbațiilor induse de presiunea radiației solare, pe de o parte, și a nesfericității corpului A , pe de altă parte.

Pentru a introduce **rezonanțele sectorial-teserale**, reamintim că dezvoltarea în serie a părții hamiltoniene \mathcal{H}_A conține termeni ai căror argumente trigonometrice au forma (7). În consecință, o rezonanță apare atunci când există $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$, $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$, $q \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

$$(n - 2p + q)\dot{M} - m\dot{\theta} + (n - 2p)\dot{\omega} + m\dot{\Omega} = 0.$$

Această relație implică ratele de variație ale unghiurilor M , θ , ω și Ω . Deoarece M și θ sunt mult mai rapide decât ω și Ω , o astfel de rezonanță va fi numită rezonanță de ordin $j : \ell$, unde j și ℓ sunt definite prin relațiile $m = j\tilde{d}$, $n - 2p + q = \ell\tilde{d}$ și \tilde{d} este cel mai mare divizor comun al numerelor m și $n - 2p + q$.

Pentru două numere naturale prime între ele j și ℓ , introducem unghiul:

$$\sigma_{j\ell} = \ell M - j\theta + \ell\omega + j\Omega. \quad (24)$$

De fapt, prin $j : \ell$ înțelegem o clasă de mai multe rezonanțe pe care o denumim multiplu ca în definiția:

Definiția 3.1. Spunem că se produce o rezonanță sectorial-teserală de ordin $j : \ell$, cu $j, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ când există $\tilde{d} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ și $q \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

$$\tilde{d}\dot{\sigma}_{j\ell} - q\dot{\omega} = 0. \quad (25)$$

Prin multiplu de rezonanțe sectorial-teserale de ordin $j : \ell$, cu $j, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ înțelegem mulțimea tuturor rezonanțelor de forma (25).

Definiția 3.2. Componenta $q/\tilde{d} \in \mathbb{Q}$ a multipluului de rezonanțe sectorial-teserale de ordin $j : \ell$, cu $j, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este rezonanța pentru care are loc relația (25).

Rezonanțele seculare datorate Soarelui și presiunii radiației solare apar ca efect combinat al nesfericității corpului A și al perturbațiilor induse de către Soare și de presiunea radiației solare. Armonicele zonale provoacă variații în timp ale argumentului periastrului ω și ale longitudinii nodului ascendent Ω . Pe de altă parte, din (12) și (13), suma $\mathcal{H}_{Sun} + \mathcal{H}_{SRP}$ conține termeni seculari și lung periodici, ale căror argumente trigonometrice sunt de forma $k_1\omega + k_2\Omega + k_3M_S^* + const$, unde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

Definiția 3.3. O rezonanță solară sau datorată presiunii radiației solare se produce atunci când există k_1, k_2 și $k_3 \in \mathbb{Z}$, nu toate nule, astfel încât:

$$k_1\dot{\omega} + k_2\dot{\Omega} + k_3\dot{M}_S^* = 0. \quad (26)$$

Deoarece $\mathcal{H}_{Sun} + \mathcal{H}_{SRP}$ este o serie de puteri în a/a_S^* , o primă comparație între coeficienții din (12) arată că termenii trigonometrici de ordin $l = 2$ sunt de cel puțin 10^8 ori mai mari decât cei de ordin $l = 3$. Din acest motiv, în continuare vom discuta doar rezonanțele obținute prin trunchierea seriei (12) până la ordinul al doilea în a/a_S^* , deși în propagarea orbitală sunt implementați și termeni de ordin superior.

Din (13) și (26), deducem că sunt posibile următoarele tipuri de rezonanțe (considerând dezvoltarea (12) până la $l = 2$):

$$(2-2p)\dot{\omega} + m\dot{\Omega} - (2-2h+j)\dot{M}_S^* = 0, \quad p \in \{0, 1, 2\}, m \in \{0, 1, 2\}, h \in \{0, 1, 2\}, j \in \mathbb{Z} \quad (27)$$

și

$$(1-2p)\dot{\omega} + m\dot{\Omega} - (1-2h+j)\dot{M}_S^* = 0, \quad p \in \{0, 1\}, m \in \{0, 1\}, h \in \{0, 1\}, j \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

Rezonanțele (27) sunt provocate atât de perturbațiile solare, cât și de cele asociate presiunii radiației solare, în timp ce rezonanțele (28) apar doar ca efect al presiunii radiației solare.

Pentru fiecare corp A , există în spațiul elementelor orbitale o regiune unde unghiurile ω și Ω sunt mai rapide decât (sau comparabile cu) anomalia medie a Soarelui

M_S^* , și o regiune unde ω și Ω sunt (mult) mai lente decât M_S^* . Toate tipurile de rezonanțe definite de (27) și (28) (până la un întreg j , care trebuie determinat în aplicații) pot fi relevante pentru prima regiune. Totuși, deoarece în a doua regiune M_S^* este considerat (mult) mai rapid decât ω și Ω , doar rezonanțele care nu implică viteza \dot{M}_S^* pot apărea.

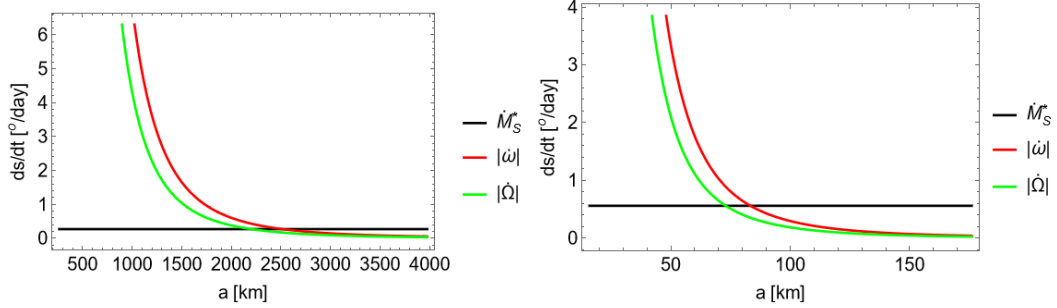


Figura 6: Comparație între \dot{M}_S^* (linie neagră), $|\dot{\omega}|$ (curba roșie), $|\dot{\Omega}|$ (curba verde), în cazul următoarelor obiecte: (4) Vesta (stânga) și (433) Eros (dreapta). Semiaxa mare variază în intervalul $a \in [R_A, 15R_A]$, pentru (4) Vesta, respectiv $a \in [R_A, 11R_A]$ pentru (433) Eros, unde R_A este raza de referință a corpului A . Excentricitatea și înclinația sunt fixe, și anume: $e = 0.1, i = 30^\circ$. Mărimea s reprezintă un unghi generic.

Figura 6 compară vitezele de variație ale unghiurilor ω, Ω și M_S^* , pentru anumite valori fixe ale lui i și e . Din graficele incluse în figura 6 se poate deduce că orbitele situate în imediata apropiere a lui A se află în prima regiune menționată, în timp ce orbitele situate la distanțe mari față de A se află fie la granița dintre cele două regiuni, fie în a doua regiune.

Astfel, de la o anumită distanță față de corpul A , doar rezonanțele de forma $(2 - 2p)\dot{\omega} + m\dot{\Omega} = 0$, cu $p \in \{0, 1, 2\}$ și $m \in \{0, 1, 2\}$ sunt cu adevărat relevante pentru dinamică, deoarece ω și Ω sunt mai lente decât M_S^* .

De regulă, vitezele de variație ale unghiurilor ω și Ω , adică $\dot{\omega}$ și $\dot{\Omega}$, sunt influențate cu precădere de termenul secular $\overline{\mathcal{H}}_{J_2}$. Astfel, în baza ecuațiilor 2 și 3 din relațiile (23), rezonanța $(2 - 2p)\dot{\omega} + m\dot{\Omega} = 0$ se produce atunci când

$$(2 - 2p)(3 + 5 \cos(2i)) - 4m \cos i = 0,$$

adică aceste rezonanțe depind doar de înclinație. Acestea se produc pentru orice valoare a semiaxei mari a și pentru orice valoare a excentricității e la aceleași înclinații,

după cum urmează:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= 0 \text{ la } \text{\textcircled{in}clina\cira} \text{ } 63^\circ.4 \text{ sau } 116^\circ.4, \\
\dot{\Omega} &= 0 \text{ la } \text{\textcircled{in}clina\cira} \text{ } 90^\circ, \\
\dot{\omega} + \dot{\Omega} &= 0 \text{ la } \text{\textcircled{in}clina\cira} \text{ } 46^\circ.4 \text{ sau } 106^\circ.9, \\
-\dot{\omega} + \dot{\Omega} &= 0 \text{ la } \text{\textcircled{in}clina\cira} \text{ } 73^\circ.2 \text{ sau } 133^\circ.6, \\
-2\dot{\omega} + \dot{\Omega} &= 0 \text{ la } \text{\textcircled{in}clina\cira} \text{ } 69^\circ \text{ sau } 123^\circ.9, \\
2\dot{\omega} + \dot{\Omega} &= 0 \text{ la } \text{\textcircled{in}clina\cira} \text{ } 56^\circ.1 \text{ sau } 111^\circ.
\end{aligned}$$

La distan\cete mici de corpul nesferic unghiurile ω , Ω pot fi mai rapide dec\cât M_S^* sau pot varia la fel de lent ca M_S^* (vezi figura (6)). Prin urmare, la distan\cete mici de corpul nesferic, se pot produce \cși rezonan\cete de tipul (27) care depind de M_S^* . Loca\cția acestor rezonan\cete depinde de elementele orbitale a , e , i .

4 Analiza stabilit\cății orbitale

Pornind de la rezultatele ob\cținute de Allan & Cook (1964), care au investigat dinamica orbitelor circulare \cîndep\cártate de P\căm\cânt, analiz\căm evolu\cția pe termen lung a \cînclina\cției orbitelor \cîn jurul asteroizilor. Adopt\căm un cadru analitic pentru identificarea principalilor parametri care contribuie la apari\cția unor varia\cții semnificative ale \cînclina\cției orbitelor circulare. Rezultatele cuprinse \cîn acest capitol fac obiectul lucr\cărilor Nadabaic\că (2024, 2025).

\cÎntruc\cât are loc $\partial U^*/\partial e = 0$ atunci c\când excentricitatea $e = 0$ (vezi ecua\cția (19)), a doua ecua\cție din (18) admite solu\cția $e(t) = 0$ pentru condi\cția ini\cțial\că $e(0) = 0$. Prin urmare, orbitele ini\cțial circulare \cî\cși conserv\că circularitatea \cîn timp. \cÎn consecin\cță, sistemul de ecua\cții (18) se reduce la o problem\că cu un singur grad de libertate (integrabil\că), descris\că de ecua\cția

$$\dot{\mathbf{R}} = -\omega_0(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_A)(\mathbf{R}_A \times \mathbf{R}) - \omega_1(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_S)(\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}), \quad (29)$$

unde semnifica\cția constantelor ω_0 \cși ω_1 , precum \cși a vectorilor \mathbf{R} , \mathbf{R}_A \cși \mathbf{R}_S , a fost prezentat\că mai sus.

Pentru a caracteriza evolu\cția vectorului \mathbf{R} (sau, echivalent, a parametrilor s\căi asocia\cți: \cînclina\cția i \cși longitudinea nodului ascendent Ω), este necesar, \cîn primul r\cînd,

să determinăm punctele de echilibru ale problemei.

Determinarea acestor puncte pentru sistemul din relația (29) se reduce la o analiză a valorilor și vectorilor proprii, conform metodologiei descrise de Allan & Cook (1964). O poziție de echilibru a problemei (29), notată prin \mathbf{V} , este un vector propriu al tensorului $\omega_0 \mathbf{R}_A \mathbf{R}_A + \omega_1 \mathbf{R}_S \mathbf{R}_S$, ceea ce implică relația

$$(\omega_0 \mathbf{R}_A \mathbf{R}_A + \omega_1 \mathbf{R}_S \mathbf{R}_S) \mathbf{V} = \lambda \mathbf{V},$$

unde simbolul \mathbf{AB} desemnează produsul tensorial al vectorilor \mathbf{A} și \mathbf{B} , iar λ reprezintă o valoare proprie, care poate fi determinată prin rezolvarea ecuației caracteristice

$$\det(\omega_0 \mathbf{R}_A \mathbf{R}_A + \omega_1 \mathbf{R}_S \mathbf{R}_S - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

cu \mathbf{I} desemnând tensorul unitate.

Adoptând convenția $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$, valorile proprii pot fi scrise sub forma: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left(\omega_0 + \omega_1 \mp \sqrt{(\omega_0 + \omega_1)^2 - 4\omega_0\omega_1 \sin^2 \epsilon} \right)$, unde $\epsilon = i_S^*$ reprezintă oblicitatea, adică unghiul dintre \mathbf{R}_A și \mathbf{R}_S .

Vectorii proprii asociați valorilor proprii λ_1 , λ_2 și λ_3 definesc orientarea axelor principale, notate în continuare cu O_1 , O_2 și, respectiv, O_3 . Axa O_3 aparține planului determinat de axa polară a asteroidului (\mathbf{R}_A) și normala la planul orbital al Soarelui (\mathbf{R}_S), formând un unghi de înclinație α față de \mathbf{R}_A . Acest unghi este determinat de relația (conform Allan & Cook (1964)):

$$\tan 2\alpha = \frac{\omega_1 \sin 2\epsilon}{\omega_0 + \omega_1 \cos 2\epsilon}. \quad (30)$$

Axa O_1 este ortogonală planului definit de vectorii \mathbf{R}_A și \mathbf{R}_S , în timp ce O_2 aparține acestui plan și este ortogonală pe O_3 .

Deoarece vectorul unitar \mathbf{R} definește planul orbital al satelitului P (prin înclinația i și longitudinea nodului ascendent Ω), cunoașterea mișcării vectorului \mathbf{R} este echivalentă cu predicția evoluției elementelor orbitale i și Ω . Într-adevăr, deoarece orbita rămâne circulară și semiaxa mare este constantă, se obține caracterizarea seculară a tuturor elementelor.

Figura (7) arată evoluția unghiului α , cu alte cuvinte, evoluția planului invariabil (planului lui Laplace) pentru cazul asteroidului 4 Vesta (stânga), respectiv, 433 Eros (dreapta). Comportamentul unghiului α în funcție de distanță evidențiază o tranziție

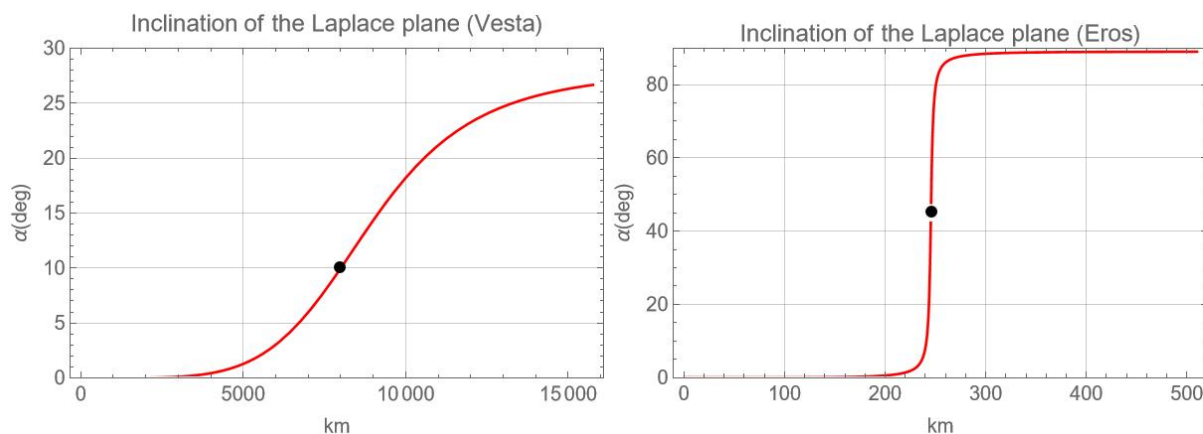


Figura 7: Evoluția înclinației planului lui Laplace pentru asteroidul 4 Vesta (stânga) și 433 Eros (dreapta).

progresivă între aceste stări de echilibru. La distanțe mici ($< 10R_0$), unghiul α dintre normala la planul ecuatorial și axa principală O_3 este un unghi mic, datorită influenței semnificative a nesfericității asteroidului. În această zonă, unghiul α rămâne sub 15° . Pe măsură ce distanța crește, între $10R_0$ și $50R_0$, sistemul intră într-o zonă de tranziție unde unghiul α începe să crească semnificativ. Această evoluție reflectă competiția dintre influența asteroidului și perturbațiile externe. La distanțe mari ($> 50R_0$), influența Soarelui devine dominantă, iar unghiul α tinde către o valoare asimptotică.

De asemenea, în figura (7) este evidențiat (cu negru) câte un punct pentru fiecare situație. Înclinația planului invariabil, pentru distanțele considerate, adică 8000 km în cazul asteroidului Vesta și, respectiv, 247 km în cazul asteroidului Eros, este de $\alpha = 10^\circ$ și, respectiv, $\alpha = 45^\circ$. În cele ce urmează, vom compara dinamica în jurul celor doi asteroizi, considerând, mai întâi, pentru ambele situații câte o orbită situată în imediata vecinătate a planului invariabil și câte o orbită depărtată de planul invariabil. Scopul acestei comparații este de a observa evoluția elementelor orbitale pentru ambele situații, pentru a evidenția stabilitatea orbitei ce aparține planului lui Laplace.

Evoluția elementelor orbitale în cazul orbitelor situate în zona de librație din vecinătatea punctului de echilibru asociat planului lui Laplace este redată în figurile (8) (Vesta) și (10) (Eros). Evoluția prezentată în aceste figuri poate fi confirmată analizând graficele din figura (12). Pentru asteroidul Vesta (figura (8)), propagând orbita asociată punctului de echilibru stabil $\Omega = 0^\circ$, $i = \alpha$, putem observa faptul că înclinația și longitudinea nodului ascendent evoluează în intervalul permis de către insula de librație ce conține orbita (conform graficului superior din mijloc al figurii (12)). Același comportament poate fi observat pentru orbita situată în zona de librație din vecinătatea punc-

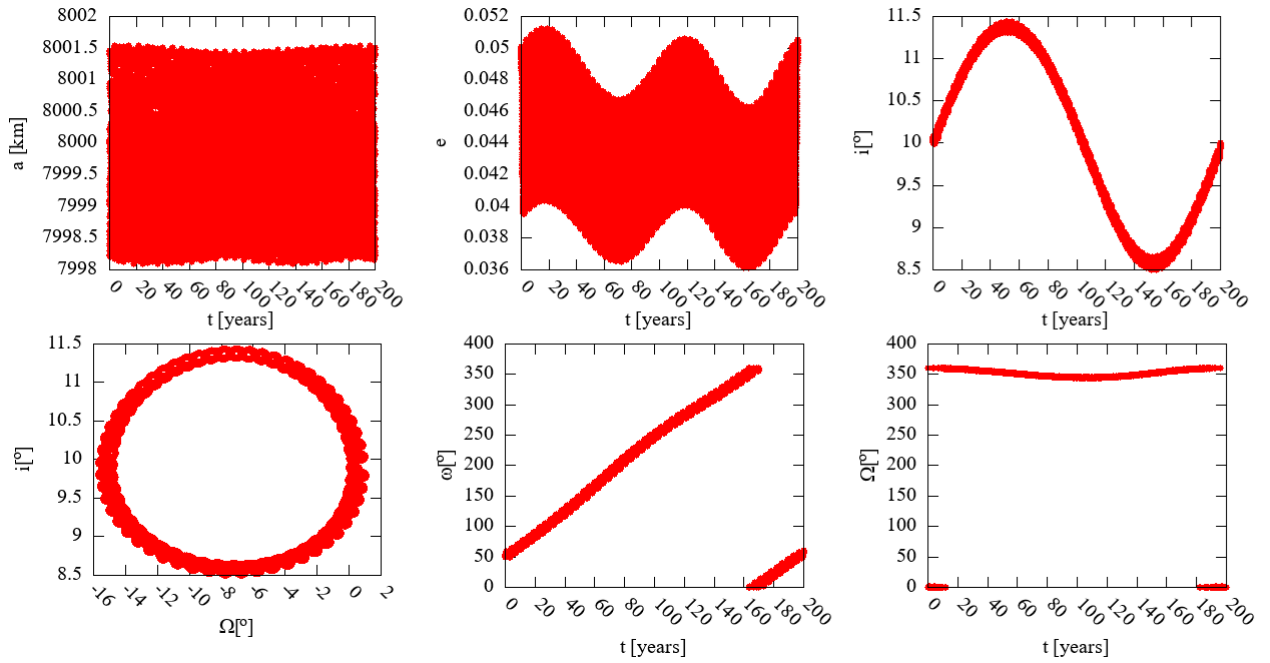


Figura 8: Evoluția elementelor orbitale ale unei particule ce se află pe o orbită situată în zona de librație din vecinătatea punctului de echilibru asociat planului lui Laplace, mai exact, corespunde punctului evidențiat din stânga figurii (7) (cazul asteroidului Vesta).

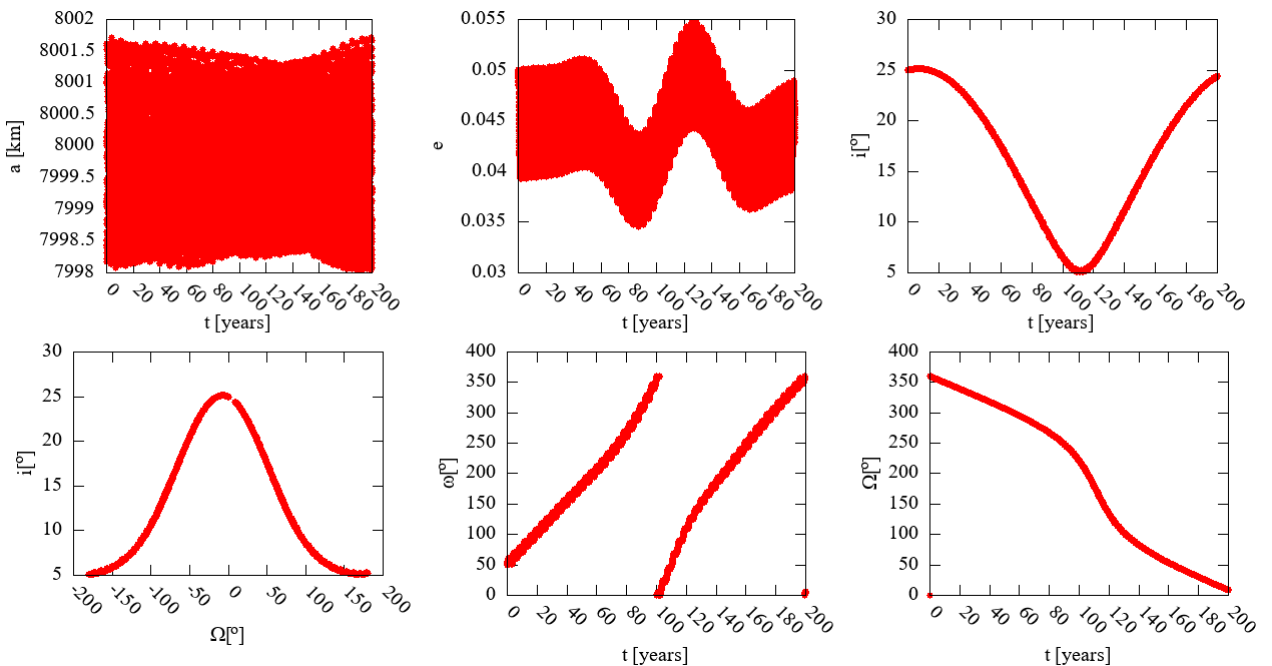


Figura 9: Evoluția elementelor orbitale ale unei particule ce se află pe orbită la o distanță apreciabilă de planul lui Laplace (cazul asteroidului Vesta).

tului de echilibru asociat planului lui Laplace din cazul asteroidului Eros (figura (10)), pentru care înclinația și longitudinea nodului ascendent evoluează corespunzător graficului inferior din mijloc al figurii (12), orbita propagată aparținând insulei de librație ce înconjoară punctul de echilibru stabil $\Omega = 0^\circ, i = \alpha$.

Pentru orbitele aflate la o distanță apreciabilă de planul lui Laplace (vezi figurile (9) și, respectiv, (11)), variațiile înclinației i și a longitudinii nodului ascendent Ω sunt apreciabile. În plus, dacă în cazul orbitei în jurul asteroidului Vesta excentricitatea e se modifică lent în timp (vezi figura (9)), excentricitatea orbitei în jurul asteroidului Eros crește în timp datorită influenței rezonanțelor solare seculare.

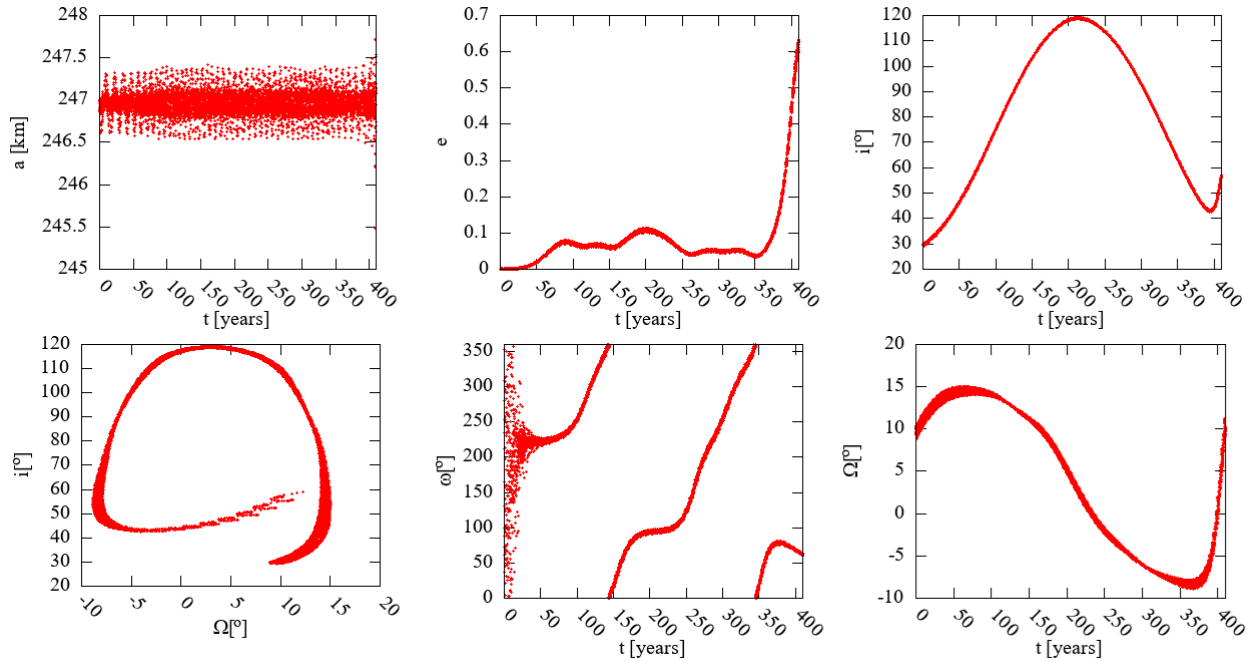


Figura 10: Evoluția elementelor orbitale ale unei particule ce se află pe orbită situată în zona de librație din vecinătatea punctului de echilibru asociat planului lui Laplace, mai exact, corespunde punctului evidențiat din dreapta figurii (7) (cazul asteroidului Eros).

După cum s-a menționat mai sus, determinarea pozițiilor de echilibru ale sistemului (29) se reduce la rezolvarea unei probleme de valori proprii. Sistemul admite trei poziții distincte de echilibru, corespunzând alinierii planului orbital cu fiecare dintre axele principale.

Cele trei poziții de echilibru prezintă caracteristici diferite de stabilitate. Două dintre ele sunt stabile, asociate alinierii planului orbital fie cu planul ecuatorial al asteroidului (\mathbf{R}_A), fie cu planul orbital al Soarelui (\mathbf{R}_S). A treia poziție de echilibru este instabilă, reprezentând o configurație de tip punct șa.

Pozițiile punctelor de echilibru în planul (i, Ω) pot fi determinate prin analiza suprafețelor de nivel ale funcției lui Hamilton, așa cum este ilustrat în figura 12. Studiul comparativ evidențiază două cazuri distincte: dinamica în jurul asteroidului Vesta (graficele din partea superioară) și dinamica în jurul asteroidului Eros (graficele din partea inferioară).

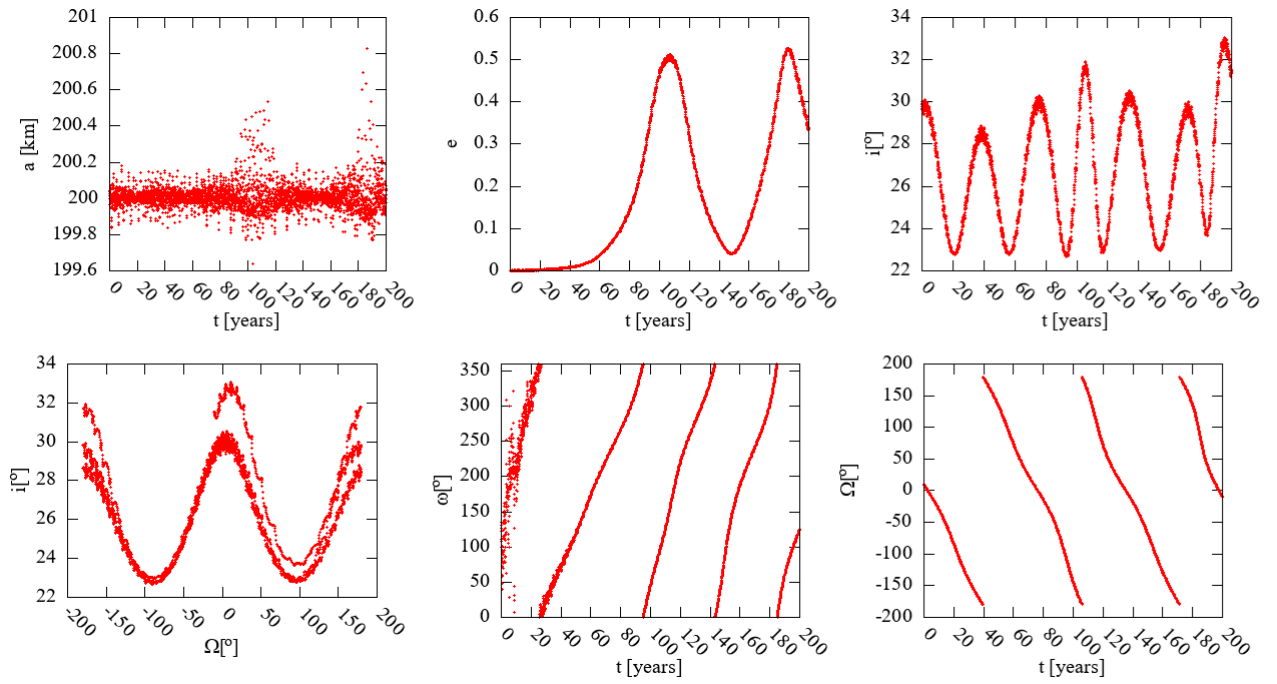


Figura 11: Evoluția elementelor orbitale ale unei particule ce se află pe orbită la o distanță apreciabilă de planul lui Laplace, mai exact (cazul asteroidului Eros).

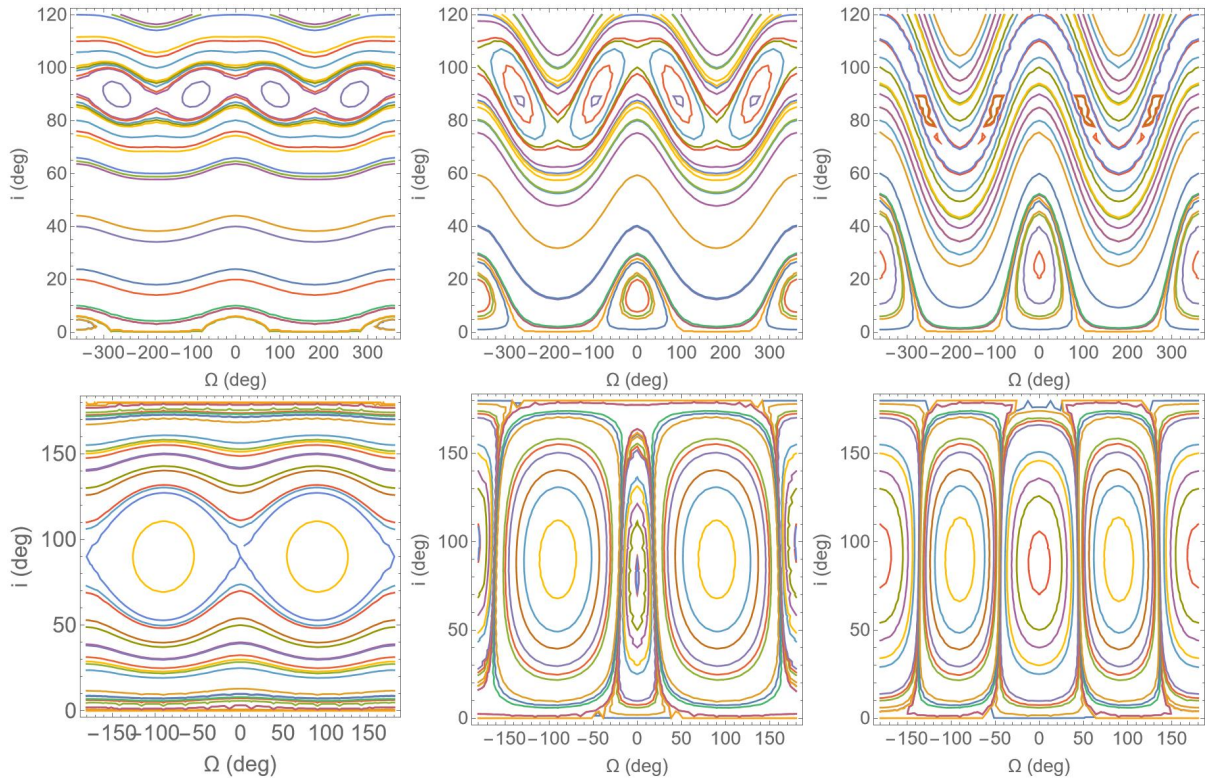


Figura 12: Suprafețele de nivel pentru Vesta, prezentate în graficele superioare, corespund distanțelor orbitale de $a = 6000$ km (stânga), $a = 9000$ km (centru) și $a = 15000$ km (dreapta), în timp ce pentru Eros sunt afișate în graficele inferioare și ilustrează configurațiile la $a = 200$ km (stânga), $a = 250$ km (centru) și $a = 280$ km (dreapta).

Analiza suprafețelor de nivel demonstrează că pozițiile de echilibru stabil se manifestă prin curbe de nivel închise, care delimitează regiuni cu mișcare orbitală

mărginită și stabilitate dinamică. Punctele de echilibru instabil sunt asociate cu curbe de nivel deschise sau suficient de distorsionate, evidențiind o dependență critică de condițiile inițiale. În aceste cazuri, mici perturbații ale stării inițiale pot conduce la variații exponențiale ale traiectoriei, caracteristice regimurilor haotice.

Amplitudinea insulelor de librație este influențată de diverși parametri, inclusiv elementele orbitale ale Soarelui, coeficientul gravitațional armonic J_2 , precum și masa și forma asteroidului. Dintre acești parametri, oblicitatea asteroidului se remarcă ca factor determinant.

Oblicitatea, definită ca înclinarea planului ecuatorial al asteroidului în raport cu planul său orbital, joacă un rol esențial în modelarea dinamicii în jurul unui corp nesferic. Pentru a caracteriza această influență, am examinat două cazuri distincte: Vesta, cu o oblicitate de 27° , conform Tricarico & Sykes (2010), și Eros, care prezintă o oblicitate de 89° , conform Souchay et al. (2003). În studiul nostru, evidențiem faptul că oblicitatea reprezintă un parametru fundamental în înțelegerea structurii și evoluției regiunilor de oscilații a înclinației și longitudinii nodului ascendent, influențând atât "dimensiunea" zonei din spațiul fazelor pe care aceste regiuni o ocupă, cât și stabilitatea acestora.

În planul (i, Ω) , pot fi distinse două tipuri de mișcare, și anume mișcarea oscilatorie și mișcarea circulatorie (sau rotațională). Mișcarea oscilatorie apare atunci când traiectoria sistemului rămâne mereu în jurul unui punct de echilibru, rezultând oscilații ale elementelor orbitale într-o regiune delimitată a spațiului fazelor (Ω nu ia toate valorile din intervalul $[0^\circ, 360^\circ)$). Pe de altă parte, mișcarea circulatorie este caracterizată de variația monotonă în întreg intervalul $[0^\circ, 360^\circ)$ a unghiului Ω , întrucât traiectoria înconjoară spațiul fazelor fără a fi limitată.

Figura 12 prezintă suprafețele de nivel pentru cazul asteroidului Vesta (la distanțele $a = 6000$ km, $a = 9000$ km și $a = 15000$ km, graficele din partea superioară) și pentru cazul asteroidului Eros (la $a = 200$ km, $a = 250$ km și $a = 280$ km, graficele din partea inferioară).

Pentru mișcările orbitale în jurul lui Vesta, suprafețele de nivel corespunzătoare cazului $a = 6000$ km prezintă curbe bine definite, indicând trei poziții de echilibru: $(\Omega, i) = (0^\circ, \alpha \approx 3^\circ)$, $(0^\circ, 90^\circ)$, $(90^\circ, 90^\circ)$.

Pe măsură ce valoarea semiaxe mari crește, perturbațiile gravitaționale devin mai pronunțate. Înclinarea α a planului Laplace tinde către valoarea maximă de 27° (egală cu valoarea oblicității), în timp ce amplitudinea insulelor de oscilații crește.

Pentru Eros, până la o anumită distanță, α este un unghi mic (așa cum se poate observa în graficul din partea dreaptă a figurii (7) și graficul din partea stângă inferioară a figurii (12)). Însă, începând cu o anumită valoare a semiaxe mari a , deoarece oblicitatea este mare, unghiul α crește brusc până la 89° (vezi graficul din mijloc, partea inferioară a figurii (12)). Ca și consecință, înclinația orbitală poate realiza excursii de mari amplitudini.

Rezultatele teoretice prezentate anterior și mecanismul propus sunt confirmate prin simulările numerice ilustrate de figurile 13 și 14. Aceste rezultate demonstrează consistența modelului teoretic și relevă caracteristicile esențiale ale dinamicii orbitale în jurul asteroizilor.

Pentru a valida studiul analitic anterior și pentru a evidenția influența variațiilor mari ale înclinației asupra evoluției celorlalte elemente orbitale, în special comportamentul excentricității, efectuăm simulări numerice pentru a propaga diverse orbite ale unei particule infinitezimale în jurul asteroizilor Vesta și Eros pe intervale lungi de timp. De asemenea, evidențiem efectele altor perturbații, și anume efectele induse de J_3 și rezonanțele seculare solare. Aceste simulări includ armonicile gravitaționale ale asteroizilor, precum și perturbațiile datorate Soarelui.

Pe de altă parte, perturbațiile induse de al treilea corp sunt responsabile pentru apariția rezonanțelor seculare (vezi Hughes (1980)). Pentru orbitele aflate în vecinătatea corpului central, rezonanțele seculare depind doar de înclinație și (pentru orbite prograde) sunt localizate la $i \approx 46^\circ$, $i \approx 56^\circ$, $i \approx 63.4^\circ$, $i \approx 69^\circ$, $i \approx 73^\circ$ și $i \approx 90^\circ$ (vezi Celletti et al. (2016), Celletti et al. (2017), Galeș et al. (2025)). Principalul efect al acestor rezonanțe este variația semnificativă a excentricității. Astfel, o orbită necirculară (chiar dacă excentricitatea este foarte mică) poate fi situată în regiunea de oscilații a unei asemenea rezonanțe și poate experimenta variații mari în excentricitate.

Prin urmare, mecanismul care conduce la variații mari ale excentricității orbitelor inițial circulare este următorul: ca efect al lui J_3 , excentricitatea variază cu amplitudini mici; efectul combinat al lui J_2 și al perturbațiilor solare conduce la excursii mari în înclinație. Odată ce înclinația atinge o valoare egală cu una dintre valorile critice menționate mai sus, orbita este influențată de o rezonanță seculară solară, iar excentricitatea începe să crească.

Rezultatele analitice prezentate în secțiunea anterioară și mecanismul descris mai sus sunt confirmate de figurile 13 și 14.

Figura 13 prezintă evoluția orbitală a unei particule infinitezimale în jurul aste-

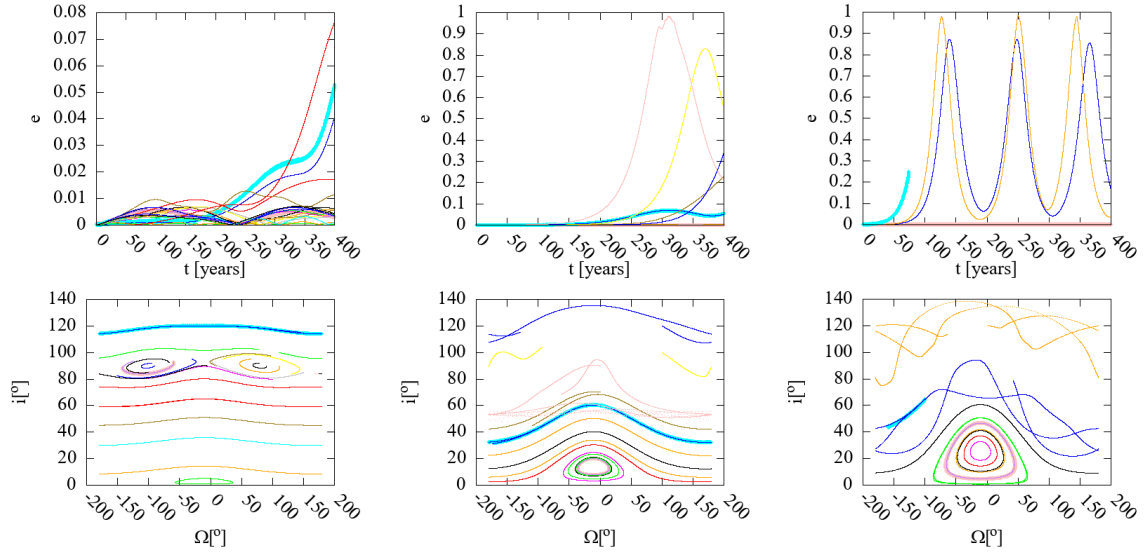


Figura 13: Evoluția excentricității (graficele superioare) și înclinației (graficele inferioare) unei particule care orbitează Vesta, situată la distanțele de 6000 km (stânga), 9000 km (centrale) și 15000 km (dreapta), cu o excentricitate inițială $e = 10^{-4}$. Linii groase roz și albastru deschis reprezintă orbite propagate folosind abordarea carteziană, iar liniile subțiri sunt obținute prin formalismul hamiltonian (considerând termenii armonici J_2 , J_3 și J_4).

roidului Vesta pentru trei configurații distincte, caracterizate prin valori ale semiaxei mari de 6000 km, 9000 km și, respectiv, 15000 km, toate având o excentricitate inițială de $e = 10^{-4}$. Potențialul gravitațional utilizat în model a inclus termenii armonici J_2 , J_3 și J_4 , termeni ce redau influența formei complexe și a distribuției neomogene a masei asteroidului.

Toate cele trei grafice (stânga, centru și dreapta) ilustrează evoluția excentricității (e) în funcție de timp și evoluția planului orbital exprimată prin înclinația (i) și longitudinea nodului ascendent (Ω). Simulările au fost realizate folosind atât abordarea carteziană, cât și formalismul hamiltonian, iar rezultatele coincid. Această concordanță între metode diferite confirmă fiabilitatea concluziilor obținute și validează metodele teoretice aplicate.

Pentru situația $a = 6000$ km, sistemul prezintă o stabilitate remarcabilă. Excentricitatea rămâne aproape constantă, iar dinamica în planul (i, Ω) se desfășoară fără perturbații majore, cu insule de oscilații bine definite și ușor de identificat. Pentru $a = 9000$ km, excentricitatea înregistrează variații semnificative, atingând în unele cazuri valori apropiate de 1, în special atunci când înclinația atinge valori critice asociate cu rezonanțe seculare solare. Cu toate acestea, comportamentul în planul (i, Ω) rămâne

relativ regulat. Pentru $a = 15000$ km, dinamica este mult mai complexă fiind vizibile comportamente haotice pentru înclinații ce depășesc valoarea de 40° . Se manifestă oscilații mari ale excentricității, iar aceasta nu mai posedă un comportament predictibil. Crește posibilitatea apropierii periodice de valoarea 1, ceea ce indică riscul pierderii stabilității orbitale. Înclinația prezintă, la rândul ei, variații neregulate, deși unele zone restrânse de stabilitate persistă în spațiul fazelor.

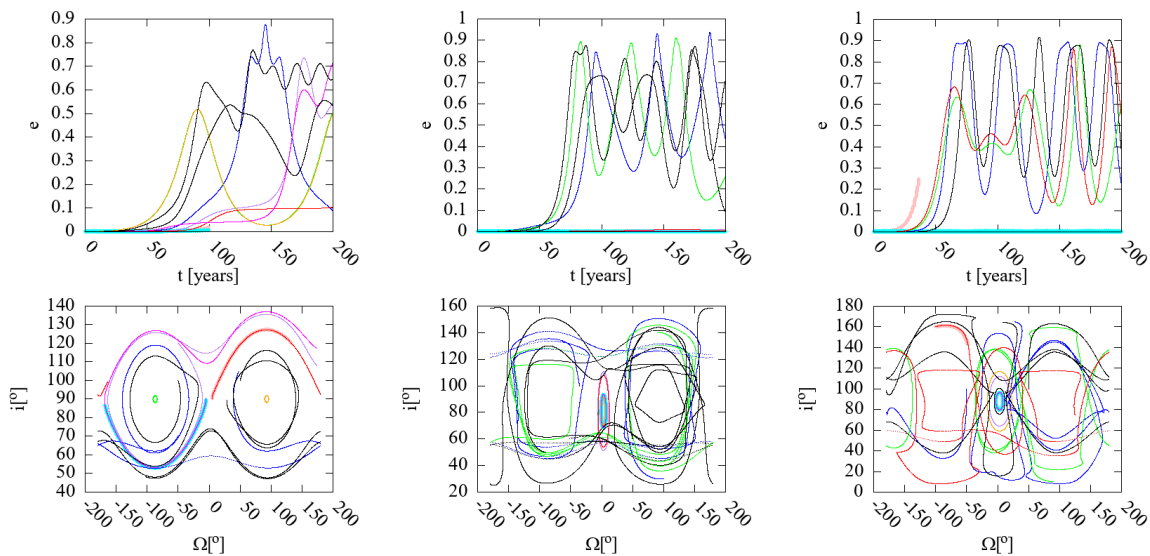


Figura 14: Evoluția elementelor orbitale pentru particule în jurul asteroidului Eros este analizată la distanțele de 200 km (stânga), 250 km (centru) și 280 km (dreapta), cu excentricități inițiale de $e = 10^{-4}$ (primul caz) și respectiv $e = 10^{-6}$ (ultimele două cazuri). Simulările utilizează două abordări: metoda carteziană (linii groase roz/albastru deschis, cu toți termenii J_2, J_3, J_4) și formalismul hamiltonian (linii subțiri, considerând toți termenii pentru 200 km, dar doar J_2 pentru 250 km și 280 km), ambele metode evidențiind dinamica orbitală specifică fiecărei configurații.

Figura 14 ilustrează evoluția elementelor kepleriene pentru o particulă test în câmpul gravitațional neregulat al asteroidului Eros, analizată la trei semiaxe mari distincte: 200 km, 250 km și 280 km. Configurația inițială diferă prin excentricități de 10^{-4} (pentru cazul $a = 200$ km), respectiv 10^{-6} (pentru celelalte două cazuri), valori reprezentative pentru orbite aproape circulare (vezi Chanut et al. (2015)).

Pentru $a = 200$ km, orbitele considerate în figura (14) se găsesc în regiuni dominate de rezonanțele seculare (adică înclinația acestor orbite este mai mare de 40°). În consecință, excentricitatea poate suferi variații complexe în timp, putând atinge valori de până la 0.8 în 200 ani. Pe de altă parte, dacă înclinația este mică, orbitele nu sunt influențate de rezonanțele seculare și, în consecință, excentricitatea suferă variații mai mici în timp. În figura (15) este reprezentată evoluția elementelor orbitale e, i, ω și Ω

pentru o orbită având elementele inițiale $a = 200$ km, $e = 10^{-4}$, $i = 20^\circ$. După cum se poate observa, excentricitatea nu crește mai mult de 0.4 în 200 de ani.

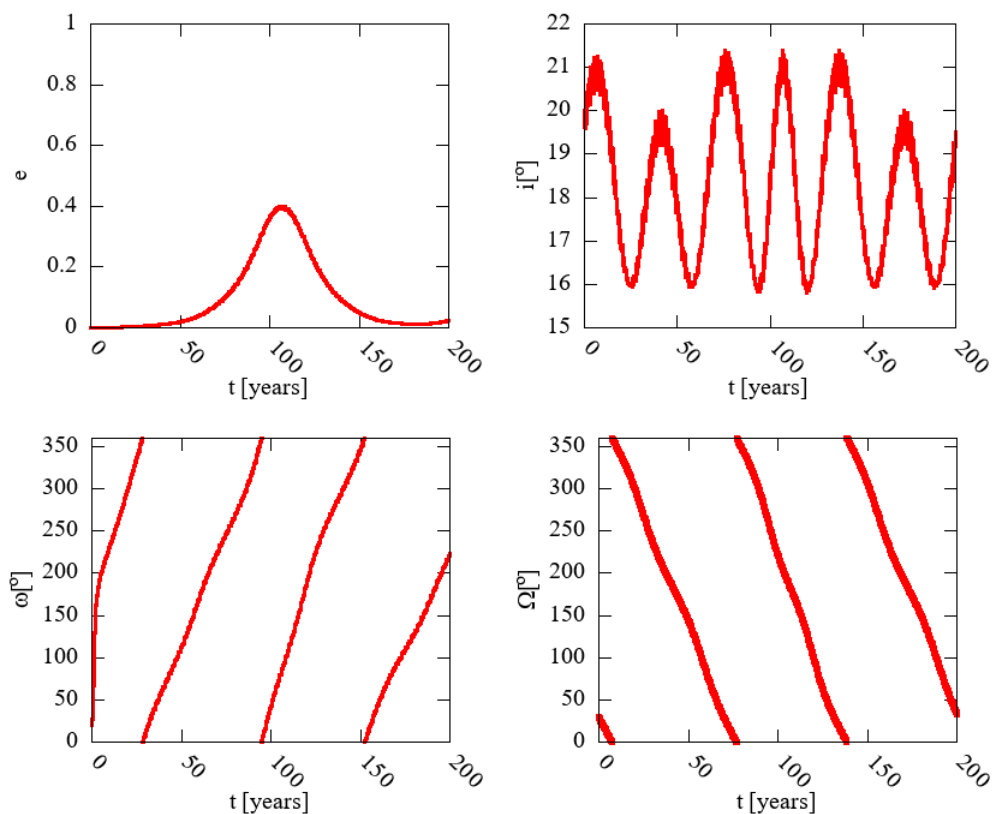


Figura 15: Evoluția elementelor orbitale pentru o orbită în jurul asteroidului Eros. Elementele inițiale sunt $a = 200$ km, $e = 10^{-4}$, $i = 20^\circ$, $\omega = 20^\circ$, $\Omega = 30^\circ$.

Studiul celor trei configurații orbitale (la $a = 200$ km, $a = 250$ km și $a = 280$ km) demonstrează o tranziție sistematică către instabilitate pe măsură ce semiaxa mare crește. La distanța de 200 km, variațiile excentricității rămân relativ regulate ($\Delta e \approx 0.8$), dar devin progresiv haotice ($e \rightarrow 1$) la distanțe mai mari.

Așadar, Vesta ar putea poseda unii companioni (sateliți sau particule infinitezimale), chiar și la distanțe mari de la suprafața sa, în condițiile în care înclinația este mai mică de aproximativ 40° . Motivul este că rezonanțele seculare solare (care depind doar de înclinație) apar la înclinații mai mari de 45° , iar înclinația nu crește în timp (așa cum este descris în secțiunea anterioară).

Totuși, în cazul lui Eros, existența companionilor este imposibilă la distanțe mari, să spunem la distanțe mai mari de 250 km (vezi graficele de jos din figura 12), deoarece înclinația fiecărei orbite va atinge la un moment dat înclinația unei rezonanțe seculare solare.

5 Studiu de caz

Dat fiind numărul infinit de termeni ai dezvoltărilor în serii ale perturbațiilor \mathcal{H}_A (vezi (10)) și $\mathcal{H}_{Sun} + \mathcal{H}_{SRP}$ (vezi (12)), în practică vom proceda astfel. Dată o rezonanță sectorial-teserală de ordinul $j : \ell$, pentru studiul acesteia vom construi următorul model hamiltonian:

- seria (10) a părții \mathcal{H}_A este trunchiată până la gradul și ordinul $n = m = 4$ și până la ordinul $O(e^2)$ (adică $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$);
- seria (12) a sumei $\mathcal{H}_{Sun} + \mathcal{H}_{SRP}$ este trunchiată până la ordinul $l = 2$;
- sunt identificați termenii rezonanți, adică acei termeni pentru care există $\tilde{d} \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = j\tilde{d}$ și $n - 2p + q = \ell\tilde{d}$;
- seriile trunchiate sunt mediate după unghiurile rapide M și θ , păstrând termenii rezonanți identificați la punctul precedent.

Se obține astfel un model hamiltonian care poate fi folosit doar în anumite regiuni ale spațiului fazelor, adică pentru acele semiaxe mari a aflate în vecinătatea rezonanței. Deoarece dezvoltările în serii sunt considerate până la ordinul $O(e^2)$ în excentricitate, vom propaga orbite cu excentricități moderate, să zicem $e < 0.3$. Evident, pentru orbite mai excentrice, modelul poate fi rafinat prin includerea termenilor de ordinul $O(e^s)$ unde s este suficient de mare. Prețul plătit pentru o acuratețe mai bună este timpul mai mare de propagare a orbitei.

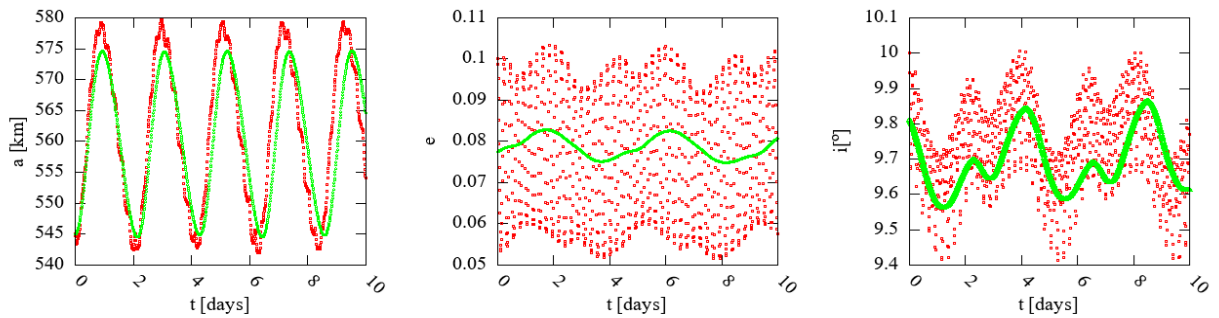


Figura 16: O orbită în jurul asteroidului Vesta, aflată în rezonanța sectorial-teserală 1:1. Cu roșu sunt rezultatele obținute prin propagarea modelului cartezian, în timp ce cu verde sunt reprezentate rezultatele găsite pe baza modelului hamiltonian descris mai sus. Condițiile inițiale sunt $a = 545$ km, $e = 0.079$, $i = 9.8^\circ$, $M = 0^\circ$, $\omega = 0^\circ$, $\Omega = 0^\circ$, în timp ce $\mathcal{A}/m = 0.001$ m²/kg.

Spre exemplu, în figura 16 este prezentată evoluția elementelor orbitale a , e și i pentru o orbită în jurul asteroidului Vesta, aflată în zona de oscilație a rezonanței

sectorial-teserale 1 : 1. Este comparată evoluția elementelor medii (cu verde), obținute prin propagarea modelului hamiltonian descris mai sus, cu elementele osculatoare (cu roșu), calculate prin propagarea ecuațiilor carteziane.

Programul de calcul, în care este implementat modelul hamiltonian, este suficient de general pentru a include sau exclude termenii rezonanți asociați tuturor rezonanțelor sectorial-teserale de ordinul 1 : 1, 2 : 1, 3 : 1, 4 : 1, 3 : 2, 4 : 3, 1 : 2, 1 : 3 și 2 : 3. În figura (1), liniile verticale, trasate punctat, redau locația rezonanțelor de ordinul $j : \ell$, cu $j, \ell \in \{1, 2, 3\}$, calculată folosind legea a treia a lui Kepler. Se observă, că în cazul asteroidului Vesta, toate rezonanțe se produc la o semiaxă a mai mare decât raza asteroidului, în timp ce dinamica în jurul asteroidului Eros este influențată doar de rezonanțele exterioare 2 : 3, 1 : 2 și 1 : 3, toate celelalte rezonanțe se produc în interiorul sferei Brillouin.

În cele ce urmează, va fi prezentat un studiu detaliat al rezonanței 1 : 1 din jurul asteroidului Vesta.

Termenii rezonanți corespunzători rezonanței de ordinul 1 : 1 se obțin prin rezolvarea ecuației $n - 2p + q = m$, unde $m > 0$. Ținând cont că termenii din dezvoltarea în serie (10) sunt de ordinul $O(e^{|q|})$ în excentricitatea e , atunci reținând doar termenii până la ordinul al doilea în e , obținem: $(n, m, p, q) \in \{(2, 1, 0, -1), (2, 1, 1, 1), (2, 2, 0, 0), (2, 2, 1, 2), (3, 1, 0, -2), (3, 1, 1, 0), (3, 1, 2, 2), (3, 2, 0, -1), (3, 2, 1, 1), (3, 3, 0, 0), (3, 3, 1, 2), (4, 1, 1, -1), (4, 1, 2, 1), (4, 2, 0, -2), (4, 2, 1, 0), (4, 2, 2, 2), (4, 3, 0, -1), (4, 3, 1, 1), (4, 4, 0, 0), (4, 4, 1, 2)\}$.

Ținând cont de forma funcțiilor de excentricitate și înclinație, se obține următoarea formă a funcției \mathcal{H}_A :

$$\mathcal{H}_A = \overline{\mathcal{H}}_A + \mathcal{H}_A^{res1:1}. \quad (31)$$

Pentru a analiza această rezonanță, vom face mai întâi un studiu cartografic al spațiului fazelor (mai precis al proiecției acestuia în planul (a, σ_{11}) , unde unghiul de rezonanță σ_{11} este dat de relația (24)). În acest sens vom utiliza indicatorul Lyapunov rapid, denumit în continuare FLI (Fast Lyapunov Indicator), a cărei definiție și proprietăți sunt subiectul mai multor studii (vezi (Froeschlé et al., 1997), (Froeschlé and Lega, 2000), (Guzzo and Lega, 2018) și lucrările citate de aceste studii).

În figurile 17, 18 și 19 este cartografiat spațiul fazelor în vecinătatea rezonanței 1 : 1, pentru diverse valori ale înclinației i din intervalul $[0^\circ, 90^\circ]$ și valori mici și medii ale excentricității e , adică $e \in [0, 0.2]$.

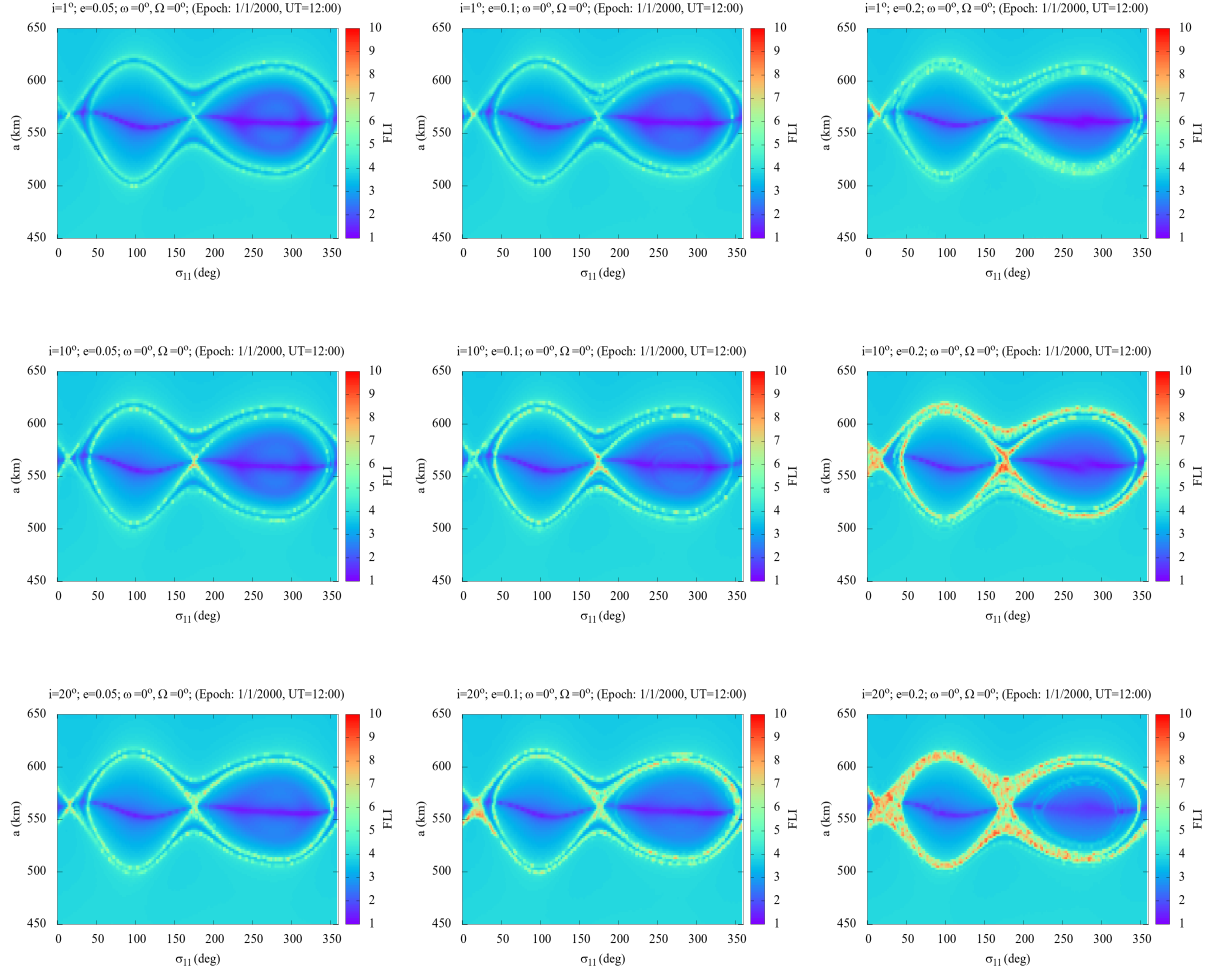


Figura 17: Indicatorul FLI calculat pentru 200×100 puncte din planul (σ_{11}, a) , înclinația $i = 1^\circ$ (graficele de pe prima linie), $i = 10^\circ$ (graficele de pe a doua linie) și respectiv $i = 20^\circ$ (graficele de pe ultima linie), excentricitatea $e = 0.05$ (graficele de pe coloana din stânga), $e = 0.1$ (graficele de pe coloana din mijloc) și $e = 0.2$ (graficele de pe coloana din dreapta). Celelalte condiții inițiale sunt $\omega = 0^\circ$, $\Omega = 0^\circ$, în timp ce parametrul \mathcal{A}/m are o valoare mică de ordinul $10^{-4} m^2/kg$. Momentul inițial este $1/1/2000$, ora $TU = 12^h$.

Aceste rezultate arată că spațiul fazelor este similar unui pendul matematic perturbat. Astfel, în fiecare grafic, cu excepția celor obținute pentru valori mari ale excentricității și înclinației, se disting cel puțin două regiuni, și anume o regiune unde a și σ_{11} au comportamente oscilatorii, unghiul de rezonanță neluând toate valorile din intervalul $[0^\circ, 180^\circ)$. Această regiune, care este colorată cu albastru închis, numită și zona de oscilație (sau de librație), cuprinde două componente (două "insule") pentru $\sigma_{11} \in [0^\circ, 360^\circ)$. Aceasta deoarece, termenul dominant din dezvoltarea în serie $\mathcal{H}_A^{res1:1}$, este $(2, 2, 0, 0)$, adică

$$T_{2200} = \frac{\mu_A R_A^2 J_{22}}{a^3} \left\{ \frac{3}{4} (1 + \cos i)^2 (1 - \frac{5}{2} e^2) \cos[2(M - \theta + \omega + \Omega - \lambda_{22})] \right\}, \quad (32)$$

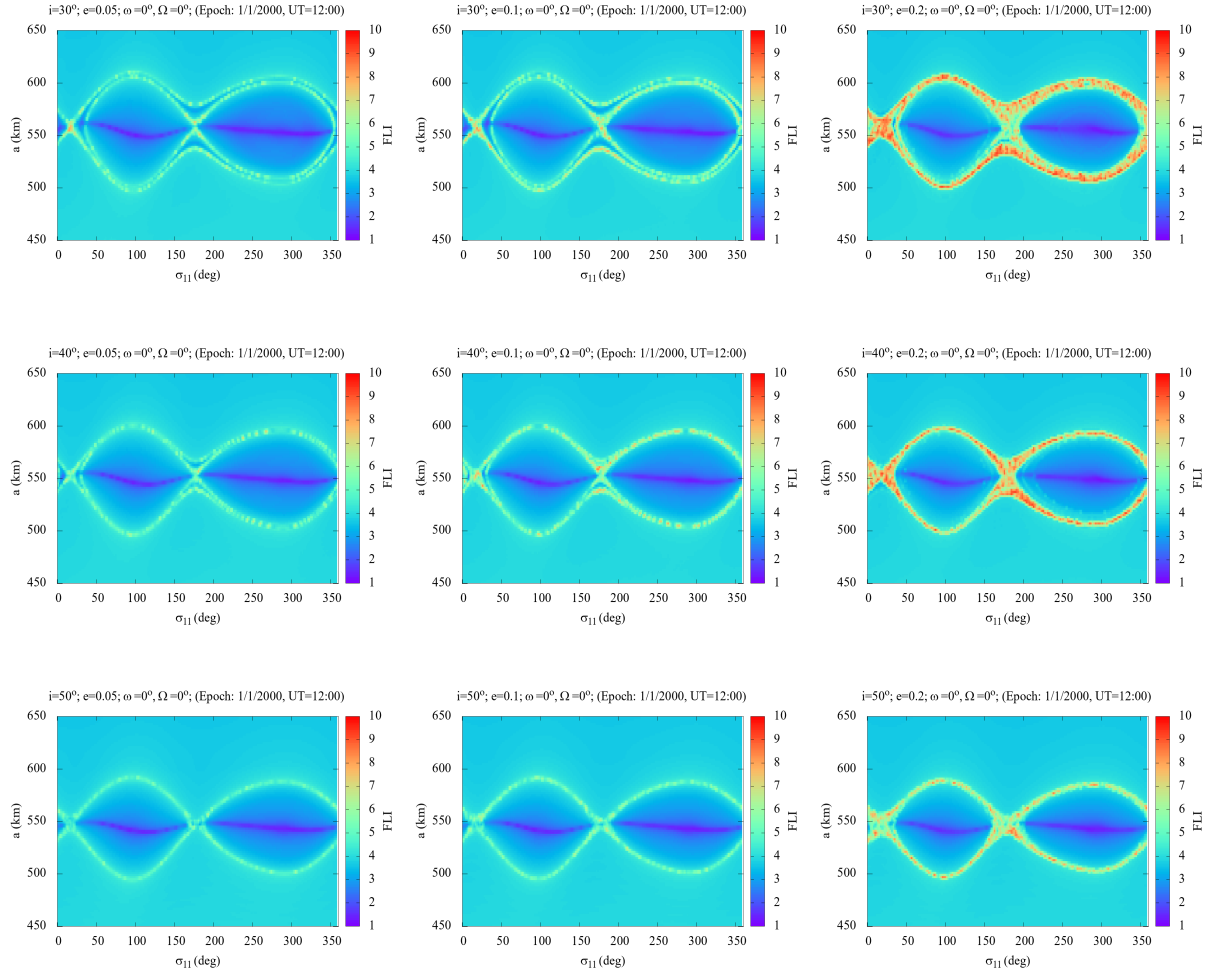


Figura 18: Indicatorul FLI calculat pentru 200×100 puncte din planul (σ_{11}, a) , înclinația $i = 30^\circ$ (graficele din partea de sus), $i = 40^\circ$ (graficele de pe linia a doua) și respectiv $i = 50^\circ$ (graficele de pe ultima linie), excentricitatea $e = 0.05$ (graficele din stânga), $e = 0.1$ (graficele de pe coloana din mijloc) și $e = 0.2$ (graficele de pe ultima coloană). Celelalte condiții inițiale sunt $\omega = 0^\circ$, $\Omega = 0^\circ$ în timp ce parametrul \mathcal{A}/m are o valoare mică de ordinul $10^{-4} m^2/kg$. Momentul inițial este $1/1/2000$, ora $TU = 12^h$.

iar argumentul funcției trigonometrice a acestui termen are forma $2(\sigma_{11} - \lambda_{22})$. În consecință, centrele celor două "insule" de librație sunt $\sigma_{11}^{(1)} = \lambda_{22} = 98^\circ.286$ și $\sigma_{11}^{(2)} = \lambda_{22} + 180^\circ = 278^\circ.286$. Evident, punctele hiperbolice (instabile) sunt poziționate (pe axa orizontală) în pozițiile $\sigma_{11}^{(3)} = \lambda_{22} - 90^\circ = 8^\circ.286$ și, respectiv, $\sigma_{11}^{(3)} = \lambda_{22} + 90^\circ = 188^\circ.286$.

Cea de-a doua regiune, marcată cu albastru-verde, corespunde zonelor de circulație unde σ_{11} ia toate valorile din intervalul $[0^\circ, 360^\circ)$, iar a fie este constant, fie variază cu amplitudini mult mai mici decât în regiunea de oscilație. Cele două tipuri de mișcări sunt separate de curbe invariante, trasate cu culori intense (verde spre galben și roșu).

Pe lângă regiunile de librație și de circulație, în unele grafice, se precădere cele obținute pentru $e = 0.2$ sau pentru $i \geq 70^\circ$, se disting fie în jurul punctelor de echilibru

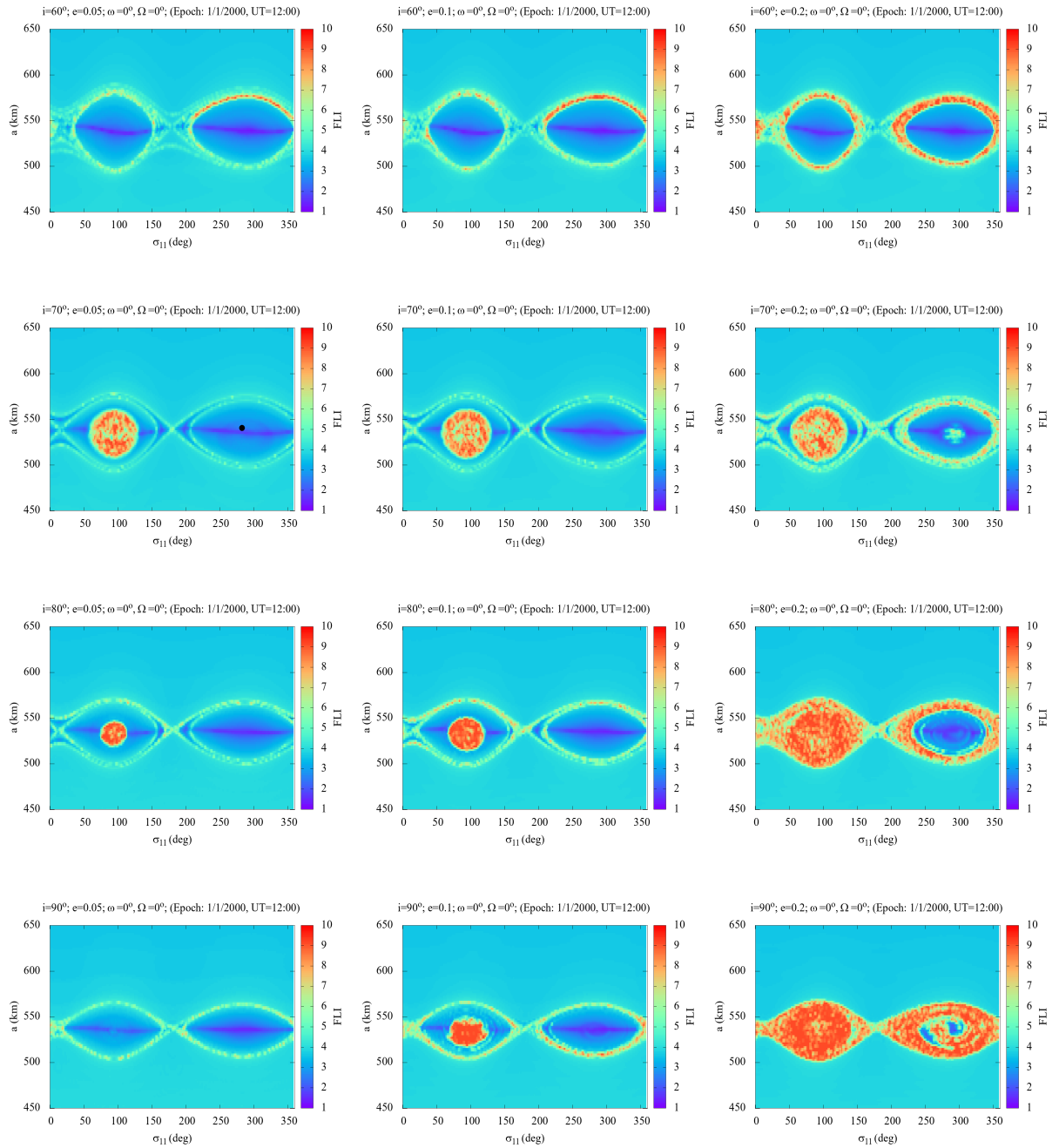


Figura 19: Indicatorul FLI calculat pentru 200×100 puncte din planul (σ_{11}, a) , înclinația $i = 60^\circ$ (graficele de pe prima linie), $i = 70^\circ$ (graficele de pe linia a doua), $i = 80^\circ$ (graficele de pe linia a treia) și $i = 90^\circ$ de pe ultima linie, excentricitatea $e = 0.05$ (graficele de pe coloana din stânga), $e = 0.1$ (graficele de pe a doua coloană) și $e = 0.2$ (graficele de pe coloana din dreapta). Celelalte condiții inițiale sunt $\omega = 0^\circ$, $\Omega = 0^\circ$ în timp ce parametrul \mathcal{A}/m are o valoare mică de ordinul $10^{-4} m^2/kg$. Momentul inițial este $1/1/2000$, ora $TU = 12^h$.

instabil, fie în jurul curbelor separatoare sau chiar intersectează zona de librație, zone galben-roșii ce marchează apariția comportamentelor haotice (impredictibile). Aceste zone se datorează suprapunerii rezonanțelor care formează multiplul de rezonanțe de ordinul 1 : 1. Pentru excentricități din ce în ce mai mari și înclinații din ce în ce mai

mari termenul T_{2200} dat de (32) scade în magnitudine (adică mărimea coeficientului funcției trigonometrice \cos scade dacă e sau i cresc. Pe de altă parte, magnitudinea majorității termenilor din dezvoltarea $\mathcal{H}_A^{res1:1}$ crește dacă e sau i cresc. Prin urmare, pentru valori mari ale excentricității și înclinației dinamice nu mai este dominată doar de un singur termen, suprapunerea rezonanțelor dând naștere unor comportamente complexe (haotice).

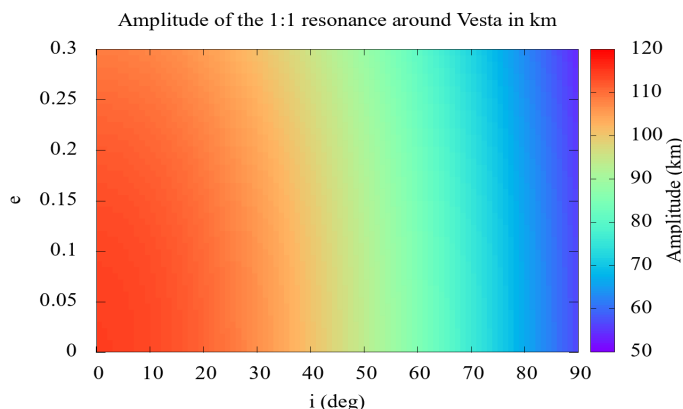


Figura 20: Amplitudinea rezonanței 1:1 în km, calculată prin reducerea modelului general la un model simplificat (similar unui pendul matematic), care ia în considerare doar termenul T_{2200} din dezvoltarea în serie a părții rezonante $\mathcal{H}_A^{res1:1}$.

Descreșterea magnitudinii termenului T_{2200} cu creșterea înclinației și excentricității este motivul pentru care amplitudinea zonelor de librație scade odată cu creșterea înclinației și excentricității. Comparând graficele obținute pentru $i = 1^\circ$ cu cele obținute pentru $i = 60^\circ$ și, respectiv, $i = 90^\circ$ este evident că amplitudinea maximă cu care variază semiaxa mare a în zonele de librație devine din ce în ce mai mică. De fapt, amplitudinea maximă se poate calcula reducând modelul general la un model simplificat în care considerăm doar termenul dominant T_{2200} din dezvoltarea în serie a funcției $\mathcal{H}_A^{res1:1}$. În acest caz, se obține un model similar unui pendul matematic a cărui hamiltonian are forma $H(q, p) = \alpha \frac{p^2}{2} - \beta \cos(q)$, unde α și β sunt doi parametri nenuli. Amplitudinea variației acțiunii p se poate calcula folosind formula $\Delta p = 4\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. După ce hamiltonianul simplificat este redus la un pendul matematic, putem calcula amplitudinea rezonanței 1 : 1 folosind aceste rezultate referitoare la pendulul matematic. Astfel, în figura 20 este reprezentată amplitudinea rezonanței 1 : 1 în funcție de înclinația i și excentricitatea e .

Comparând datele din figura 20, obținute analitic, cu dimensiunile insulelor de rezonanță, determinate prin calculul indicatorului FLI (vezi figurile 17, 18 și 19), se

obțin valori similare pentru amplitudinea rezonanțelor. Așadar, rezultatele numerice sunt complet argumentate de raționamente și rezultate analitice.

Putem proceda similar cu fiecare termen rezonant din $\mathcal{H}_A^{res1:1}$ și evalua amplitudinea (în km) a "insulei" rezonante pe care ar produce-o. Evaluăm astfel care dintre termenii rezonanți sunt cu adevărat relevanți din punct de vedere dinamic.

Pentru rezonanța de ordinul 1 : 1, spațiul fazelor este similar unui pendul matematic deoarece termenul T_{2200} este dominant, având magnitudinea mare comparativ cu magnitudinea tuturor celorlalți termeni rezonanți. Lucrul acesta nu se întâmplă în cazul rezonanțelor de un alt ordin, spre exemplu rezonanțele de ordinul 2 : 1 și 3 : 2. Studiul altor rezonanțe va reprezenta tema unor cercetări ulterioare.

În plus față de regiunile de librație și circulație, în unele diagrame din figurile 17, (18) și 19 se disting zone galben-roșii fie în vecinătatea punctelor de echilibru instabil și a curbelor separatoare, așa cum este cazul graficelor obținute pentru excentricitatea inițială $e = 0.2$, fie în interiorul insulelor de librație obținute pentru înclinații mari (vezi, de exemplu, diagramele de pe al doilea rând al figurii 19). Regiunile galben-roșii evidențiate în jurul curbelor separatoare indică o mișcare complexă (haotică); de obicei, tipul de evoluție al semiaxei mari și al unghiului rezonant, de la librație la rotație (sau invers), se schimbă într-un mod impredictibil. În schimb, regiunile galben-roșii reprezentate în interiorul insulelor de librație, obținute pentru $i = 70^\circ$ și $i = 90^\circ$ ($e = 0.1$ și $e = 0.2$), sunt neobișnuite pentru un pendul perturbat, deoarece valori mai mici ale indicatorului FLI sunt așteptate în apropierea centrului insulelor. Mai mult, aceste diagrame sunt asimetrice; pentru $e = 0.05$ și $e = 0.1$, doar insula corespunzătoare intervalului $\sigma_{11} \in [0^\circ, 180^\circ)$ include astfel de regiuni. Pentru a analiza dinamica din aceste regiuni, identificăm mai întâi efectele perturbatoare responsabile pentru apariția acestora.

Astfel, în figura 21, obținută pentru $i = 69^\circ$ și $e = 0.01$, calculăm indicatorul FLI pentru câteva modele simplificate, începând de la hamiltonianul compus din partea kepleriană și termenii rezonanți de grad și ordin $n = m = 2$, anume T_{2200} (vezi relația (32)) și T_{2212} , definit prin:

$$T_{2212} = \frac{\mu_A R_A^2 J_{22}}{a^3} \left\{ \frac{27}{8} (\sin i)^2 e^2 \cos[2(\sigma_{11} - \omega - \lambda_{22})] \right\}. \quad (33)$$

Rezultatele sunt prezentate în graficul din stânga sus a figurii 21. Adăugăm treptat mai multe perturbații celor deja considerate, și anume \bar{H}_{J_2} în graficul din dreapta sus al

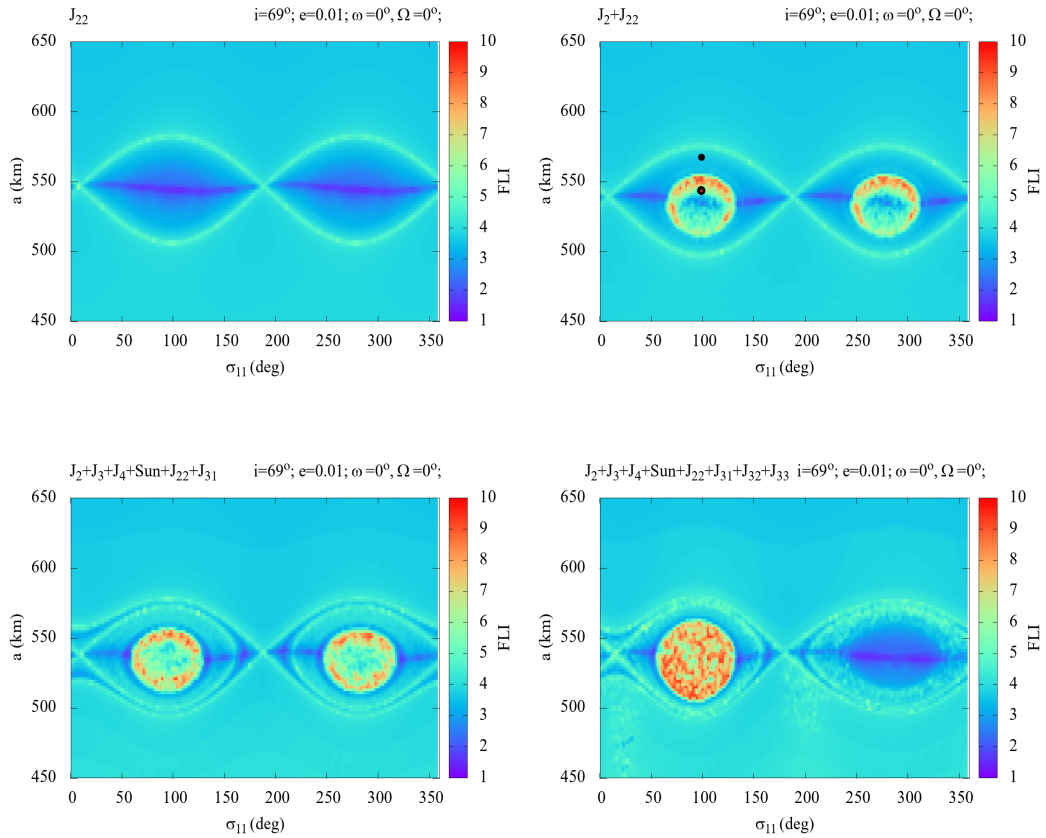


Figura 21: Indicatorul FLI calculat pentru $i = 69^\circ$, $e = 0.01$, $\omega = 0^\circ$ și $\Omega = 0^\circ$, luând în considerare perturbații precum: J_2 (stânga sus); J_2 și J_{22} (dreapta sus); J_2 , J_3 , J_4 , J_{22} , J_{31} și Soarele (stânga jos); toți termenii seculari și rezonanți până la gradul și ordinul $n = m = 3$, dar și J_4 și Soarele (dreapta jos). Orbitele marcate cu puncte negre conținute în graficul din dreapta sus, propagate pentru $a = 540$ km, $\sigma_{11} = 98^\circ$ și, respectiv, $a = 565$ km, $\sigma_{11} = 98^\circ$ sunt analizate în figura 22 și, respectiv, figura 23.

aceleiași figuri 21, apoi \overline{H}_{J_3} , \overline{H}_{J_4} , atracția Soarelui și termenii rezonanți J_{31} în graficul din stânga jos, iar în final termenii rezonanți J_{32} și J_{33} în graficul din dreapta jos al aceleiași figuri 21.

Graficele din partea de sus a figurii 21 arată că regiunile galben-roșii incluse în interiorul insulelor de librație sunt rezultatul unor interacțiuni complexe între termenul secular J_2 și termenii rezonanți T_{2200} și T_{2212} . Mai precis, aceste structuri galben-roșii se datorează suprapunerii componentelor $\tilde{d} = 2$, $q = 0$ și $\tilde{d} = 2$, $q = 2$ ale multipletului de rezonanță 1 : 1. Frecvența unghiului rezonant σ_{11} corespunzător componenteii $\tilde{d} = 2$, $q = 0$ a multipletului interacționează cu frecvența lui ω , având ca efect principal variații semnificative ale excentricității.

Pentru a ilustra acest fapt, figura 22 prezintă evoluția lui a , e , i , σ_{11} , ω și $\sigma_{11} - \omega$ pentru punctul marcat cu negru și situat în regiunea galben-roșie din graficul din

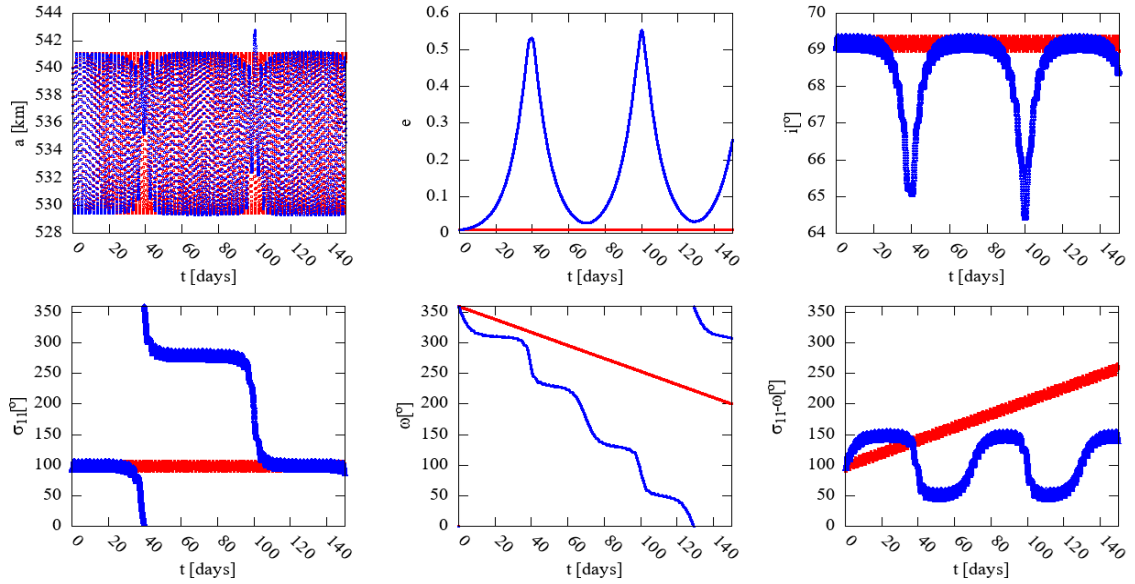


Figura 22: Evoluția orbitei cu datele inițiale $a = 540$ km, $e = 0.01$, $i = 69^\circ$, $\sigma_{11} = 98^\circ$, $\omega = 0^\circ$, $\Omega = 0^\circ$ (vezi graficul din dreapta sus a figurii 21), considerând următoarele perturbații: cu albastru sunt marcate efectele perturbatoare ale lui J_2 (vezi (21), T_{2200} (vezi (32))) și T_{2212} (vezi (33)), iar cu roșu sunt reprezentate efectele perturbatoare ale termenilor J_2 și T_{2200} . De la stânga la dreapta și de sus în jos, în această ordine, este reprezentată evoluția următoarelor: a , e , i , σ_{11} , ω și $\sigma_{11} - \omega$.

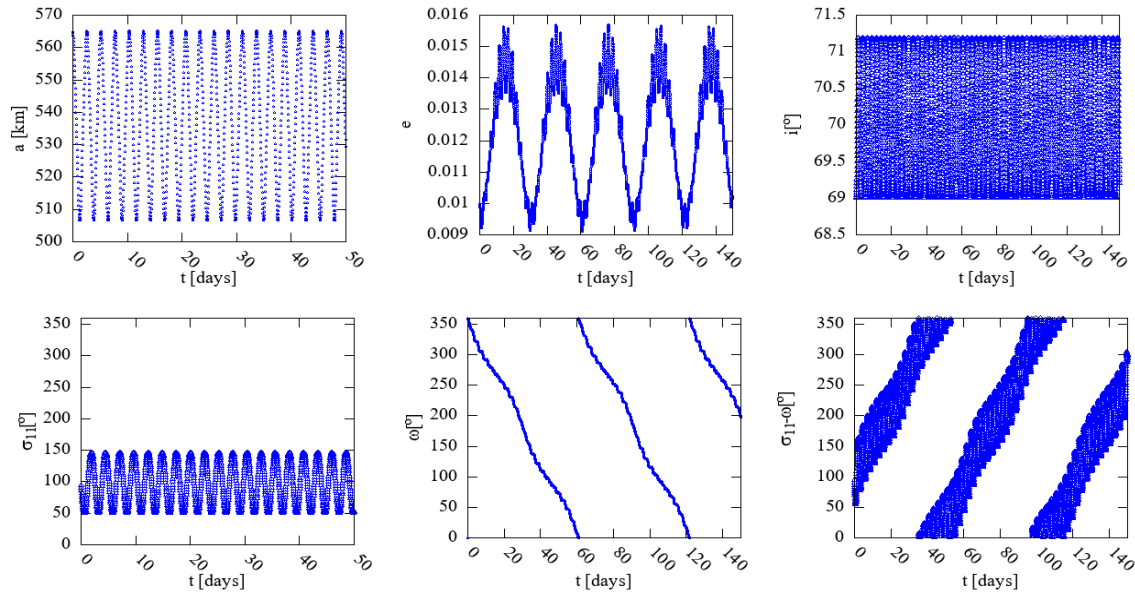


Figura 23: Evoluția orbitei cu datele inițiale $a = 565$ km, $e = 0.01$, $i = 69^\circ$, $\sigma_{11} = 98^\circ$, $\omega = 0^\circ$, $\Omega = 0^\circ$ (vezi graficul din dreapta sus a figurii 21), considerând următoarele perturbații: J_2 (vezi (21), T_{2200} (vezi (32))) și T_{2212} (vezi (33)). De la stânga la dreapta și de sus în jos, în această ordine, este reprezentată evoluția următoarelor: a , e , i , σ_{11} , ω și $\sigma_{11} - \omega$.

dreapta sus al figurii 21. Cu roșu (figura 22) sunt prezentate rezultatele obținute luând în considerare doar efectele lui J_2 și T_{2200} , în timp ce cu albastru este reprezentată evoluția elementelor atunci când sunt luate în considerare toate cele trei efecte: J_2 ,

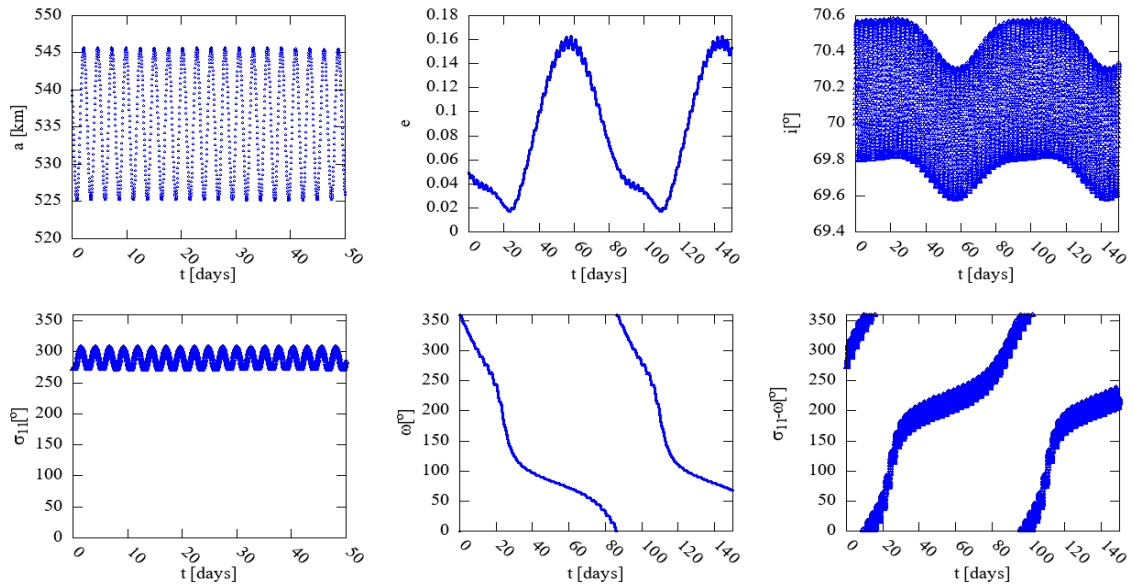


Figura 24: Evoluția orbitei cu datele inițiale $a = 540$ km, $e = 0.05$, $i = 70^\circ$, $\sigma_{11} = 270^\circ$, $\omega = 0^\circ$, $\Omega = 0^\circ$ (vezi graficul din stânga din a doua linie a figurii 19), luând în considerare toate efectele perturbatoare.

T_{2200} și T_{2212} . Ca efect al termenului T_{2200} , unghiul rezonant σ_{11} oscilează cu o amplitudine de 18° (vezi curba roșie din graficul dreapta jos al figurii 22). Unghiul ω scade ușor sub influența lui J_2 (vezi relația (23) și linia roșie din graficul de jos, mijloc, al aceleiași figuri).

Totuși, atunci când sunt luați în calcul toți cei trei termeni, curba albastră din graficul din dreapta jos a figurii 22 evidențiază mișcarea oscilatorie lung periodică a unghiului $\sigma_{11} - \omega$. Deoarece argumentul funcției trigonometrice din T_{2212} este unghiul „foarte” lent $\sigma_{11} - \omega$, care implică argumentul pericentrului ω , unul dintre principalele efecte ale rezonanței este variația semnificativă a excentricității (vezi graficul superior din mijloc al figurii 22). Deși perigeul acestei orbite pătrunde, la un moment dat, în interiorul asteroidului Vesta, am continuat propagarea acestei orbite pentru un interval de timp suficient de lung, pentru a evidenția efectele acestei rezonanțe. În mod clar, rezonanța afectează și înclinația, însă nu modifică în mod esențial comportamentul semiaxe mari.

Figura 23 prezintă evoluția celeilalte orbite marcate cu un punct negru în graficul din dreapta sus a figurii 21. Deoarece unghiul $\sigma_{11} - \omega$ nu este rezonant (vezi graficul din dreapta jos a figurii 23), excentricitatea rămâne mică (vezi graficul superior din mijloc al aceleiași figuri).

Revenind la figura 21, observăm că apar caracteristici noi atunci când sunt luate în considerare perturbații suplimentare, în special prin includerea termenilor rezonanți

J_{31} în graficul din stânga jos. În schimb, regiunea galben-roșie vizibilă în interiorul regiunii de librație corespunzătoare intervalului $\sigma_{11} \in [180^\circ, 360^\circ)$ (în graficul din stânga jos) dispare atunci când termenii rezonanți J_{32} și J_{33} sunt adăugați modelului existent (vezi graficul din dreapta jos). Acest fapt indică faptul că perturbațiile suplimentare pot distruge rezonanța care implică unghiurile σ_{11} și ω .

Pentru a analiza acest fenomen mai detaliat, figura 24 prezintă evoluția orbitei marcate cu un punct negru în graficul aflat pe al doilea rând în partea stângă a figurii 19. Luând în considerare toate efectele perturbatoare, se observă că unghiul $\sigma_{11} - \omega$ evoluează (în mod neliniar), iar excentricitatea evoluează în funcție de variația acestui unghi; mai precis, atunci când unghiul crește rapid (între ziua 0 și ziua 25, respectiv între ziua 75 și ziua 120), amplitudinea variației excentricității este mică, iar atunci când unghiul tinde să oscileze (în celelalte intervale de timp), amplitudinea variației excentricității este mai mare. Totuși, excentricitatea maximă rămâne sub valoarea 0.16, considerabil mai mică decât cea din figura 22.

Deoarece pentru orbite din ce în ce mai înclinate și excentrice, efectele perturbatoare ale termenului T_{2200} scad în magnitudine, în timp ce magnitudinea tuturor celorlalți termeni rezonanți crește, dinamica devine și mai complexă (vezi graficul din dreapta jos al figurii 19). Multiplele rezonanței 1 : 1 se suprapun, generând mișcări haotice, inclusiv o creștere rapidă a excentricității.

Analiza prezentată în acest capitol arată că, deși T_{2200} este termenul cel mai relevant pentru dinamica pe termen foarte scurt (câteva zile), pe intervale de timp mai lungi, de ordinul zecilor de zile, fenomenul de suprapunere a rezonanțelor poate modifica dramatic evoluția elementelor orbitale.

6 Concluzii și perspective

- exprimarea potențialului gravitațional trebuie adaptată atât în funcție de distanța particulei față de suprafața corpului atractor, cât și de orizontul temporal al simulării;
- alegerea formalismului matematic trebuie să fie adecvată în funcție de obiectivele urmărite;
- termenul armonic zonal J_2 determină variații seculare ale argumentului perihelului, ω , și ale longitudinii nodului ascendent, Ω , iar termenii armonici zonali J_3

și J_4 induc efecte lung periodice, care se traduc prin oscilații ale excentricității, e , și înclinației, i ;

- oblicitatea corpului central se evidențiază ca un parametru esențial în determinarea comportamentului dinamic al orbitelor din vecinătatea acestuia;
- condițiile pentru existența unor regimuri orbitale stabile sunt îndeplinite în jurul asteroidului Vesta pentru anumite distanțe și înclinații inițiale, ceea ce indică posibilitatea teoretică de a susține sateliți;
- în cazul asteroidului Eros, combinația dintre oblicitatea extrem de ridicată și forma sa alungită reduce semnificativ șansele de menținere a unei orbite stabile, deci probabilitatea ca acest asteroid să posede companioni este practic nulă;
- rezonanțele care apar în vecinătatea corpurilor nesferice pot fi clasificate în două mari categorii: sectorial-teserale și seculare;
- este prezentat un studiu cartografic al rezonanței 1:1 în jurul asteroidului Vesta;
- este evidențiat rolul fenomenului de suprapunere a rezonanțelor în generarea unor variații de amplitudine mare ale excentricității pe intervale scurte de timp;
- analiza realizată în prezenta teză poate fi extinsă în numeroase direcții, precum studiul altor rezonanțe teserale, studiul rezonanțelor seculare, studiul efectelor induse de presiunea radiației solare asupra particulelor cu parametrul A/m mare, dinamica globală în jurul a diverse obiecte nesferice, inclusiv planete, asteroizi și comete;
- un avantaj important al aparatului matematic construit în prezenta lucrare este că este dezvoltat și implementat astfel încât singurele date care sunt necesare pentru a utiliza programele se rezumă la cunoașterea:
 - rotației corpului nesferic (perioada și înclinația axei de rotație, date prin coordonatele ecliptice λ și β ale polului pozitiv);
 - coeficienților armonici C_{nm} și S_{nm} ai corpului nesferic;
 - elementelor orbitale ale corpului nesferic.
- programele implementate în acest studiu sunt generice și pot fi adaptate oricărei situații, dacă sunt cunoscute datele enumerate mai sus.

Bibliografie

- Alanazi M., Elaissi S., Allawi Y., Dubeibe F.L., Zotos E.E.: 2023, Orbital dynamics in the Hill problem with oblateness, *Results in Physics*, **53**, Article 106936.
- Allan R.R., Cook G.E.: 1964, The long period motion of the plane of a distant circular orbit, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **280**, 97–109.
- Archinal B.A., A'Hearn M.F., Bowell E., Conrad A., Consolmagno G.J., et al: 2011, Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009, *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **109**, 101–135.
- Archinal B.A., Acton C.H., A'Hearn M.F., Conrad A., Consolmagno G.J., et al.: 2018, Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015, *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **130**, 22.
- Arnold V.I.: 1989, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics, *Springer*, **60**, 978-0-387-96890-2.
- Beletsky V.V.: 2001, *Essays on the Motion of Celestial Bodies*, *Birkhäuser*, 978-3-7643-5866-2.
- Bills B.G., Nimmo F.: 2011, Forced obliquities and moments of inertia of Ceres and Vesta, *Icarus*, **213** (2), 496–509.
- Bottke W.F., Morbidelli A., Jedicke R., Petit J.M., Levison H.F., Michel P., Metcalfe T.S.: 2002, Debaised orbital and absolute magnitude distribution of the near-Earth objects, *Icarus*, **156** (2), 399–433.
- Boumchita W., Feng J.: 2024, The capture probability of Dawn into ground-track resonances with Vesta, *Celest Mech Dyn Astron*, **136** (3).
- Boumchita W., Feng J., Neishtadt A.: 2025, On estimations of Dawn spacecraft's capture probability into 1:1 ground-track resonance around Vesta, *Nonlinear Dynamics*, **113**, 14773–14789.
- Britt, D.T., Consolmagno, G.J.: 2002, Asteroid density, porosity, and structure, *Asteroids III*, 485–500.
- Brouwer D., Clemence G.M.: 1961, *Methods of Celestial Mechanics*, *Academic Press*.

- Burns J.A., Lamy P.L., Soter S.: 1979, Radiation Forces on Small Particles in the Solar System, *Icarus*, **40** (1), 1–48.
- Carry B.: 2012, Density of Asteroids, *Planetary and Space Science*, **73**, 98–118.
- Cavallari I., Grassi C., Gronchi G.F., Baù G., Valsecchi G.: 2023, A dynamical definition of the sphere of influence of the Earth, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **119** (107091).
- Celletti A.: 2010, *Stability and Chaos in Celestial Mechanics*, Springer.
- Celletti A., Galeş C., Pucacco G.: 2016, Bifurcation of lunisolar secular resonances for space debris orbits, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **15**, 1352–1383.
- Celletti A., Galeş C., Pucacco G., Rosengren A.: 2017, Analytical development of the lunisolar disturbing function and the critical inclination secular resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **127**, 259–283.
- Celletti A., Galeş C., Lhotka C.: 2020, (INVITED) Resonances in the Earth’s space environment, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **84**, 105185.
- Chanut T.G.G., Winter O.C., Tsuchida M.: 2015, 3D stability orbits close to 433 Eros using an effective polyhedral model method, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **438** (3), 2672–2682.
- Chirikov B.V.: 1979, A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems, *Physics Reports*, **52** (5), 263–379.
- Crifo J.F., Itkin A.L., Rodionov A.V.: 1990, The Near-Nucleus Coma Formed by Interacting Dusty Gas Jets Effusing from a Cometary Nucleus: I A numerical study of the interaction between two cometary jets, *Icarus*, **116** (1), 77–112.
- Cunningham C.: 1985, Asteroid pole positions: a survey, *The Minor Planet Bulletin*, **12** (2), 13–16.
- Daquin J., Legnaro E., Gkolias I., Efthymiopoulos C.: 2022, A deep dive into the 2g +h resonance: separatrices, manifolds and phase space structure of navigation satellites, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **134** (1).
- Delsate N.: 2011, Analytical and numerical study of the ground-track resonances of Dawn orbiting Vesta, *Planetary and Space Science*, **59**, 1372–1383.

- DeMeo F.E., Alexander C.M.O'D., Walsh K.J., Chapman C.R., Binzel R.P.: 2015, The compositional structure of the asteroid belt, *Asteroids IV*, University of Arizona Press, 13–41.
- Dionysios K., Voyatzis G., Tsinganis K.: 2021, A continuation approach for computing periodic orbits around irregular-shaped asteroids. An application to 433 Eros, *Advances in Space Research*, **68**, 4418–4433.
- Elvis M.: 2014, How many ore-bearing asteroids?, *Planetary and Space Science*, **91**, 20–26.
- Fahnestock E.G., Scheeres D.J.: 2008, Simulation and analysis of the dynamics of binary near-Earth Asteroid (66391) 1999 KW4, *Icarus*, **194** (2), 410–435.
- Feng J., Noomen R., Hou X., et al.: 2017, 1:1 Ground-track resonance in a uniformly rotating 4th degree and order gravitational field, *Celest Mech Dyn Astr*, **127**, 67–93.
- Froeschlé C., Lega E., Gonczi, R.: 1997, Fast Lyapunov indicators. Application to asteroidal motion, *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **67**, 41–62.
- Froeschlé C., Lega E.: 2000, On the structure of symplectic mappings. The fast Lyapunov indicator: a very sensitive tool, *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **78**, 167–195.
- Galeş C., Apetrii M., Nadabaică G.: 2025, Modelling the resonant dynamics of infinitesimal particles orbiting non-spherical rotating bodies, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **137** (28).
- Giacaglia G.E.O.: 1976, A note on Hansen's coefficients in satellite theory, *Celestial Mechanics*, **14**, 515–523.
- Giacaglia G.E.O.: 1977, The equations of motion of an artificial satellite in nonsingular variables, *Celestial Mechanics*, **15**, 191–215.
- Guzzo M., Lega E.: 2018, Geometric chaos indicators and computations of the spherical hypertube manifolds of the spatial circular restricted three-body problem, *Physica D*, **373**, 35–58.
- Hamilton D.P., Burns J.A.: 1991, Orbital stability zones about asteroids, *Icarus*, **92** (1), 118–131.
- Hamilton D.P., Burns J.A.: 1992, Orbital stability zones about asteroids II, *Icarus*, **96** (1), 43–64.

- Henon M.: 1969, Numerical exploration of the restricted problem. V. Hills case: periodic orbits and their stability, *Astronomy and Astrophysics*, **1**, 223–238.
- Henon M.: 1974, Vertical Stability of Periodic Orbits in the Restricted Problem. II. Hills case, *Astronomy and Astrophysics*, **30**, 317–321.
- Henon M.: 2003, New Families of Periodic Orbits in Hill’s Problem of Three Bodies, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **85**, 223–246.
- Hughes, S.: 1980, Earth satellite orbits with resonant lunisolar perturbations. I. Resonances dependent only on 767 inclination, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **372**, 243–264.
- Kaasalainen M., Āurech J., Warner B.D., et al.: 2007, Acceleration of the rotation of asteroid 1862 Apollo by radiation torques, *Nature*, **446** (7136), 420–422.
- Kaufman B., Dasenbrock R.: 1972, Higher Order Theory for Long-Term Behavior of Earth and Lunar Orbiters, *NRL Report 7527*, Naval Research Laboratory.
- Kaula W.M.: 1961, Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites, *Geophysical Journal International*, **5** (2), 104–133.
- Kaula W.M.: 1962, Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite, *Astronomical Journal*, **67**, 300–303.
- Kaula W.M.: 1966, Theory of satellite Geodesy, *Blaisdell, Waltham*.
- Konopliv A.S., Yoder C.F., Standish E.M., Yuan D.N., Sjogren W.L.: 2006, A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris, *Icarus*, **182**, 23–50.
- Konopliv A.S., Park R.S., Asmar S.W., Buccino D.R.: 2017, Dawn Vesta Derived Gravity Data, *NASA Planetary Data System, DAWN-A-RSS-5-VEGR-V2.0*
- Kozai Y.: 1959, The motion of a close earth satellite, *Astronomical Journal*, **64**, 367.
- Legnaro E., Efthymiopoulos C.: 2024, Secular dynamics and the lifetimes of lunar artificial satellites under natural force-driven orbital evolution, *Acta Astronautica*, **225**, 768–787.
- Lowry S.C., Fitzsimmons A., Pravec P., et al.: 2007, Direct Detection of the Asteroidal YORP Effect, *Science*, **316** (5822), 272–274.

- Ma C., Arias E.F., Eubanks T.M., Fey A.L., Gontier A.-M., Jacobs C.S., Sovers O.J., Archinal B.A., Charlot P.: 1998, The International Celestial Reference Frame as Realized by Very Long Baseline Interferometry, *The Astronomical Journal*, **116** (1), 516–546.
- Marchi S., McSween H.Y., O’Brien D.P., Schenk P. et al.: 2012, The Violent Collisional History of Asteroid 4 Vesta, *Science*, **336** (6082), 690–694.
- McCord T.B., Li J.-Y., Combe J.-P., McSween H.Y. et al.: 2012, Dark material on Vesta from the infall of carbonaceous volatile-rich material, *Nature*, **491** (7422), 83–86.
- MacMillan, W.D.: 1930, *The Theory of the Potential*, McGraw-Hill, New York.
- Milankovitch M.: 1939, Über die verwendung vektorieller bahnelemente in der störungsrechnung, *Bull. Acad. Sci. Math. Nat. A*, **6**, 1–70.
- Miller J.K., Konopliv A.S., Antreasian P.G., Bordi J.J., Chesley S., Helfrich C.E., Owen W.M., Wang T.C., Williams B.G., Yeomans D.K., Scheeres D.J.: 2002, Determination of Shape, Gravity, and Rotational State of Asteroid 433 Eros, *Icarus*, **155**, 3–17.
- Mondelo J.M., Broschart S.B., Villac B.F.: 2013, Ballistic transfers across the 1:1 resonance around Vesta following invariant manifolds, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **36**, 1119–1133.
- Morbidelli A.: 2002, *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*, Taylor & Francis.
- Murphy J.P., Siry J.W.: 1970, Lunar mascon evidence from Apollo orbits, *Planetary and Space Science*, **18**, 1137–1138, 1139–1141.
- Murray C.D., Dermott S.F.: 1999, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press.
- Nadabaică G.: 2024, On the long-term orbital evolution of a satellite revolving around an oblate body, *Cambridge University Press*, 159–164.
- Nadabaică G.: 2025, Secular dynamics around asteroids with joint effects of oblateness and third body perturbations, *Romanian Astronomical Journal*, **35**, 37–57.
- Naoz S., Farr W.M., Lithwick Y., Rasio F.A., Teyssandier J.: 2013, Secular dynamics in hierarchical three-body systems, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **431** (3), 2155–2171.

- Peale S.J.: 1976, Orbital Resonances in the Solar System, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **14**, 215–246.
- Perdiou A., Markellos V., Douskos C.: 2005, The Hill problem with oblate secondary; Numerical exploration, *Earth, Moon and Planets*, **97**, 127–145.
- Robinson M.S., Thomas P.C., Veverka J., Murchie S.L.: 2002, The Geology of 433 Eros, *Meteoritics & Planetary Science*, **37**, 1651–1684.
- Roy, A.E.: 2005, Orbital Motion, *Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia*, **4**.
- Rubincam, D.P.: 2000, Radiative spin-up and spin-down of small asteroids, *Icarus*, **148**, 2–11.
- Russell C.T. et al.: 2012, Dawn at Vesta: Testing the Protoplanetary Paradigm, *Science*, **336** (6082), 684–686.
- Russell C.T., Raymond C.A., Jaumann R., McSween H.Y. et al.: 2016, Dawn arrives at Ceres: Exploration of a small, volatile-rich world, *Science*, **353** (6303), 1008–1010.
- Scheeres D.J. et al.: 2003, The Orbital Dynamics Environment of 433 Eros: A Case Study for Future Asteroid Missions, *IPN Progress Report 42-152*.
- Scheeres D.J.: 2012, Orbital motion in Strongly perturbed environments, *Springer*.
- Schenk P., O'Brien D.P., Marchi S., Gaskell R. et al.: 2012, The Geologically Recent Giant Impact Basins at Vesta's South Pole, *Science*, **336** (6082), 694–697.
- Souchay J., Kinoshita H., Nakai H., Roux S.: 2003, A precise modeling of Eros 433 rotation, *Icarus*, **166**, 285–296.
- Seidelmann P., Urban S.E.: 2006, Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, *University Science Books*, **3**.
- Sierks H., Barbieri C., Lamy P.L. et al.: 2015, On the nucleus structure and activity of comet 67P/Churyumov–Gerasimenko, *Science*, **347**(6220), aaa1044.
- Siltala L., Granvik M.: 2021, Mass and Density of Asteroid (16) Psyche, *The Astrophysical Journal Letters*, **909**(1), L14.
- Sosa A., Fernández J. A.: 2009, Cometary masses derived from non-gravitational forces, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **393**(1), 192–214.

- Thomas P.C., Binzel R.P., Gaffey M.J., Storrs A.D., Wells E.N.: 1997, Hubble Space Telescope Images of Asteroid 4 Vesta in 1994, *Icarus*, **128** (1), 88–94.
- Tricarico P., Sykes M.V.: 2010, The dynamical environment of Dawn at Vesta, *Planetary and Space Science*, **58**, 1516–1525.
- Tsiganis K., Gomes R., Morbidelli A., Levison H.F.: 2005, Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System, *Nature*, **435** (7041), 459–461.
- Vaillant T., Laskar J., Rambaux N., Gastineau M.: 2019, Long-term orbital and rotational motions of Ceres and Vesta, *Astronomy and Astrophysics*, **622** (A95).
- Vallado, D.A.: 2007, Fundamentals of Astrodynamics and Applications, *Springer*, **3**.
- Villiers G.D., Chown M., Zietsman J.H.: 2024, A gravitational eye: a method for extracting maximum information from gravitational potentials, *Measurement Science and Technology*.
- Vincent J.-B., Bodewits D., Besse S. et al.: 2016, Summer fireworks on comet 67P, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **462**(S1), S184–S194.
- Vokrouhlický D., Milani A., Chesley S.R.: 2000, Yarkovsky Effect on Small Near-Earth Asteroids: Mathematical Formulation and Examples, *Icarus*, **148**, 118–138.
- Vokrouhlický D., Bottke W.F., Chesley S.R. et al.: 2015, The Yarkovsky and YORP Effects, *Asteroids IV*, University of Arizona Press, Tucson, 509–531.
- Werner R.A., Scheeres D.J.: 1996, Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia, *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **65**, 313–344.
- Werner R.A.: 1997, Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron, *Computers and Geosciences*, **23**, 1071–1077.
- Wisdom, J., Peale, S.J., Mignard, F.: 1984, The chaotic rotation of Hyperion, *Icarus*, **58**, 137–152.
- Wittick P.T., Russell R.P.: 2019, Mixed-model gravity representations for small celestial bodies using mascons and spherical harmonics, *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **131** (31).

Williams D.R.: 2012, NASA Planetary Fact Sheet, <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/asteroidfact.html>.

Yeomans D.K., Antreasian P.G., Barriot J.-P., Chesley S.R.: 2000, Radio Science Results During the NEAR-Shoemaker Spacecraft Rendezvous with Eros, *Science*, **289** (5487), 2085–2088.

Zuber M.T., Smith D.E., Cheng A.F., Garvin J.B.: 2000, The Shape of 433 Eros from the NEAR-Shoemaker Laser Rangefinder, *Science*, **289** (5487), 2097–2101.

JAXA Hayabusa2: 2020, *Hayabusa2 Project – Asteroid Explorer*, Japan Aerospace Exploration Agency, <https://global.jaxa.jp/projects/sas/hayabusa2/>.

NASA Science: 2020, *OSIRIS-REx Successfully Collects Sample from Bennu*, <https://science.nasa.gov/mission/osiris-rex/>.

NASA Science: 2023, *OSIRIS-REx Delivers NASA’s First Asteroid Sample to Earth*, <https://science.nasa.gov/missions/osiris-rex/osirisrex-delivers-nasas-first-asteroid-sample-to-earth>.

NASA: 2024, *NASA’s Asteroid Bennu Sample Reveals Mix of Life’s Ingredients*, <https://www.nasa.gov/news-release/nasas-asteroid-bennu-sample-reveals-mix-of-lifes-ingredients>.

NASA APPEL Knowledge Services: 2025, *Historic OSIRIS-REx Asteroid Sample Holds Surprises*, <https://appel.nasa.gov/2025/02/27/historic-osiris-rex-asteroid-sample-holds-surprises>.

NASA/JPL-Caltech: 2011, *Full view of Vesta (PIA15678)*, *NASA Jet Propulsion Laboratory Image Archive*, <https://www.jpl.nasa.gov/images/pia15678-full-view-of-vesta>.

NASA: n.d., *Eros 3D Model*, *NASA Science - Solar System Exploration*, <https://science.nasa.gov/resource/eros-3d-model/>.