Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi
Facultatea de Matematică

Rezumatul Tezei de Doctorat

PROBLEME DE BIARMONICITATE ŞI BICONSERVATIVITATE ÎN TEORIA SUBVARIETĂŢILOR

Coordonator ştiinţific,
Prof.Univ.Dr. Cezar ONICIUC

Doctorand,
Simona NISTOR (căs. BARNA)

IAŞI, 2017

CUPRINS

CAPITOLUL 0

Introducere

Pentru început vom prezenta câteva idei care să încurajeze studiul subvarietăţilor biarmonice şi biconservative, apoi vom descrie, pe scurt, rezultatele noi pe care le-am obţinut şi le-am prezentat în următoarele capitole.

În ultimii ani *subvarietăţile biconservative* s-au dovedit a constitui un domeniu de cercetare foarte interesant (vezi, de exemplu, [6, 13–15, 23, 34, 35]). Această teorie s-a dezvoltat din teoria *subvarietăţilor biarmonice*, dar mulţimea subvarietăţilor biconservative este mai amplă decât cea a subvarietăţilor biarmonice. Din acest motiv, ne-am concentrat atenţia asupra studiului subvarietăţilor biconservative.

Fie (M^m, g) şi (N^n, h) două varietăţi riemanniene. Noţiunea de *aplicaţie biarmonică* a fost introdusă de J. Eells şi J.H. Sampson în [11], care au definit-o ca fiind un punct critic al *funcţionalei bienergiei*

$$E_2 : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}, \quad E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2 \ v_g,$$

unde $\tau(\varphi)$ este câmpul de tensiune asociat aplicaţiei netede $\varphi : M \to N$, în raport cu metricile fixate g şi h. Ecuaţia Euler-Lagrange corespunzătoare, obţinută de G.Y. Jiang în [19], este

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi \tau(\varphi) - \operatorname{trace}_g R^N(d\varphi, \tau(\varphi))d\varphi = 0,$$

unde $\tau_2(\varphi)$ este *câmpul de bitensiune* al lui φ, $\Delta^\varphi = -\operatorname{trace}_g(\nabla^\varphi\nabla^\varphi - \nabla^\varphi_\nabla)$ este rough Laplacian definit pe secţiunile lui $\varphi^{-1}(TN)$ şi R^N este câmpul tensorial de curbură al lui N definit prin

$$R^N(X, Y)Z = [\nabla^N_X, \nabla^N_Y]Z - \nabla^N_{[X,Y]}Z.$$

O imersie izometrică $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ sau, simplu, o subvarietate M a lui N, se numeşte *biarmonică* dacă φ este o aplicaţie biarmonică. Orice aplicaţie armonică este, în mod evident, biarmonică. Deci, suntem interesaţi de studierea aplicaţiilor biarmonice şi non-armonice, care se numesc *propriu-biarmonice*. Cum o subvarietate M a lui N este minimală dacă şi numai dacă $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ este o aplicaţie armonică, atunci prin subvarietate propriu-biarmonică înţelegem o subvarietate biarmonică non-minimală.

Potrivit lui D. Hilbert ([18]), unei funcţionale oarecare E îi putem asocia un câmp tensorial simetric S de tip $(1, 1)$, numit *tensorul tensiune-impuls*, care este conservativ, i.e., $\operatorname{div} S = 0$, în punctele critice ale lui E. În cazul particular al funcţionalei bienergiei E_2, G.Y. Jiang ([20]) a definit tensorul tensiune-impuls, numit şi *tensorul bitensiune-impuls* S_2 prin

$$\begin{aligned}\langle S_2(X), Y\rangle =& \frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2\langle X, Y\rangle + \langle d\varphi, \nabla\tau(\varphi)\rangle\langle X, Y\rangle \\ &- \langle d\varphi(X), \nabla_Y\tau(\varphi)\rangle - \langle d\varphi(Y), \nabla_X\tau(\varphi)\rangle,\end{aligned}$$

şi a demonstrat că

$$\operatorname{div} S_2 = -\langle \tau_2(\varphi), d\varphi\rangle.$$

Deci, dacă φ este biarmonică, i.e., este un punct critic al lui E_2, atunci $\operatorname{div} S_2 = 0$. Interpretarea variaţională a lui S_2 a fost dată în [22].

Se poate arăta că dacă $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ este o imersie izometrică, atunci $\operatorname{div} S_2 = 0$ dacă şi numai dacă partea tangentă a câmpului de bitensiune asociat lui φ se anulează. O subvarietate M se numeşte *biconservativă* dacă $\operatorname{div} S_2 = 0$.

Subvarietăţile biconservative au fost studiate pentru prima dată în 1995 de Th. Hasanis şi Th. Vlachos în [17]. În această lucrare, hipersuprafeţele biconservative în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$ au fost numite *H-hipersuprafeţe*, şi ele au fost complet clasificate în $\mathbb{R}^3$ şi $\mathbb{R}^4$. De fapt, autorii au căutat hipersuprafeţele biarmonice în $\mathbb{R}^4$, şi strategia lor a fost să determine mai întâi hipersuprafeţele cu $\tau_2(\varphi)^\top = 0$ şi apoi să verifice dacă astfel de hipersuprafeţe satisfac şi $\tau_2(\varphi)^\perp = 0$. Ei au demonstrat că niciuna din hipersuprafeţele cu $\tau_2(\varphi)^\top = 0$ satisface $\tau_2(\varphi)^\perp = 0$, cu excepţia celor minimale. Menţionăm că preferăm termenul "subvarietăţi biconservative", în locul "H-subvarietăţi" din moment ce aceste subvarietăţi sunt caracterizate de anularea divergenţei lui S_2 (autorii în [17] nu au folosit tensorul bitensiune-impuls).

Pe de altă parte, studiul subvarietăţilor cu curbură medie constantă nenulă, i.e., al subvarietăţilor CMC, şi al subvarietăţilor minimale, reprezintă un domeniu de cercetare foarte activ în Geometria Diferenţială de mai bine de 50 de ani. Există două modalităţi de a dezvolta noi direcţii de cercetare:

- studiul subvarietăţilor CMC care satisfac anumite ipoteze geometrice adiţionale (de exemplu, CMC şi biarmonicitate);
- studiul hipersuprafeţelor în forme spaţiale, i.e., al hipersuprafeţelor în spaţii cu curbură secţională constantă, care sunt "departe de a fi CMC".

Studiul suprafeţelor biconservative se încadrează în ambele direcţii de mai sus.

Într-adevăr, subvarietăţile biconservative în varietăţi riemanniene oarecare (şi, în particular, suprafeţele biconservative) care sunt şi CMC au anumite proprietăţi remarcabile, aşa cum vom vedea în Capitolul 4.

Hipersuprafeţele CMC în forme spaţiale sunt, în mod evident, biconservative, deci mai interesant este studiul hipersuprafeţelor biconservative care nu sunt CMC, i.e., cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise. Mai mult, acolo unde $\operatorname{grad} f \neq 0$, o suprafaţă biconservativă într-o formă spaţială 3-dimensională, i.e., un spaţiu 3-dimensional cu curbura secţională constantă, satisface

$$f\Delta f + |\operatorname{grad} f|^2 + \frac{4}{3}cf^2 - f^4 = 0,$$

unde Δ este operatorul Laplace-Beltrami pe M, i.e., funcţia curbura medie satisface o ecuaţie diferenţială de ordin 2 cu derivate parţiale.

De asemenea, am dori sa subliniem faptul că sub ipoteza de biconservativitate anumite rezultate cunoscute din teoria subvarietăţilor pot fi extinse la contexte mai generale. De exemplu, funcţia Hopf generalizată, asociată unei suprafeţe biconservative CMC într-o varietate riemanniană, este olomorfă (comparativ cu rezultatele clasice: funcţia Hopf asociată unei suprafaţe CMC într-o formă spaţială 3-dimensională $N^3(c)$ este olomorfă, şi funcţia Hopf generalizată asociată unei suprafeţe PMC într-o formă spaţială n-dimensională este olomorfă). Un alt exemplu constă în faptul că o subvarietate biconservativă pseudoombilicală $\varphi : M^m \to N^n$, cu $m \neq 4$, este CMC, pentru orice varietate N.

Teza este organizată în modul următor. În **Capitolul 1**, vom stabili notaţiile şi vom reaminti anumite rezultate cunoscute din geometria riemanniană, despre varietăţi şi subvarietăţi riemanniene. Apoi, ne vom concentra asupra suprafeţelor CMC în forme spaţiale 3-dimensionale. Reamintim aici faimoasa problemă Ricci:

Dată o suprafaţă abstractă, care sunt condiţiile necesare şi suficiente pentru ca ea să admită o imersie minimală în $N^3(c)$?

În continuare, se prezintă funcţionala energiei şi funcţionala bienergiei E şi E_2, şi câmpurile tensoriale tensiune-impuls S şi bitensiune-impuls S_2 corespunzătoare. De asemenea, se studiază interpretarea variaţională a acestor câmpuri tensoriale. În final, sunt date câteva caracterizări şi proprietăţi ale subvarietăţilor biarmonice şi biconservative, şi în particular ale suprafeţelor biconservative.

Principalele rezultate ale acestui capitol sunt Teorema 1.20 şi Teorema 1.22, obţinute în [6], care descriu proprietăţi ale suprafeţelor biconservative în forme spaţiale 3-dimensionale cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct, şi Teorema 1.23, obţinută în [12], care este un rezultat de unicitate ce afirmă:

Dacă avem o suprafaţă abstractă care admite două imersii biconservative în $N^3(c)$ astfel încât funcţiile curbură medie corespunzătoare celor două imersii au gradientul diferit de zero în orice punct, atunci imersiile diferă printr-o izometrie a lui $N^3(c)$.

Capitolul 2 cuprinde două secţiuni. Notăm că ecuaţiile locale explicite ale suprafeţelor biconservative în forme spaţiale 3-dimensională $N^3(c)$, cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct, au fost obţinute în [6] şi în [14]. Mai mult, în [6], s-a arătat că curbura gaussiană a unor astfel de suprafeţe biconservative în $N^3(c)$ satisface următoarea ecuaţie

$$(c-K)\Delta K - |\operatorname{grad} K|^2 - \frac{8}{3}K(c-K)^2 = 0, \tag{0.1}$$

care este foarte asemănătoare cu cea folosită de G. Ricci-Curbastro în [32], în 1895, pentru a caracteriza intrinsec suprafeţele minimale în $\mathbb{R}^3$.

După cum vom vedea în prima secţiune, putem folosi această proprietate a suprafeţelor biconservative pentru a demonstra rezultate similare cu cele obţinute în [21], [24], sau [32], în contextul nostru. Mai precis, dată o suprafaţă abstractă care satisface ecuaţia intrinsecă (0.1) cu $c = 0$, printr-o transformare conformă simplă, ea devine o suprafaţă Ricci în $\mathbb{R}^3$ (vezi Teorema 2.4). Cazul când $c \neq 0$ este diferit. Dată o suprafaţă abstractă care admite o imersie biconservativă în $N^3(c)$ cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct (deci, o condiţie mai puternică decât (0.1)), atunci există o transformare conformă a metricii de pe suprafaţă (de această dată mai complicată), astfel încât suprafaţa cu noua metrică devine o suprafaţă Ricci în $N^3(c)$ (vezi Teorema 2.7).

O implicaţie a faptului că o suprafaţă abstractă $\left(M^2, g\right)$ admite o imersie biconservativă în $N^3(c)$, cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct, este faptul că, *curbele de nivel ale lui K sunt cercuri în M cu curbura constantă*

$$\kappa = \frac{3|\operatorname{grad} K|}{8(c-K)}, \tag{0.2}$$

o condiţie găsită în [6]. Începem a doua secţiune cu Teorema 2.8 în care se prezintă anumite condiţii echivalente cu (0.2).

Un alt rezultat important al acestui capitol este Teorema 2.14 care afirmă

Dată o suprafaţă abstractă care satisface $c - K > 0$, $\operatorname{grad} K \neq 0$ în orice punct şi (0.2), şi admite o imersie biconservativă în $N^3(c)$, atunci $\operatorname{grad} f \neq 0$ (şi imersia biconservativă este unică).

Unul din rezultatele principale ale acestei teze este **Teorema 2.15** care spune că:

O suprafaţă abstractă admite local o scufundare biconservativă în $N^3(c)$, cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct, dacă şi numai dacă $c - K > 0$, $\operatorname{grad} K \neq 0$ în orice punct şi îndeplineşte condiţia (0.2).

Deci, chiar dacă noţiunea de subvarietate biconservativă aparţine, în mod evident, geometriei extrinseci, în cazul particular al suprafeţelor biconservative în $N^3(c)$, ele admit şi o caracterizare intrinsecă.

Capitolul se încheie cu Teorema 2.17 în care sunt prezentate alte trei condiţii echivalente cu (0.2). Aceste condiţii se exprimă în raport cu anumite coordonate izoterme. Acest rezultat va fi foarte folositor în construcţia suprafeţelor biconservative complete în $\mathbb{R}^3$ şi în $\mathbb{S}^3$, aşa cum vom vedea în capitolul următor.

Scopul **Capitolului 3** este de a construi suprafeţe biconservative *complete* în $\mathbb{R}^3$ şi în $\mathbb{S}^3$. Începem cu rezultatele locale extrinseci şi intrinseci şi le extindem la rezultate globale extrinseci şi intrinseci. *Problema locală extrinsecă* constă în găsirea tuturor suprafeţelor biconservative în forme spaţiale 3-dimensionale cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct, iar *problema locală intrinsecă* reprezintă determinarea tuturor suprafeţelor abstracte $\left(M^2, g\right)$ care satisfac $c - K > 0$, $\operatorname{grad} K \neq 0$ în orice punct al lui M, şi condiţia (0.2). Apoi, considerăm problema globală, din nou, din punct de vedere extrinsec şi intrinsec. A rezolva *problema globală extrinsecă* înseamnă a determina toate suprafeţele biconservative complete în forme spaţiale 3-dimensionale care satisfac $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense. A rezolva *problema globală intrinsecă* înseamnă a determina toate suprafeţele abstracte complete $\left(M^2, g\right)$ care pe o submulţime deschisă şi densă satisface $c - K > 0$, $\operatorname{grad} K \neq 0$ şi curbele de nivel ale lui K sunt cercuri în M cu curbura κ dată în (0.2).

Aşa cum am precizat mai sus, pentru problema globală extrinsecă cerem ca $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense. Impunem această ipoteză deoarece credem că

Conjectura 1. *Fie M^2 o suprafaţă biconservativă în $N^3(c)$. Dacă există o submulţime deschisă U a lui M astfel încât* $\operatorname{grad} f = 0$ *pe U, atunci* $\operatorname{grad} f = 0$ *pe M.*

În Teorema 3.13 şi în Teorema 3.18 demonstrăm Conjectura 1 în anumite cazuri particulare. Credem că demonstraţia Conjecturii 1 va rezulta din analiza PDE-ului obţinut în Corolarul 1.19. De asemenea, credem că şi următorul rezultat este adevărat

Conjectura 2. *Singurele suprafeţe biconservative, complete, simplu conexe în $\mathbb{R}^3$ sau în $\mathbb{S}^3$, cu* $\operatorname{grad} f \neq 0$ *în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense, sunt cele date în Teorema 3.10 şi în Teorema 3.40, respectiv.*

În Teorema 3.14 şi în Teorema 3.19 demonstrăm Conjectura 2 în anumite cazuri particulare.

Sintetizând cele două conjecturi de mai sus, putem formula următorul rezultat:

Conjectura 3. *Singurele suprafeţe biconservative, non-CMC, complete, simplu conexe în $\mathbb{R}^3$ sau în $\mathbb{S}^3$ sunt cele date în Teorema 3.10 şi în Teorema 3.40, respectiv.*

Mai mult, putem formula şi următoarea problemă deschisă care ar rezulta din proprietatea imersiei biconservative dată în Teorema 3.40 de a fi dublu periodică sau nu.

Problemă deschisă. *Există suprafaţe biconservative, non-CMC în $\mathbb{S}^3$ care sunt compacte?*

Acest capitol are două secţiuni. În prima secţiune, considerăm problema globală şi construim în două moduri suprafeţele biconservative complete în $\mathbb{R}^3$, cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense. O modalitate este de a utiliza caracterizarea locală extrinsecă în $\mathbb{R}^3$ şi apoi să "lipim" două astfel de suprafeţe locale pentru a obţine o suprafaţă biconservativă completă (Teorema 3.5). Cealaltă modalitate este mai analitică şi constă în utilizarea teoremei de caracterizare locală intrinsecă pentru a obţine o imersie biconservativă completă de la $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_0}\right)$ în $\mathbb{R}^3$ cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ pe o submulţime deschisă şi densă a lui $\mathbb{R}^2$; aici, C_0 este o constantă pozitivă şi deci obţinem o familie unu-parametrică de soluţii (Teorema 3.10). Merită menţionat faptul că, printr-o transformare simplă a metricii g_{C_0}, $\left(\mathbb{R}^2, \sqrt{-K_{C_0}} g_{C_0}\right)$ este (intrinsec) izometrică cu un elicoid (Teorema 3.11).

Prima secţiune se încheie cu o subsecţiune în care studiem unicitatea suprafeţelor biconservative complete în $\mathbb{R}^3$. Unul din cele mai importante rezultate ale acestui capitol este Teorema 3.17, care afirmă că

Dacă S este o suprafaţă regulată, biconservativă, compactă în $\mathbb{R}^3$, atunci S este CMC şi deci o sferă rotundă.

Mai mult, se demonstrează o teoremă mai puternică, **Teorema 3.19**, care este unul din cele mai importante rezultate ale acestei teze şi care afirmă

Dacă S este o suprafaţă regulată, biconservativă, non-CMC, completă în $\mathbb{R}^3$, atunci $S = \tilde{S}_{\tilde{C}_0}$, unde $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$ este suprafaţa de rotaţie biconservativă completă în $\mathbb{R}^3$ dată în Teorema 3.5.

În secţiunea a doua, considerăm problema globală a suprafeţelor biconservative în $\mathbb{S}^3$, cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense. Ca şi în cazul lui $\mathbb{R}^3$, folosim clasificarea locală extrinsecă a suprafeţelor biconservative în $\mathbb{S}^3$, dar de această dată procesul de "lipire" nu este aşa clar ca în cazul lui $\mathbb{R}^3$. Mai departe, ne schimbăm punctul de vedere şi folosim caracterizarea locală intrinsecă a suprafeţelor biconservative în $\mathbb{S}^3$. Construim suprafaţa riemanniană completă $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_1,C_1^*}\right)$ care admite o imersie biconservativă în $\mathbb{S}^3$ cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ pe o submulţime deschisă şi densă a lui $\mathbb{R}^2$ şi arătăm că, până la izometrii, există o unică familie unu-parametrică de astfel de suprafeţe riemanniene indexate după C_1 (Teorema 3.40). Construcţia de mai sus constă în două etape: mai întâi, obţinem o suprafaţă de rotaţie completă în $\mathbb{R}^3$, a cărei acoperire universală este $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_1,C_1^*}\right)$, şi apoi, determinăm explicit imersia biconservativă în $\mathbb{S}^3$. **Teorema 3.40** este unul din principalele rezultate ale tezei.

În ultimul capitol, **Capitolul 4**, vom folosi tehnici diferite faţă de cele folosite în capitolele anterioare, şi vom studia într-un mod unitar proprietăţile suprafeţelor biconservative în varietăţi riemanniene oarecare.

Acest capitol este împărţit în trei secţiuni. În primele două secţiuni, prezentăm câteva caracterizări ale suprafeţelor biconservative care satisfac anumite ipoteze geometrice adiţionale. Cum acestea sunt caracterizate de $\operatorname{div} S_2 = 0$, unde S_2 este un câmp tensorial simetric de tip $(1,1)$, anumite proprietăţi ale suprafeţelor biconservative vor rezulta din proprietăţile generale ale unui câmp tensorial simetric de tip $(1,1)$ cu divergenţa nulă aşa cum ele sunt prezentate în Teorema 4.9. În Teorema 4.10, găsim legătura dintre biconservativitate, proprietatea operatorului formă A_H de a fi câmp tensorial Codazzi, olomorfia funcţiei Hopf generalizată şi proprietatea suprafeţei de a avea curbura medie constantă. De asemenea, se demonstrează că o suprafaţă biconservativă într-o varietate oarecare, cu curburile principale constante, poate fi imersată în $N^3(c)$ având fie A_H, fie S_2, ca operator formă (Teorema 4.18 şi Teorema 4.19).

În ultima secţiune, găsim expresia lui rough Laplacian $\Delta^R S_2$ al lui S_2 şi apoi determinăm o formulă de tip Simons (Propoziţia 4.21). O consecinţă a Propoziţiei 4.21 este Teorema 4.23, care afirmă

Dacă $\varphi : M^2 \to N^n$ este o suprafaţă biconservativă, CMC, compactă şi $K \geq 0$, atunci $\nabla A_H = 0$ şi M este plată sau pseudoumbilicală.

Cu o tehnică diferită obţinem un rezultat similar pentru cazul necompact complet (Teorema 4.24).

La realizarea acestei lucrări, autorul a beneficiat de suportul oferit de

- PN-II-RU-TE-2014-4-0004; Director: Prof.Dr. Dorel Fetcu.
- PN-II-RU-TE-2014-4-0019; Director: Prof.Dr. Marius Durea.
- POSDRU/187/1.5/S/155397; Director: Assoc.Prof. Liviu-George Maha.

CAPITOLUL 1

Preliminarii

În acest capitol vom explica notaţiile şi vom reaminti câteva rezultate fundamentale pe care le vom utiliza mai departe.

Convenţii. Pe tot parcursul acestei teze, toate varietăţile, metricile şi aplicaţiile sunt netede, i.e., de clasă C^∞, şi vom indica diverse metrici riemanniene cu acelaşi simbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Toate varietăţile şi subvarietăţile sunt presupuse conexe şi orientate. De asemenea, printr-o subvarietate CMC înţelegem o subvarietate cu curbura medie constantă diferită de zero, iar printr-o hipersuprafaţă non-CMC înţelegem o hipersuprafaţă cu grad $f \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise W a lui M, unde f reprezintă funcţia curbură medie a lui M, şi W nu coincide, în mod necesar, cu M, i.e., $M \setminus W$ poate fi o mulţime nevidă.

Majoritatea rezultatelor din acest capitol sunt cunoscute şi ele se pot regăsi, de exemplu, în cărţile [3, 4, 7, 10, 30]. Totuşi remarcăm faptul că rezultatul din Corolarul 1.19 apare aici pentru prima dată, iar Teorema 1.23 reprezintă, de asemenea, un rezultat original, care a fost inclus în articolul [12].

1.1 Varietăţi riemanniene. Generalităţi

Propoziţia 1.1 (Formula Ricci). *Fie (M^m, g) o varietate riemanniană şi T un câmp tensorial de tip $(1,1)$. Atunci*

$$\left(\nabla^2 T\right)(X, Y, Z) - \left(\nabla^2 T\right)(Y, X, Z) = R(X, Y)T(Z) - T(R(X, Y)Z), \qquad X, Y, Z \in C(TM).$$

Definiţia 1.2. Un câmp tensorial simetric T de tip $(1,1)$ se numeşte *câmp tensorial Codazzi* dacă

$$(\nabla T)(X, Y) = (\nabla T)(Y, X), \qquad X, Y \in C(TM).$$

Observaţia 1.3. Dacă $\nabla T = 0$, atunci T este câmp tensorial Codazzi.

Încheiem această secţiune cu un rezultat legat de completitudinea suprafeţelor riemanniene.

Propoziţia 1.4 ([16]). *Fie M^m o subvarietate şi considerăm metricile g şi $\tilde{g}$ pe M. Dacă (M, g) este completă şi $\tilde{g} - g$ este nenegativ definită în orice punct al lui M, i.e., $(\tilde{g} - g)(X, X) \geq 0$, pentru orice $X \in C(TM)$, atunci $(M, \tilde{g})$ este, de asemenea, completă.*

1.2 Subvarietăţi riemanniene. Generalităţi

O subvarietate a unei varietăţi riemanniene (N^n, h) este o pereche (M^m, φ), unde M^m este o varietate şi $\varphi : M \to N$ este o imersie. Întotdeauna considerăm pe M metrica indusă $g = \varphi^* h$, deci $\varphi : (M, g) \to$

(N,h) este o imersie izometrică (pentru simplitate vom scrie $\varphi : M \to N$ fără a menţiona metricile). De asemenea, scriem $\varphi : M \to N$, sau chiar M, în locul lui (M,φ).

Pentru a fixa notaţiile, reamintim ecuaţiile fundamentale de ordin întâi pentru o subvarietate a unei varietăţi riemanniene, din moment ce aceste ecuaţii definesc a doua formă fundamentală, operatorul formă şi conexiunea în fibratul normal. Fie $\varphi : M^m \to N^n$ o imersie izometrică. Pentru orice $p \in M$, $T_{\varphi(p)}N$ poate fi scris ca suma ortogonală directă

$$T_{\varphi(p)}N = d\varphi(T_pM) \oplus d\varphi(T_pM)^\perp, \tag{1.1}$$

şi $NM = \bigcup_{p\in M} d\varphi(T_pM)^\perp$ reprezintă fibratul normal al lui φ (sau al lui M), în N.

Notăm cu ∇ şi ∇^N conexiunile Levi-Civita pe M şi N, respectiv, şi cu ∇^φ conexiunea indusă în fibratul pull-back $\varphi^{-1}(TN) = \bigcup_{p\in M} T_{\varphi(p)}N$. Ţinând cont de descompunerea din (1.1), se obţine *formula Gauss*

$$\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) = d\varphi(\nabla_X Y) + B(X,Y), \qquad X,Y \in C(TM),$$

unde $B \in C(\odot^2 T^*M \otimes NM)$ este a doua formă fundamentală a lui M în N. Aici T^*M reprezintă fibratul cotangent al lui M. Câmpul vectorial curbură medie al lui M în N se defineşte prin $H = (\operatorname{trace} B)/m \in C(NM)$, unde trace este considerată în raport cu metrica g.

Mai mult, dacă $\eta \in C(NM)$, atunci se obţine *formula Weingarten*

$$\nabla^\varphi_X \eta = -d\varphi(A_\eta(X)) + \nabla^\perp_X \eta, \qquad X \in C(TM),$$

unde $A_\eta \in C(T^*M \otimes TM)$ este operatorul formă al lui M în N în direcţia lui η, şi $\nabla^\perp$ este conexiunea indusă în fibratul normal. Mai mult, $\langle B(X,Y),\eta\rangle = \langle A_\eta(X),Y\rangle$, pentru orice $X,Y \in C(TM)$, $\eta \in C(NM)$. În cazul hipersuprafeţelor, notăm $f = \operatorname{trace} A$, unde $A = A_\eta$ şi η este câmpul vectorial normal unitar, şi avem $H = (f/m)\eta$; f este *(de m ori) funcţia curbură medie.*

O subvarietate M a lui N se numeşte *subvarietate PMC* dacă H este nenul şi paralel în fibratul normal.

Când nu este pericol de confuzie, identificăm local M cu imaginea sa prin φ, X cu $d\varphi(X)$ şi $\nabla^\varphi_X d\varphi(Y)$ cu $\nabla^N_X Y$. Cu aceste identificări în minte, putem rescrie formulele Gauss şi Weingarten

$$\nabla^N_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y) \quad \text{şi} \quad \nabla^N_X \eta = -A_\eta(X) + \nabla^\perp_X \eta.$$

Ecuaţiile fundamentale ale unei subvarietăţi, Gauss, Codazzi şi Ricci, se presupun bine cunoscute şi nu le vom mai enunţa aici.

O hipersuprafaţă $\varphi : M^m \to N^{m+1}$ se numeşte *umbilicală* dacă $A = (f/m)I$, unde I este câmpul tensorial identitate de tip $(1,1)$. Similar, o subvarietate $\varphi : M^m \to N^n$ se numeşte *pseudoumbilicală* dacă $A_H = |H|^2 I$.

Teorema 1.5. *(Teorema fundamentală pentru subvarietăţi)*

(i) Fie M^m o varietate riemanniană simplu conexă, $\pi : E \to M$ un fibrat vectorial de dimensiune p compatibil cu conexiunea ∇, şi fie B o secţiune simetrică a fibratului homeomorfism $\operatorname{Hom}(TM \times TM, E) \equiv (TM \otimes TM)^* \otimes E = (TM)^* \otimes (TM)^* \otimes E$, *i.e., $B : C(TM) \times C(TM) \to E$ este o aplicaţie simetrică şi $C^\infty(M)$ biliniară. Definim, pentru fiecare secţiune locală η a lui E, o aplicaţie $A_\eta : C(TM) \to C(TM)$ prin $\langle A_\eta(X),Y\rangle = \langle B(X,Y),\eta\rangle$, pentru orice $X,Y \in C(TM)$.*

Dacă B şi ∇ satisfac ecuaţiile Gauss, Codazzi şi Ricci pentru cazul curburii secţionale constante c, atunci există o imersie izometrică $\varphi : M^m \to N^{n=m+p}(c)$, şi un fibrat vectorial izomorfism

$\tilde{\varphi}: C(E) \to C(NM)$ în lungul lui φ, astfel încât pentru orice $X, Y \in C(TM)$ şi orice η, ξ secţiuni locale ale lui E:

$$\langle \tilde{\varphi}(\eta), \tilde{\varphi}(\xi) \rangle = \langle \eta, \xi \rangle, \quad \tilde{\varphi}(B(X,Y)) = \tilde{B}(X,Y), \quad \tilde{\varphi}(\nabla_X \eta) = \nabla^{\perp}_X \tilde{\varphi}(\eta),$$

unde $\tilde{B}$ şi $\nabla^{\perp}$ sunt forma a doua fundamentală şi conexiunea normală corespunzătoare lui φ, respectiv.

(ii) Presupunem că φ şi ψ sunt două imersii izometrice ale varietăţii conexe M^m în $N^{n=m+k}(c)$. Fie NM_φ, B_φ şi $\nabla^{\perp}_\varphi$ fibratul normal, forma a doua fundamentală şi conexiunea normală ale lui φ, respectiv; considerăm NM_ψ, B_ψ şi $\nabla^{\perp}_\psi$ obiectele corespunzătoare lui ψ. Dacă există un fibrat vectorial izomorfism $\tilde{\tilde{\varphi}}: C(NM)_\varphi \to C(NM)_\psi$ astfel încât, pentru orice $X, Y \in C(TM)$ şi orice $\eta, \xi \in C(NM)_\varphi$:

$$\langle \tilde{\tilde{\varphi}}(\eta), \tilde{\varphi}(\xi) \rangle = \langle \eta, \xi \rangle, \quad \tilde{\tilde{\varphi}}(B_\varphi(X,Y)) = B_\psi(X,Y), \quad \tilde{\tilde{\varphi}}(\nabla^{\perp}_{\varphi_X} \eta) = \nabla^{\perp}_{\psi_X} \tilde{\tilde{\varphi}}(\eta),$$

atunci există o izometrie $F: N^n(c) \to N^n(c)$ astfel încât $\psi = F \circ \varphi$ şi $dF|_{NM_\varphi} = \tilde{\tilde{\varphi}}$.

1.3 Suprafeţe CMC în forme spaţiale 3-dimensionale

Reamintim acum, un rezultat clasic de existenţă a suprafeţelor CMC în forme spaţiale 3-dimensionale, i.e., în spaţii 3-dimensionale cu curbura secţională constantă $N^3(c)$.

Teorema 1.6. *([21]) Fie $\varphi: \left(M^2, g\right) \to N^3(c)$ o suprafaţă CMC. Atunci $|H|^2 + c - K \geq 0$ în orice punct, şi $|H|^2 + c - K = 0$ în orice punct, i.e., M este umbilicală, fie $|H|^2 + c - K = 0$ doar în punctele izolate. Mai mult, pe mulţimea unde $|H|^2 + c - K > 0$, avem*

$$\Delta \log \left(|H|^2 + c - K\right) + 4K = 0, \tag{1.2}$$

sau, echivalent,

$$\left(|H|^2 + c - K\right) \Delta K - |\operatorname{grad} K|^2 + 4K \left(|H|^2 + c - K\right)^2 = 0. \tag{1.3}$$

Observaţia 1.7. ([32]) Dacă $\varphi: \left(M^2, g\right) \to N^3(c)$ este o suprafaţă minimală, i.e., $H = 0$, concluziile Teoremei 1.6 rămân adevărate.

De asemenea, avem (un fel) de reciprocă a Teoremei 1.6.

Teorema 1.8. *([21]) Fie $\left(M^2, g\right)$ o suprafaţă abstractă, $c \in \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}^*_+$. Presupunem că pe M avem $a^2 + c - K > 0$ şi*

$$4K + \Delta \log \left(a^2 + c - K\right) = 0.$$

Atunci $\left(M^2, g\right)$ admite local o scufundare CMC în $N^3(c)$ cu $|H| = a$.

Observaţia 1.9. ([32]) Dacă $a = 0$ în Teorema 1.8, atunci $\left(M^2, g\right)$ admite local o scufundare minimală în $N^3(c)$.

1.4 Funcţionala energiei şi funcţionala bienergiei

O *aplicaţie armonică* $\varphi: (M^m, g) \to (N^n, h)$ între două varietăţi riemanniene este un punct critic al *funcţionalei energiei*

$$E: C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}, \quad E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |d\varphi|^2 \ v_g,$$

şi este caracterizată de anularea *câmpului său de tensiune*

$$\tau(\varphi) = \operatorname{trace}_g \nabla d\varphi.$$

Studiul câmpului tensiune-impuls asociat unei funcţionale oarecare a fost iniţiat de D. Hilbert ([18]). Dată o funcţională E, îi putem asocia un câmp tensorial simetric 2-covariant astfel încât $\operatorname{div} S = 0$ în punctele critice ale lui E. Dacă E este funcţionala energiei, P. Baird şi J. Eells în [1], A. Sanini în [33], au definit câmpul tensorial

$$S = \frac{1}{2}|d\varphi|^2 g - \varphi^* h,$$

şi au demonstrat că $\operatorname{div} S = -\langle \tau(\varphi), d\varphi \rangle$.

Deci, S poate fi ales ca fiind tensorul tensiune-impuls al funcţionalei energiei. Merită menţionat că S are şi o interpretare variaţională. Într-adevăr, putem fixa o aplicaţie $\varphi : M^m \to (N^n, h)$ şi gândi E ca fiind definită pe mulţimea metricilor riemanniene pe M. Punctele critice ale acestei noi funcţionale sunt metricile riemanniene determinate de anularea tensorului tensiune-impuls S corespunzător lor.

Menţionăm că dacă $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ este o imersie izometrică arbitrară, atunci $\operatorname{div} S = 0$. O generalizare naturală a aplicaţiilor armonice o reprezintă aplicaţiile biarmonice. O *aplicaţie biarmonică* $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ între două varietăţi riemanniane este un punct critic al *funcţionalei bienergiei*

$$E_2 : C^\infty(M, N) \to \mathbb{R}, \qquad E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2 \ v_g,$$

şi este caracterizată de anularea *câmpului său de bitensiune*

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^\varphi \tau(\varphi) - \operatorname{trace}_g R^N(d\varphi, \tau(\varphi))d\varphi.$$

Remarcăm faptul că *ecuaţia biarmonică* $\tau_2(\varphi) = 0$ este o ecuaţie eliptică de ordin patru, neliniară şi orice aplicaţie armonică este biarmonică. O aplicaţie biarmonică care nu este armonică se numeşte propriu-biarmonică.

În [20], G.Y. Jiang a definit tensorul tensiune-impuls S_2 al funcţionalei bienergiei (numit şi *tensorul bitensiune-impuls*) prin

$$\begin{aligned}\langle S_2(X), Y\rangle =& \frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 \langle X, Y\rangle + \langle d\varphi, \nabla\tau(\varphi)\rangle\langle X, Y\rangle \\ &- \langle d\varphi(X), \nabla_Y \tau(\varphi)\rangle - \langle d\varphi(Y), \nabla_X \tau(\varphi)\rangle.\end{aligned}$$

Se demonstrează că $\operatorname{div} S_2 = -\langle \tau_2(\varphi), d\varphi\rangle$.

Ca şi în cazul armonic, câmpul tensorial S_2 are o interpretare variaţională. Fixăm o aplicaţie $\varphi : M^m \to (N^n, h)$ şi definim o nouă funcţională

$$\mathcal{F}_2 : \mathcal{G} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_2(g) = E_2(\varphi),$$

unde $\mathcal{G} = \{g \ : \ g \text{ este o metrică riemanniană pe } M\}$. Punctele critice ale acestei noi funcţionale sunt metricile riemanniene determinate de anularea tensorului bitensiune-impuls S_2 corespunzător lor.

Menţionăm că, dacă $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ este o imersie izometrică, atunci nu rezultă $\operatorname{div} S_2 = 0$.

Finalizăm această secţiune cu următoarele proprietăţi al tensorului bitensiune-impuls.

Propoziţia 1.10. *Considerăm o subvarietate $\varphi : M^m \to N^n$. Atunci avem:*

(i) $S_2 = -\frac{m^2}{2}|H|^2 I + 2mA_H$;

(ii) $\operatorname{trace} S_2 = m^2|H|^2\left(2 - \frac{m}{2}\right)$;

(iii) $\operatorname{div} S_2 = -\frac{m^2}{2}\operatorname{grad}\left(|H|^2\right) + 2m \operatorname{div} A_H$;

(iv) $|S_2|^2 = m^4|H|^4\left(\frac{m}{4} - 2\right) + 4m^2\left|A_H\right|^2$.

1.5 Subvarietăţi biarmonice şi biconservative

O subvarietate $\varphi : M^m \to N^n$ se numeşte *biarmonică* dacă imersia izometrică φ este o aplicaţie biarmonică de la (M^m, g) la (N^n, h).

Dacă $\operatorname{div} S_2 = 0$ pentru o subvarietate M a lui N, atunci M se numeşte *biconservativă*. Deci, M este biconservativă dacă şi numai dacă partea tangentă a câmpului de bitensiune se anulează.

Avem următoarea teoremă de caracterizare a subvarietăţilor biarmonice, obţinută prin descompunerea câmpului de bitensiune în partea tangentă şi în partea normală.

Teorema 1.11. *O subvarietate M^m a unei varietăţi riemanniene N^n este biarmonică dacă şi numai dacă*

$$\operatorname{trace} A_{\nabla^\perp_\cdot H}(\cdot) + \operatorname{trace} \nabla A_H + \operatorname{trace}\left(R^N(\cdot, H)\cdot\right)^\top = 0$$

şi

$$\Delta^\perp H + \operatorname{trace} B\left(\cdot, A_H(\cdot)\right) + \operatorname{trace}\left(R^N(\cdot, H)\cdot\right)^\perp = 0,$$

unde $\Delta^\perp$ este laplacianul în fibratul normal.

Mai multe variante ale rezultatului de mai sus au fost obţinute în [8, 22, 29]. De aici deducem anumite formule de caracterizare pentru biconservativitate.

Propoziţia 1.12. *Fie $\varphi : M^m \to N^n$ o subvarietate. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) *M este biconservativă;*

(ii) $\operatorname{trace} A_{\nabla^\perp_\cdot H}(\cdot) + \operatorname{trace} \nabla A_H + \operatorname{trace}\left(R^N(\cdot, H)\cdot\right)^\top = 0$;

(iii) $\frac{m}{2} \operatorname{grad}\left(|H|^2\right) + 2 \operatorname{trace} A_{\nabla^\perp_\cdot H}(\cdot) + 2 \operatorname{trace}\left(R^N(\cdot, H)\cdot\right)^\top = 0$;

(iv) $2 \operatorname{trace} \nabla A_H - \frac{m}{2} \operatorname{grad}\left(|H|^2\right) = 0$.

Următoarele proprietăţi sunt imediate.

Propoziţia 1.13. *Dacă M^m este o subvarietate a unei varietăţi riemanniene N^n cu $\nabla A_H = 0$, atunci M este biconservativă.*

Propoziţia 1.14. *Dacă M^m este o subvarietate PMC a unei varietăţi riemanniene $N^n(c)$, atunci M este biconservativă.*

Propoziţia 1.15 ([2])**.** *Dacă M^m este o subvarietate pseudoumbilicală a unei varietăţi riemanniene N^n cu $m \neq 4$, atunci M este CMC.*

În cazul particular al hipersuprafeţelor, Teorema 1.11 ne oferă următorul rezultat.

Teorema 1.16 ([2, 31])**.** *Dacă M^m este o hipersuprafaţă a unei varietăţi riemanniene N^{m+1}, atunci M este biarmonică dacă şi numai dacă*

$$2A(\operatorname{grad} f) + f \operatorname{grad} f - 2f\left(\operatorname{Ricci}^N(\eta)\right)^\top = 0,$$

şi

$$\Delta f + f|A|^2 - f \operatorname{Ricci}^N(\eta, \eta) = 0,$$

unde η este câmpul vectorial normal unitar al lui M în N şi f este funcţia curbură medie a lui M.

Propoziţia 1.17. *O hipersuprafaţă M^m într-o formă spaţială $N^{m+1}(c)$ este biconservativă dacă şi numai dacă*

$$A(\operatorname{grad} f) = -\frac{f}{2} \operatorname{grad} f. \tag{1.4}$$

Corolarul 1.18. *Orice hipersuprafaţă CMC în $N^{m+1}(c)$ este biconservativă.*

Deci, hipersuprafeţele biconservative pot fi privite ca următorul pas natural după cel al studierii suprafeţelor CMC.

Considerând divergenţa în ecuaţia (1.4) şi folosind faptul că $\operatorname{div} A = \operatorname{grad} f$, obţinem următorul corolar.

Corolarul 1.19. *Fie M^m o hipersuprafaţă biconservativă în $N^{m+1}(c)$. Atunci*

$$f\Delta f - 3|\operatorname{grad} f|^2 - 2\langle A, \operatorname{Hess} f\rangle = 0.$$

În continuare vom studia proprietăţile suprafeţelor biconservative în $N^3(c)$.

Teorema 1.20 ([6])**.** *Fie $\varphi : M^2 \to N^3(c)$ o suprafaţă biconservativă cu* $\operatorname{grad} f \neq 0$ *pe M. Atunci avem $f > 0$ şi*

$$f\Delta f + |\operatorname{grad} f|^2 + \frac{4}{3}cf^2 - f^4 = 0, \tag{1.5}$$

unde Δ este operatorul Laplace-Beltrami pe M.

Observaţia 1.21. Remarcăm faptul că în teorema de mai sus, obţinută în [6], autorii nu au observat că $\operatorname{grad} f \neq 0$ pe M implică $f \neq 0$ în orice punct.

Se arată că în jurul oricărui punct al lui M există o hartă locală orientată pozitiv $(U; u, v)$ astfel încât $f = f(u, v) = f(u)$ şi (1.5) este echivalentă cu

$$ff'' - \frac{7}{4}\left(f'\right)^2 - \frac{4}{3}cf^2 + f^4 = 0, \tag{1.6}$$

i.e., f trebuie să fie o soluţie a unei *ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin doi.*

În continuare vom găsi o *relaţie intrinsecă* pe care (M, g) trebuie să o satisfacă.

Teorema 1.22 ([6])**.** *Fie $\varphi : M^2 \to N^3(c)$ o suprafaţă biconservativă cu* $\operatorname{grad} f \neq 0$ *pe M. Atunci curbura gaussiană satisface*

(i)

$$K = \det A + c = -\frac{3f^2}{4} + c; \tag{1.7}$$

(ii) $c - K > 0$, $\operatorname{grad} K \neq 0$ *on M, şi curbele sale de nivel sunt cercuri în M cu curbura constantă*

$$\kappa = \frac{3|\operatorname{grad} K|}{8(c-K)};$$

(iii)

$$(c-K)\Delta K - |\operatorname{grad} K|^2 - \frac{8}{3}K(c-K)^2 = 0, \tag{1.8}$$

unde Δ este operatorul Laplace-Beltrami pe M.

În timp ce existenţa imersiilor biconservative în forme spaţiale 3-dimensionale cu gradientul funcţiei curburii medie diferit de zero în orice punct va fi demonstrată în următorul capitol, unicitatea este studiată aici.

Teorema 1.23 ([12])**.** *Fie $\left(M^2, g\right)$ o suprafaţă abstractă şi $c \in \mathbb{R}$. Dacă M admite două imersii biconservative în $N^3(c)$ astfel încât funcţiile curbură medie corespunzătoare celor două imersii au gradientul nenul în orice punct al lui M, atunci imesiile diferă printr-o izometrie a lui $N^3(c)$.*

CAPITOLUL 2

Suprafeţe biconservative în forme spaţiale 3-dimensionale

În acest capitol vom studa două probleme: mai întâi vom considera suprafeţele biconservative (M^2, g) într-o formă spaţială 3-dimensională $N^3(c)$, cu funcţia curbura medie f satisfăcând $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct, şi vom determina o anumită metrică riemanniană g_r pe M astfel încât (M^2, g_r) să fie o suprafaţă Ricci în $N^3(c)$; apoi, vom obţine condiţiile necesare şi suficiente pe care trebuie să le satisfacă o suprafaţă abstractă astfel încât ea sa admită o scufundare locală în $N^3(c)$ ca o suprafaţă biconservativă, non-CMC.

Majoritatea rezultatelor din acest capitol sunt originale şi ele au fost incluse în [12] şi în [27]. Totuşi sunt şi anumite rezultate care sunt prezentate aici pentru prima dată (vezi Teorema 2.8, Teorema 2.14).

2.1 Biconservativitatea şi minimalitatea în $N^3(c)$

O suprafaţă abstractă (M^2, g) cu curbura gaussiană K satisface *condiţia Ricci în raport cu c* (sau simplu *condiţia Ricci*) dacă $c - K > 0$ şi metrica $\sqrt{c-K}g$ este plată, unde $c \in \mathbb{R}$ este o constantă. În acest caz, (M^2, g) se numeşte *suprafaţă Ricci în raport cu c* (sau simplu *suprafaţă Ricci*). Aşa cum vom vedea în continuare în acest capitol, dacă $c = 0$, o suprafaţă care satisface condiţia Ricci poate fi local izometric scufundată în $\mathbb{R}^3$ ca o suprafaţă minimală. De fapt, există o familie unu-parametrică de astfel de scufundări. H. B. Lawson în [21] a generalizat acest rezultat arătând că condiţia Ricci este o caracterizare intrinsecă a suprafeţelor minimale în forme spaţiale $N^3(c)$, cu curbura secţională c.

În cele ce urmează vom vedea că condiţia Ricci enunţată anterior, este echivalentă cu o ecuaţie foarte asemănătoare cu ecuaţia (1.8), care este satisfăcută de curbura gaussiană a unei suprafeţe biconservative, non-CMC într-o formă spaţială $N^3(c)$. Apoi, o întrebare naturală este dacă există o modalitate simplă de a transforma suprafeţele care satisfac (1.8) în suprafeţe Ricci în $N^3(c)$. După cum vom vedea, răspunsul la această întrebare este afirmativ.

Propoziţia următoare ne oferă câteva caracterizări echivalente cu condiţia Ricci.

Propoziţia 2.1. *Fie (M^2, g) o suprafaţă abstractă cu curbura gaussiană K satisfăcând $c - K > 0$, unde $c \in \mathbb{R}$. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) K satisface

$$(c-K)\Delta K - |\operatorname{grad} K|^2 - 4K(c-K)^2 = 0; \tag{2.1}$$

(ii) K satisface

$$\Delta \log(c-K) + 4K = 0; \tag{2.2}$$

(iii) metrica $\sqrt{c-K}g$ este plată.

Mai mult, dacă $c = 0$, avem o a patra condiţie echivalentă:

(iv) metrica $(-K)g$ are curbura gaussiană constantă egală cu 1.

Observaţia 2.2. Propoziţia 2.1 a fost demonstrată pentru prima dată în cazul în care $c = 0$ în [24].

Cu o tehnică similară cu cea folosită în demonstraţia Propoziţiei 2.1, se obţine următorul rezultat.

Propoziţia 2.3. *Fie (M^2, g) o suprafaţă abstractă cu curbura gaussiană K satisfăcând $c - K > 0$, unde $c \in \mathbb{R}$ este o constantă. Atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) K satisface ecuaţia (1.8)*;*

(ii) $\Delta \log(c - K) + \frac{8}{3}K = 0$;

(iii) metrica $(c - K)^{3/4}g$ este plată.

Mai mult, dacă $c = 0$, avem o a patra condiţie echivalentă:

(iv) metrica $(-K)g$ are curbura gaussiană constantă egală cu $1/3$.

Acum, putem formula primul nostru rezultat important.

Teorema 2.4. *Fie (M^2, g) o suprafaţă abstractă cu curbura gaussiană negativă şi care satisface*

$$K\Delta K + |\operatorname{grad} K|^2 + \frac{8}{3}K^3 = 0. \tag{2.3}$$

Atunci $(M^2, \sqrt{-K}g)$ este o suprafaţă Ricci în $\mathbb{R}^3$.

Din Teorema 1.22 şi Teorema 2.4, se obţine următorul corolar.

Corolarul 2.5. *Fie (M^2, g) o suprafaţă biconservativă în $\mathbb{R}^3$, unde g este metrica indusă pe M. Dacă $(\operatorname{grad} f)(p) \neq 0$ în orice punct $p \in M$, atunci $(M^2, \sqrt{-K}g)$ este o suprafaţă Ricci.*

Observaţia 2.6. În acelaşi mod ca în Teorema 2.4, se arată că dacă (M^2, g) este o suprafaţă Ricci în $\mathbb{R}^3$ cu curbura gaussiană K negativă, atunci curbura gaussiană a lui $(M^2, (-K)^{-1}g)$ este negativă şi satisface ecuaţia (2.3).

Chiar dacă metoda folosită pentru a demonstra Teorema 2.4 nu funcţionează în cazul formelor spaţiale care nu sunt plate, totuşi este posibil să extindem acest rezultat şi la cazul formelor spaţiale, după cum putem vedea în teorema următoare.

Teorema 2.7. *Fie (M^2, g) o suprafaţă biconservativă într-o formă spaţială $N^3(c)$ cu metrica indusă g şi curbura gaussiană K. Dacă $(\operatorname{grad} f)(p) \neq 0$ în orice punct $p \in M$, atunci, pe o submulţime deschisă şi densă, $(M^2, (c - K)^r g)$ este o suprafaţă Ricci în $N^3(c)$, unde r este o funcţie definită local, care satisface*

$$K + \Delta\left(\frac{1}{4}\log(c - K_r) + \frac{r}{2}\log(c - K)\right) = 0, \tag{2.4}$$

cu curbura gaussiană K_r of $(c - K)^r g$ dată de

$$K_r = (c - K)^{-r}\left(\frac{3 - 4r}{3}K + \frac{1}{2}\log(c - K)\Delta r + (c - K)^{-1}g(\operatorname{grad} r, \operatorname{grad} K)\right).$$

2.2 O caracterizare intrinsecă a suprafeţelor biconservative în $N^3(c)$

În timp ce oricare din condiţiile echivalente din Propoziţia 2.1 caracterizează intrinsec suprafeţele minimale în forme spaţiale $N^3(c)$, condiţiile similare din Propoziţia 2.3 nu reuşesc să facă acelaşi lucru în cazul suprafeţelor biconservative. În această secţiune, vom găsi condiţiile necesare şi suficiente pe care o suprafaţă abstractă trebuie să le satisfacă pentru a admite o scufundare locală în $N^3(c)$ ca o suprafaţă biconservativă, non-CMC.

Conform Teoremei 1.22, (ii), prezentăm anumite condiţii echivalente cu ipoteza potrivit căreia curbele de nivel ale curburii gaussiene sunt cercuri.

Teorema 2.8. *Fie $\left(M^2, g\right)$ o suprafaţă abstractă care satisface $c - K(p) > 0$ şi $(\operatorname{grad} K)(p) \neq 0$ în orice punct $p \in M$, unde $c \in \mathbb{R}$. Fie $X_1 = (\operatorname{grad} K)/|\operatorname{grad} K|$ şi $X_2 \in C(TM)$ două câmpuri vectoriale pe M astfel încât $\{X_1(p), X_2(p)\}$ este o bază orientată pozitiv, pentru orice $p \in M$. Atunci, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) curbele de nivel ale lui K sunt cercuri în M cu curbura constantă

$$\kappa = \frac{3|\operatorname{grad} K|}{8(c-K)} = \frac{3X_1K}{8(c-K)};$$

(ii)

$$X_2\left(X_1K\right) = 0 \quad \text{şi} \quad \nabla_{X_2}X_2 = \frac{-3X_1K}{8(c-K)}X_1;$$

(iii)

$$\nabla_{X_1}X_1 = \nabla_{X_1}X_2 = 0, \quad \nabla_{X_2}X_2 = -\frac{3X_1K}{8(c-K)}X_1, \quad \nabla_{X_2}X_1 = \frac{3X_1K}{8(c-K)}X_2.$$

Observaţia 2.9. Curbele integrale ale lui X_2 sunt cercuri în M cu curbura constantă

$$\kappa = \frac{3X_1K}{8(c-K)} = \frac{3|\operatorname{grad} K|}{8(c-K)}$$

şi curbele integrale ale lui X_1 sunt geodezice ale lui M.

Următorul rezultat descrie metricile pentru care curbele de nivel ale lui K sunt cercuri.

Teorema 2.10. *Fie $\left(M^2, g\right)$ o suprafaţă abstractă care satisface $(\operatorname{grad} K)(p) \neq 0$ şi $c - K(p) > 0$ în orice punct $p \in M$, unde $c \in \mathbb{R}$. Fie $X_1 = (\operatorname{grad} K)/|\operatorname{grad} K|$ şi $X_2 \in C(TM)$ două câmpuri vectoriale pe M astfel încât $\{X_1(p), X_2(p)\}$ este o bază ortonormată orientată pozitiv pentru orice $p \in M$. Dacă curbele de nivel ale lui K sunt cercuri în M cu curbura constantă*

$$\kappa = \frac{3X_1K}{8(c-K)} = \frac{3|\operatorname{grad} K|}{8(c-K)},$$

atunci, pentru orice $p_0 \in M$, există o parametrizare orientată pozitiv $X = X(u, v)$ a lui M definită pe o vecinătate $U \subset M$ a lui p_0 astfel încât

(i) curba $u \to X(u, 0)$ este o curbă integrală a lui X_1 cu $X(0, 0) = p_0$ şi $v \to X(u, v)$ este o curbă integrală a lui X_2, pentru orice u şi v;

(ii) $K(u, v) = (K \circ X)(u, v) = (K \circ X)(u, 0) = K(u)$, pentru orice (u, v);

(iii) pentru orice (u, v) avem

$$g_{11}(u, v) = \frac{9}{64}\left(\frac{K'(u)}{c - K(u)}\right)^2 v^2 + 1,$$
$$g_{12}(u, v) = -\frac{3K'(u)}{8(c - K(u))}v, \quad g_{22}(u, v) = 1;$$

(iv) curbura gaussiană $K = K(u)$ satisface

$$24(c-K)K'' + 33(K')^2 + 64K(c-K)^2 = 0.$$

Observaţia 2.11. Este uşor de verificat că, în ipotezele Teoremei 2.10, ecuaţia

$$24(c-K)K''+33\left(K'\right)^2+64K(c-K)^2=0$$

poate fi rescrisă

$$(c-K)\Delta K-|\operatorname{grad}K|^2-\frac{8}{3}K(c-K)^2=0.$$

Observaţia 2.12. Considerând schimbarea de coordonate $(u,v) \rightarrow \left(u,(c-K)^{3/8}v\right) = (u,s)$ în Teorema 2.10, obţinem, după un calcul direct, o expresie mai simplă

$$g=du^2+(c-K)^{-3/4}ds^2$$

pentru metrica riemanniană de pe suprafaţă. Mai mult, dacă considerăm o a doua schimbare de coordonate $(u,s)\rightarrow\left(\int_{u_0}^{u}(c-K(\tau))^{3/8}\,d\tau,s\right)=(\tilde{u},\tilde{s})$, atunci metrica g poate fi scrisă

$$g=(c-K(\tilde{u}))^{-3/4}\left(d\tilde{u}^2+d\tilde{s}^2\right),$$

unde $K(\tilde{u})=K(u(\tilde{u}))$, ceea ce înseamnă că $(\tilde{u},\tilde{s})$ sunt coordonate izoterme pe suprafaţă.

Reciproca Teoremei 2.10 este rezultatul următor care asigură existenţa suprafeţelor $\left(M^2,g\right)$ astfel încât curbele de nivel ale lui K să fie cercuri.

Teorema 2.13. *Fie D o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^2=Ouv$ şi $c\in\mathbb{R}$. Considerăm $K=K(u)$ o funcţie pe D astfel încât $K'(u)>0$ şi $c-K(u)>0$, pentru orice u, şi*

$$24(c-K)K''+33\left(K'\right)^2+64K(c-K)^2=0.$$

Definim o metrică riemanniană $g=g_{11}du^2+2g_{12}dudv+g_{22}dv^2$ pe D prin

$$g_{11}(u,v)=\frac{9}{64}\left(\frac{K'(u)}{c-K(u)}\right)^2v^2+1,$$
$$g_{12}(u,v)=-\frac{3K'(u)}{8(c-K(u))}v,\quad g_{22}(u,v)=1.$$

Atunci K este curbura gaussiană a lui g şi curbele sale de nivel $v\rightarrow(u_0,v)$ sunt cercuri în (D,g) cu curbura $\kappa=3K'(u)/(8(c-K(u)))$.

Teorema 2.14. *Fie $\left(M^2,g\right)$ o suprafaţă abstractă şi $c\in\mathbb{R}$. Presupunem că $c-K>0$ şi $\operatorname{grad}K\neq0$ în orice punct al lui M, şi curbele de nivel ale lui K sunt cercuri în M cu curbura constantă*

$$\kappa=\frac{3|\operatorname{grad}K|}{8(c-K)}.$$

Dacă există o imersie biconservativă $\varphi:\left(M^2,g\right)\rightarrow N^3(c)$, atunci $\operatorname{grad}f\neq0$, $f>0$ în orice punct al lui M, şi φ este unică.

În continuare avem rezultatul principal al acestei secţiuni, care este o caracterizare intrinsecă a suprafeţelor biconservative non-CMC în $N^3(c)$. Pe scurt, condiţiile intrinseci date în Teorema 1.22, (ii), asigură existenţa imersiilor biconservative non-CMC în $N^3(c)$.

Teorema 2.15. *Fie (M^2,g) o suprafaţă abstractă şi $c\in\mathbb{R}$. Atunci M poate fi local izometric scufundată într-o formă spaţială $N^3(c)$ ca o suprafaţă biconservativă cu gradientul funcţiei curbură medie diferit de zero în orice punct $p\in M$ dacă şi numai dacă curbura gaussiană K satisface $c-K(p)>0$, $(\operatorname{grad}K)(p)\neq0$, şi curbele sale de nivel sunt cercuri în M cu curbura constantă*

$$\kappa=\frac{3|\operatorname{grad}K|}{8(c-K)}.$$

Observaţia 2.16. Dacă suprafaţa M din Teorema 2.15 este simplu conexă, atunci teorema are loc global, dar, în acest caz, în locul scufundării locale izometrice avem o imersie globală izometrică.

Remarcăm faptul că, spre deosebire de cazul imersiilor minimale, dacă M satisface ipotezele teoremei 2.15, atunci există o unică imersie biconservativă în $N^3(c)$ (până la o izometrie a lui $N^3(c)$), şi nu o familie unu-parametrică.

Folosind coordonate local izometrice, putem găsi anumite caracterizări intrinseci ale suprafeţelor biconservative în $N^3(c)$. Aceste caracterizări ne oferă anumite expresii explicite ale metricii g.

Teorema 2.17. *Fie $\left(M^2, g\right)$ o suprafaţă abstractă cu curbura gaussiană satisfăcând $c - K(p) > 0$ şi $(\operatorname{grad} K)(p) \neq 0$ în orice punct $p \in M$, unde $c \in \mathbb{R}$. Fie $X_1 = (\operatorname{grad} K)/|\operatorname{grad} K|$ şi $X_2 \in C(TM)$ două câmpuri vectoriale pe M astfel încât $\{X_1(p), X_2(p)\}$ este o bază orientată pozitiv pentru orice $p \in M$. Atunci, următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) curbele de nivel ale lui K sunt cercuri în M cu curbura constantă

$$\kappa = \frac{3|\operatorname{grad} K|}{8(c-K)} = \frac{3X_1 K}{8(c-K)};$$

(ii) metrica g poate fi scrisă local ca $g = (c-K)^{-3/4}\left(du^2 + dv^2\right)$, unde (u, v) sunt coordonate locale orientate pozitiv, $K = K(u)$, şi $K' > 0$;

(iii) metrica g poate fi scrisă local ca $g = e^{2\rho}\left(du^2 + dv^2\right)$, unde (u, v) sunt coordonate locale orientate pozitiv, şi $\rho = \rho(u)$ satisface ecuaţia

$$\rho'' = e^{-2\rho/3} - ce^{2\rho} \tag{2.5}$$

şi condiţia $\rho' > 0$; mai mult, soluţiile ecuaţiei de mai sus, $u = u(\rho)$, sunt

$$u = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\tau}{\sqrt{-3e^{-2\tau/3} - ce^{2\tau} + a}} + u_0,$$

unde ρ este într-un interval deschis I, $\rho_0 \in I$ şi $a, u_0 \in \mathbb{R}$;

(iv) metrica g poate fi scrisă local ca $g = e^{2\rho}\left(du^2 + dv^2\right)$, unde (u, v) sunt coordonate locale orientate pozitiv, şi $\rho = \rho(u)$ satisface ecuaţia

$$3\rho''' + 2\rho'\rho'' + 8ce^{2\rho}\rho' = 0 \tag{2.6}$$

şi condiţiile $\rho' > 0$ şi $c + e^{-2\rho}\rho'' > 0$; mai mult, soluţiile ecuaţiei de mai sus, $u = u(\rho)$, sunt

$$u = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\tau}{\sqrt{-3be^{-2\tau/3} - ce^{2\tau} + a}} + u_0,$$

unde ρ este într-un interval deschis I, $\rho_0 \in I$ şi $a, b, u_0 \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

CAPITOLUL 3

Suprafeţe biconservative complete în $\mathbb{R}^3$ şi în $\mathbb{S}^3$

În acest capitol, vom extinde rezultatele de clasificare *locală* pentru suprafeţe biconservative în $N^3(c)$, cu $c=0$ şi $c=1$, la rezultate *globale*, i.e., vom construi suprafeţe biconservative *complete*, cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense. Mai mult, vom studa unicitatea unor astfel de suprafeţe în $\mathbb{R}^3$.

Majoritatea rezultatelor prezentate aici sunt originale şi ele sunt incluse în articolele [25], [27], şi [28]. Rezultatele de unicitate din Subsecţiunea 3.1.1 sunt prezentate aici pentru prima dată.

3.1 Suprafeţe biconservative complete în $\mathbb{R}^3$

În această secţiune vom construi, din punct de vedere extrinsec, suprafeţe biconservative complete în $\mathbb{R}^3$ cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense, şi, din punct de vedere intrinsec, vom construi suprafaţe abstracte complete $\left(M^2, g\right)$ cu $K<0$ în orice punct şi $\operatorname{grad} K \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense a lui M, care admit o imersie biconservativă în $\mathbb{R}^3$, definită pe M, cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ pe o submulţime deschisă şi densă.

Mai întâi, reamintim un rezultat *local extrinsic* care reprezintă o caracterizare a suprafeţelor în $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.1 ([17])**.** *Fie M^2 o suprafaţă în $\mathbb{R}^3$ cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ pe M. Atunci M este biconservativă dacă şi numai dacă local este o suprafaţă de rotaţie, care are curbura $\kappa=\kappa(u)$ a curbei profil $\sigma=\sigma(u)$, $|\sigma'(u)|=1$, soluţie pozitivă a următoarei ODE*

$$\kappa''\kappa = \frac{7}{4}\left(\kappa'\right)^2 - 4\kappa^4.$$

În [6] a fost găsită ecuaţia parametrică locală explicită a unei suprafeţe biconservative în $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.2 ([6])**.** *Fie M^2 o suprafaţă biconservativă în $\mathbb{R}^3$ cu $(\operatorname{grad} f)(p) \neq 0$ pentru orice $p \in M$. Atunci, suprafaţa poate fi parametrizată local prin*

$$X_{\tilde{C}_0}(\rho, v) = \left(\rho\cos v, \rho\sin v, u_{\tilde{C}_0}(\rho)\right),$$

unde

$$u_{\tilde{C}_0}(\rho) = \frac{3}{2\tilde{C}_0}\left(\rho^{1/3}\sqrt{\tilde{C}_0\rho^{2/3}-1} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{C}_0}}\log\left(\sqrt{\tilde{C}_0}\rho^{1/3} + \sqrt{\tilde{C}_0\rho^{2/3}-1}\right)\right)$$

iar $\tilde{C}_0$ este o constantă pozitivă şi $\rho \in \left(\tilde{C}_0^{-3/2}, \infty\right)$.

Notăm cu $S_{\tilde{C}_0}$ imaginea $X_{\tilde{C}_0}\left(\left(\tilde{C}_0^{-3/2}, \infty\right) \times \mathbb{R}\right)$. Observăm că două astfel de suprafeţe nu sunt local izometrice, deci avem o familie unu-parametrică de suprafeţe biconservative în $\mathbb{R}^3$. Aceste suprafeţe nu sunt complete.

Definim "frontiera" lui $S_{\tilde{C}_0}$ prin $\overline{S}_{\tilde{C}_0} \setminus S_{\tilde{C}_0}$, unde $\overline{S}_{\tilde{C}_0}$ este închiderea lui $S_{\tilde{C}_0}$ în $\mathbb{R}^3$.

Frontiera lui $S_{\tilde{C}_0}$ este cercul $\left(\tilde{C}_0^{-3/2}\cos v, \tilde{C}_0^{-3/2}\sin v, 0\right)$, care se află în planul Oxy. Într-un punct de pe frontieră, planul tangent la $S_{\tilde{C}_0}$ este paralel cu Oz. Mai mult, în lungul frontierei, funcţia curbură medie este constantă $f_{\tilde{C}_0} = \left(2\tilde{C}_0^{3/2}\right)/3$ şi $\operatorname{grad} f_{\tilde{C}_0} = 0$.

Propoziţia 3.3. *Fie $S_{\tilde{C}_0}$ şi $S_{\tilde{C}_0'}$. Presupunem că le putem lipi la nivel de clasă C^∞ în lungul unei curbe. Atunci $S_{\tilde{C}_0}$ şi $S_{\tilde{C}_0'}$ coincid sau sunt simetrice în raport cu planul unde se află frontiera.*

Teorema 3.4. *Dacă $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3$ este o suprafaţă biconservativă cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct, atunci există o unică constantă $\tilde{C}_0$ astfel încât $\varphi(M) \subset S_{\tilde{C}_0}$.*

Pentru a obţine o suprafaţă biconservativă completă în $\mathbb{R}^3$, ne putem aştepta să "lipim" în lungul frontierei două suprafeţe biconservative de tip $S_{\tilde{C}_0}$ corespunzătoare aceleaşi constante $\tilde{C}_0$ (cele două constante trebuie sa coincidă) şi simetrice una faţă de cealaltă, la nivel de clasă C^∞.

Avem următorul rezultat *global extrinsec.*

Teorema 3.5 ([23, 25]). *Dacă considerăm simetricul lui $\operatorname{Graf} u_{\tilde{C}_0}$, în raport cu axa $O\rho(= Ox)$, obţinem o suprafaţă biconservativă, completă, netedă $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$ în $\mathbb{R}^3$. Mai mult, funcţia ei curbură medie $\tilde{f}_{\tilde{C}_0}$ este pozitivă şi $\operatorname{grad} \tilde{f}_{\tilde{C}_0}$ este diferit de zero în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense a lui $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$.*

Observaţia 3.6. Curba profil $\sigma_{\tilde{C}_0} = \left(\rho, 0, u_{\tilde{C}_0}(\rho)\right) \equiv \left(\rho, u_{\tilde{C}_0}(\rho)\right)$ poate fi reparametrizată prin

$$\begin{aligned} \sigma_{\tilde{C}_0}(\theta) = & \left(\sigma^1_{\tilde{C}_0}(\theta), \sigma^2_{\tilde{C}_0}(\theta)\right) \\ = & \tilde{C}_0^{-3/2}\left((\theta+1)^{3/2}, \tfrac{3}{2}\left(\sqrt{\theta^2+\theta} + \log\left(\sqrt{\theta} + \sqrt{\theta+1}\right)\right)\right), \qquad \theta > 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

şi acum $X_{\tilde{C}_0} = X_{\tilde{C}_0}(\theta, v)$.

Observaţia 3.7. "Frontiera" lui $S_{\tilde{C}_0}$ coincide cu frontiera lui $S_{\tilde{C}_0}$ ca o submulţime a lui $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$, i.e., este intersecţia dintre închiderea lui $S_{\tilde{C}_0}$ în $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$ şi închiderea lui $\tilde{S}_{\tilde{C}_0} \setminus S_{\tilde{C}_0}$ în $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$.

De dragul completitudinii, reprezentăm în Figurile 3.1, 3.2 şi 3.3 suprafeţele $S_{\tilde{C}_0}$, $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$, şi curba profil a lui $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$, când $\tilde{C}_0 = 9^{1/3}$ (vom vedea că această constantă corespunde constantei $C_0 = 1$).

Acum, ne schimbăm punctul de vedere şi construim, din punct de vedere intrinsec, suprafeţe biconservative complete în $\mathbb{R}^3$ cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ pe o submulţime deschisă şi densă. Folosind teorema *locală intrinsecă* (Teorema 2.17), pentru $c = 0$, obţinem un nou rezultat.

Propoziţia 3.8. *Fie $\left(M^2, g\right)$ o suprafaţă riemanniană cu $(\operatorname{grad} K)(p) \neq 0$ şi $K(p) < 0$ în orice punct $p \in M$. Considerăm $X_1 = \operatorname{grad} K / |\operatorname{grad} K|$ şi $X_2 \in C(TM)$ două câmpuri vectoriale pe M astfel încât $\{X_1(p), X_2(p)\}$ este o bază ortonormată orientată pozitiv pentru orice punct $p \in M$. Atunci $X_2\left(X_1 K\right) = 0$ şi $\nabla_{X_2} X_2 = \left(3\left(X_1 K\right)/(8K)\right) X_1$ dacă şi numai dacă metrica riemanniană g poate fi scrisă local*

$$g_{C_0}(u, v) = C_0 (\cosh u)^6 \left(du^2 + dv^2\right), \qquad u > 0,$$

unde $C_0 \in \mathbb{R}$ este o constantă pozitivă.

Observaţia 3.9. Remarcăm faptul că, dacă $c = 0$, avem o familie unu-parametrică de soluţii ale ecuaţiei (2.6), i.e., $g_{C_0} = C_0(\cosh u)^6 \left(du^2 + dv^2\right)$, C_0 fiind o constantă pozitivă.

În ceea ce priveşte suprafeţele biconservative complete în $\mathbb{R}^3$, cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense, avem următorul rezultat *global intrinsec.*

Teorema 3.10. *Fie $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_0} = C_0 (\cosh u)^6 \left(du^2 + dv^2\right)\right)$ o suprafaţă unde $C_0 \in \mathbb{R}$ este o constantă pozitivă. Atunci avem:*

(i) $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_0}\right)$ *este completă;*

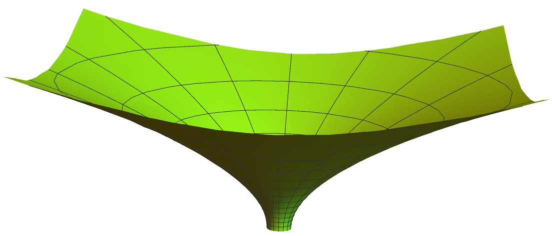

Figure 3.1: Suprafaţa $S_{\tilde{C}_0}$.

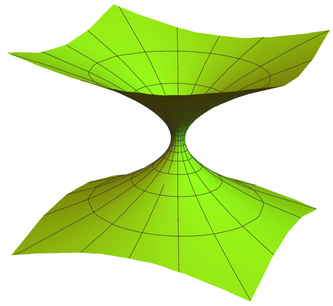

Figure 3.2: Suprafaţa completă $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$.

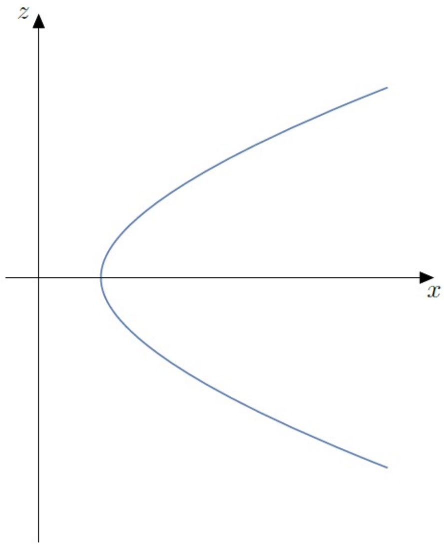

Figure 3.3: Curba profil a lui $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$.

(ii) curbura gaussiană a lui $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_0}\right)$ *este dată de*

$$K_{C_0}(u,v) = K_{C_0}(u) = -\frac{3}{C_0\,(\cosh u)^8} < 0, \quad K'_{C_0}(u) = \frac{24\sinh u}{C_0\,(\cosh u)^9},$$

şi deci $\operatorname{grad} K_{C_0} \neq 0$ *în orice punct al lui* $\mathbb{R}^2 \setminus Ov$*;*

(iii) imersia $\varphi_{C_0} : \left(\mathbb{R}^2, g_{C_0}\right) \to \mathbb{R}^3$ *dată de*

$$\varphi_{C_0}(u,v) = \left(\sigma^1_{C_0}(u)\cos(3v), \sigma^1_{C_0}(u)\sin(3v), \sigma^2_{C_0}(u)\right)$$

este biconservativă în $\mathbb{R}^3$*, unde*

$$\sigma^1_{C_0}(u) = \frac{\sqrt{C_0}}{3}\,(\cosh u)^3, \quad \sigma^2_{C_0}(u) = \frac{\sqrt{C_0}}{2}\left(\frac{1}{2}\sinh(2u) + u\right), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Prin transformări simple ale metricii, $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_0}\right)$ devine o suprafaţă Ricci sau o suprafaţă cu curbura gaussiană constantă.

Teorema 3.11. *Fie suprafaţa* $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_0}\right)$*. Atunci* $\left(\mathbb{R}^2, \sqrt{-K_{C_0}}\,g_{C_0}\right)$ *este completă, satisface condiţia Ricci şi poate fi imersată minimal în* $\mathbb{R}^3$ *ca un elicoid sau un catenoid.*

În ceea ce priveşte suprafeţele biarmonice în $\mathbb{R}^3$ avem următorul rezultat de inexistenţă.

Teorema 3.12 ([9]). *Nu există suprafeţe propriu-biarmonice în* $\mathbb{R}^3$.

3.1.1 Unicitatea suprafeţelor biconservative complete în $\mathbb{R}^3$

În această subsecţiune, vom da câteva rezultate de unicitate referitoare la Teorema 3.10, cu anumite ipoteze adiţionale.

Teorema 3.13. *Fie* $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3$ *o suprafaţă non-CMC. Presupunem că*

$$W = \{p \in M \mid (\operatorname{grad} f)(p) \neq 0\}$$

are doar o componentă conexă, $M \setminus W$ *are interior nevid şi frontierele, în* M*, a lui* $\operatorname{Int}(M \setminus W)$ *şi a lui* $M \setminus W$ *coincid, i.e.,* $\partial^M \operatorname{Int}(M \setminus W) = \partial^M (M \setminus W)$. *Atunci* M *nu poate fi biconservativă.*

Teorema 3.14. *Fie* $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3$ *o suprafaţă biconservativă. Presupunem că*

$$W = \{p \in M \mid (\operatorname{grad} f)(p) \neq 0\}$$

este densă şi are două componente conexe, W_1 *şi* W_2*. Presupunem că frontierele lui* W_1 *şi* W_2 *în* W *coincid şi frontiera lor comună este o curbă netedă pe* M*. Atunci, există o unică constantă* $\tilde{C}_0 > 0$ *astfel încât* $\varphi(M) \subset \tilde{S}_{\tilde{C}_0}$*. Mai mult, dacă* M *este completă şi simplu conexă, atunci până la izometrii ale domeniului şi codomeniului, imersia* φ *este cea dată în Teorema 3.10.*

În continuare ne vom restricţiona la cazul în care $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3$ este o scufundare, i.e., $S = \varphi(M)$ este o suprafaţă regulată în $\mathbb{R}^3$. Începem cu următorul rezultat.

Teorema 3.15. *Fie* S *o suprafaţă regulată, biconservativă, completă în* $\mathbb{R}^3$*. Notăm cu*

$$W = \{p \in S \mid (\operatorname{grad} f)(p) \neq 0\},$$

presupunem că W *este nevidă şi* W_0 *este o componentă conexă a lui* W*. Atunci, există o unică constantă* $\tilde{C}_0 > 0$ *astfel încât* $W_0 = S_{\tilde{C}_0}$*. Mai mult, închiderea lui* W_0 *în* S *coincide cu închiderea lui* $S_{\tilde{C}_0}$ *în* $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$.

Observaţia 3.16. Demonstraţia Teoremei 3.15 poate fi rezumată în Figura 3.4, unde regiunea galbenă reprezintă componenta conexă W_0 a lui W în S, şi suprafaţa de rotaţie reprezentată cu culoarea verde este suprafaţa corespunzătoare $S_{\tilde{C}_0}$ (dată în Teorema 3.4). Este sugerat faptul că, de fapt, toate meridianele lui $S_{\tilde{C}_0}$ care intersectează W_0 sunt incluse în W_0 şi apoi, cum frontiera lui W_0 în S trebuie să fie întreg cercul care reprezintă frontiera lui $S_{\tilde{C}_0}$ în $\tilde{S}_{\tilde{C}_0}$, $W_0 = S_{\tilde{C}_0}$.

O primă consecinţă a rezultatului de mai sus este următoarea teoremă.

Teorema 3.17. *Fie* S *o suprafaţă regulată biconservativă în* $\mathbb{R}^3$*. Presupunem că* S *este compactă. Atunci* S *este CMC, şi deci o sferă rotundă.*

O altă consecinţă a Teoremei 3.15 este următorul rezultat.

Teorema 3.18. *Fie* S *o suprafaţă regulată completă în* $\mathbb{R}^3$*. Presupunem că*

$$W = \{p \in S \mid (\operatorname{grad} f)(p) \neq 0\}$$

este nevidă şi este conexă. Atunci S *nu poate fi biconservativă.*

Un alt rezultat important este această teoremă.

Teorema 3.19. *Fie* S *o suprafaţă regulată, biconservativă în* $\mathbb{R}^3$*. Dacă* S *este non-CMC, atunci* $S = \tilde{S}_{\tilde{C}_0}$.

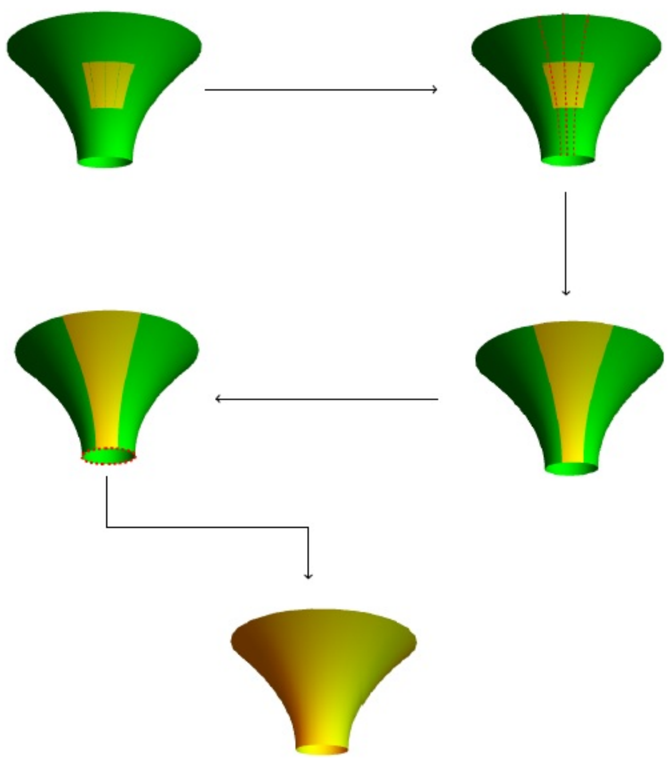

Figure 3.4: Ideea demonstraţiei Teoremei 3.15.

3.2 Suprafeţe biconservative complete în $\mathbb{S}^3$

Precum în secţiunea anterioară, vom considera problema globală pentru suprafeţele biconservative în $\mathbb{S}^3$, i.e., scopul nostru este de a construi suprafeţe biconservative complete în $\mathbb{S}^3$, cu $\operatorname{grad} f \neq 0$ în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense.

Începem cu următorul rezultat *local extrinsec.*

Teorema 3.20 ([6]). *Fie M^2 o suprafaţă biconservativă în $\mathbb{S}^3$ cu $(\operatorname{grad} f)(p) \neq 0$ în orice punct $p \in M$. Atunci, suprafaţa, văzută în $\mathbb{R}^4$, poate fi parametrizată local prin*

$$Y_{\tilde{C}_1}(u,v) = \sigma(u) + \frac{4\kappa(u)^{-3/4}}{3\sqrt{\tilde{C}_1}} \left(\overline{f}_1(\cos v - 1) + \overline{f}_2 \sin v\right), \qquad (3.2)$$

unde $\tilde{C}_1 \in \left(64/\left(3^{5/4}\right), \infty\right)$ este o constantă pozitivă; $\overline{f}_1, \overline{f}_2 \in \mathbb{R}^4$ sunt doi vectori ortonormali constanţi; $\sigma(u)$ este o curbă parametrizată prin lungime de arc care satisface

$$\langle \sigma(u), \overline{f}_1 \rangle = \frac{4\kappa(u)^{-3/4}}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}, \qquad \langle \sigma(u), \overline{f}_2 \rangle = 0, \qquad (3.3)$$

şi, ca o curbă în $\mathbb{S}^2$, curbura ei $\kappa = \kappa(u)$ este o soluţie neconstantă pozitivă a următoarei ODE

$$\kappa''\kappa = \frac{7}{4}\left(\kappa'\right)^2 + \frac{4}{3}\kappa^2 - 4\kappa^4 \qquad (3.4)$$

astfel încât

$$\left(\kappa'\right)^2 = -\frac{16}{9}\kappa^2 - 16\kappa^4 + \tilde{C}_1\kappa^{7/2}. \qquad (3.5)$$

Observaţia 3.21. Constanta $\tilde{C}_1$ determină în mod unic curbura κ, până la o translaţie a lui u, şi apoi κ, $\overline{f}_1$ şi $\overline{f}_2$ determină în mod unic curbura σ.

În continuare, folosind o metodă puţin diferită faţă de cea folosită în [6], vom arăta că o astfel de curbă σ există şi vom găsi o expresie mai explicită pentru (3.2).

Înlocuind (3.5) în (3.4), cum $\kappa' \neq 0$, obţinem

$$\kappa'' = -\frac{16}{9}\kappa - 32\kappa^3 + \frac{7}{4}\tilde{C}_1\kappa^{5/2}.$$

Considerând $\overline{f}_1 = \overline{e}_3$ şi $\overline{f}_2 = \overline{e}_4$, unde $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^4$, şi schimbând coordonatele (u, v) în (κ, v), se obţine

$$\begin{aligned} Y_{\tilde{C}_1}(\kappa, v) = \Bigg(& \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa^{-3/4}\right)^2}\cos\mu(\kappa), \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa^{-3/4}\right)^2}\sin\mu(\kappa), \\ & \frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa^{-3/4}\cos v, \frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa^{-3/4}\sin v \Bigg). \end{aligned} \tag{3.6}$$

unde $(\kappa, v) \in (\kappa_{01}, \kappa_{02}) \times \mathbb{R}$, κ_{01} şi κ_{02} sunt soluţiile pozitive ale ecuaţiei

$$-\frac{16}{9}\kappa^2 - 16\kappa^4 + \tilde{C}_1\kappa^{7/2} = 0$$

şi

$$\mu(\kappa) = \pm\left(108\int_{\kappa_0}^{\kappa} \frac{\sqrt{\tilde{C}_1}\tau^{3/4}}{\left(-16 + 9\tilde{C}_1\tau^{3/2}\right)\sqrt{9\tilde{C}_1\tau^{3/2} - 16\left(1 + 9\tau^2\right)}}\, d\tau + \tilde{c}_1\right),$$

cu $\tilde{c}_1 \in \mathbb{R}$, $\kappa_0 \in (\kappa_{01}, \kappa_{02})$.

Notăm faptul că o expresie alternativă pentru $Y_{\tilde{C}_1}$ a fost dată în [14].

Observaţia 3.22. Putem alege $\tilde{c}_1 = 0$ în expresia de mai sus a lui μ, considerând o transformare liniară ortogonală a lui $\mathbb{R}^4$.

Notăm cu

$$\mu_0(\kappa) = 108\int_{\kappa_0}^{\kappa} \frac{\sqrt{\tilde{C}_1}\tau^{3/4}}{\left(-16 + 9\tilde{C}_1\tau^{3/2}\right)\sqrt{9\tilde{C}_1\tau^{3/2} - 16\left(1 + 9\tau^2\right)}}\, d\tau,$$

şi, deci, $\mu(\kappa) = \pm\left(\mu_0(\kappa) + \tilde{c}_1\right)$.

Observaţia 3.23. Avem

$$\lim_{\kappa \searrow \kappa_{01}} \mu_0(\kappa) = \mu_{0,-1} > -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{\kappa \nearrow \kappa_{02}} \mu_0(\kappa) = \mu_{0,1} < \infty.$$

Observaţia 3.24. Pentru simplitate, alegem $\kappa_0 = (3\tilde{C}_1/64)^2$.

Dacă notăm $S^{\pm}_{\tilde{C}_1,\tilde{c}_1}$ imaginea lui $Y_{\tilde{C}_1}$, atunci remarcăm faptul că frontiera lui $S^{\pm}_{\tilde{C}_1,\tilde{c}_1}$ este formată din două cercuri şi în lungul frontierei, funcţia curbură medie este constantă (două constante diferite) şi gradientul ei se anulează. Mai precis, frontiera lui $S^{\pm}_{\tilde{C}_1,\tilde{c}_1}$ este dată de curbele

$$\begin{aligned} \Bigg(& \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{01}^{-3/4}\right)^2}\cos\mu\left(\kappa_{01}\right), \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{01}^{-3/4}\right)^2}\sin\mu\left(\kappa_{01}\right), \\ & \frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{01}^{-3/4}\cos v, \frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{01}^{-3/4}\sin v \Bigg) \end{aligned}$$

şi

$$\left(\sqrt{1-\left(\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{02}^{-3/4}\right)^2}\cos\mu\left(\kappa_{02}\right),\sqrt{1-\left(\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{02}^{-3/4}\right)^2}\sin\mu\left(\kappa_{02}\right),\right.$$
$$\left.\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{02}^{-3/4}\cos v,\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{02}^{-3/4}\sin v\right),$$

unde $\mu\left(\kappa_{01}\right)=\lim_{\kappa\searrow\kappa_{01}}\mu(\kappa)$ and $\mu\left(\kappa_{02}\right)=\lim_{\kappa\nearrow\kappa_{02}}\mu(\kappa)$ sunt numere reale.

Aceste curbe sunt cercuri în planele afine din $\mathbb{R}^4$ paralele cu planul Ox^3x^4 şi razele lor sunt egale cu $\left(4\kappa_{01}^{-3/4}\right)/\left(3\sqrt{\tilde{C}_1}\right)$ şi $\left(4\kappa_{02}^{-3/4}\right)/\left(3\sqrt{\tilde{C}_1}\right)$, respectiv.

Într-un punct oarecare de pe frontieră, folosind coordonatele (μ,v), planul tangent la închiderea lui $S^{\pm}_{\tilde{C}_1,\tilde{c}_1}$ în $\mathbb{R}^4$ este generat de un vector care este tangent la cercul corespunzător şi de

$$\left(-\sqrt{1-\left(\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{0i}^{-3/4}\right)^2}\sin\mu\left(\kappa_{0i}\right),\sqrt{1-\left(\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{0i}^{-3/4}\right)^2}\cos\mu\left(\kappa_{0i}\right),0,0\right),$$

unde $i=1$ sau $i=2$.

Într-un mod similar cu cel al obţinerii Teoremei 3.4, se găseşte următorul rezultat.

Teorema 3.25. *Dacă $\varphi: M^2\to\mathbb{S}^3$ este o suprafaţă biconservativă cu* $\operatorname{grad} f\neq 0$ *în orice punct, atunci există o unică constantă $\tilde{C}_1$ astfel încât $\varphi(M)\subset S^{\pm}_{\tilde{C}_1,\tilde{c}_1}$.*

Deci, pentru a construi din *punct de vedere extrinsec* suprafeţele biconservative *complete* în $\mathbb{S}^3$, ne putem aştepta să lipim în lungul frontierei două suprafeţe biconservative de tip $S^{\pm}_{\tilde{C}_1,\tilde{c}_{1,k}}$ şi $S^{\pm}_{\tilde{C}_1,\tilde{c}_{1,l}}$, corespunzătoare aceleaşi constante $\tilde{C}_1$, unde $k,l\in\mathbb{Z}$. De fapt, dacă vrem să lipim două suprafeţe corespunzătoare lui $\tilde{C}_1$ şi $\tilde{C}_1'$ în lungul frontierei, atunci aceste constante trebuie să coincidă şi nu este nici o ambiguitate în ceea ce priveşte cercul în lungul căruia trebuie să se realizeze lipirea celor două suprafeţe.

Geometric, începem cu o suprafaţă de tip $S^{+}_{\tilde{C}_1,0}$ corespunzătoare lui $\tilde{c}_{1,0}=0$ şi semnului $+$, şi apoi considerăm $\mathcal{T}_1\left(S^{+}_{\tilde{C}_1,0}\right)$, unde $\mathcal{T}_1$ este o transformare liniară ortogonală a lui $\mathbb{R}^4$ care acţionează asupra lui $\mathbb{R}^2=\operatorname{span}\{\overline{e}_1,\overline{e}_2\}$ ca o simetrie axială în raport cu dreapta determinată de

$$\left(\sqrt{1-\left(\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{02}^{-3/4}\right)^2}\cos\mu_{0,1},\sqrt{1-\left(\frac{4}{3\sqrt{\tilde{C}_1}}\kappa_{02}^{-3/4}\right)^2}\sin\mu_{0,1}\right)$$

şi origine, şi lasă invariant $\operatorname{span}\{\overline{e}_3,\overline{e}_4\}$.

Acest procedeu se repetă de un infinit de ori. Este dificil să concluzionăm de aici că obţinem o suprafaţă biconservativă completă în $\mathbb{S}^3$. Din acest proces, se obţine o submulţime închisă a lui $\mathbb{S}^3$ cu autointersecţii, dar nu se poate vedea dacă "suprafaţa" obţinută este imaginea unei imersii izometrice (prin compunerea cu $\mathcal{T}_k$, domeniul lui $Y_{\tilde{C}_1}$ nu se schimbă).

Desigur, ca submulţime, suprafaţa este completă în raport cu funcţia distanţă indusă din $\mathbb{S}^3$, dar noi vrem să arătăm că "suprafaţa" este completă în raport cu distanţa intrinsecă.

Această construcţie a suprafeţelor biconservative complete în $\mathbb{S}^3$ poate fi ilustrată în $\mathbb{R}^3$ folosindu-ne de proiecţia stereografică a lui $\mathbb{S}^3$, precum în Figurile 3.5 şi 3.6.

Mai departe, ca şi în cazul lui $\mathbb{R}^3$, ne schimbăm punctul de vedere şi folosim caracterizarea *local intrinsecă* a suprafeţelor biconservative în $\mathbb{S}^3$.

Un alt mod de a vedea că în cazul în care $c\neq 0$ avem doar o familie unu-parametrică de soluţii ale ecuaţiei (2.6) este de a rescrie metrica g în anumite coordonate care nu sunt izoterme. Mai departe, considerăm doar cazul $c=1$.

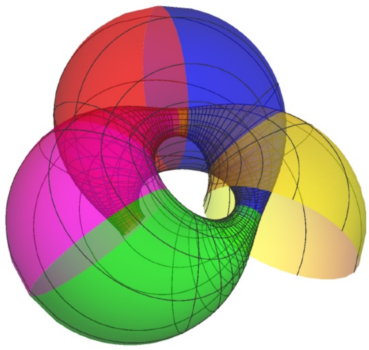

Figure 3.5: Folosind proiecţia stereografică din polul Nord.

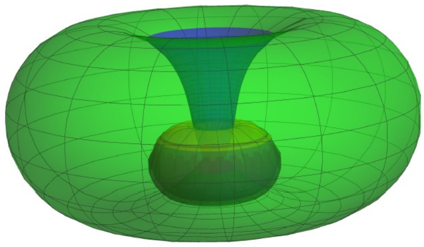

Figure 3.6: Folosind proiecţia stereografică din $(1,0,0,0)$.

Propoziţia 3.26. *Fie $\left(M^2,g\right)$ o suprafaţă abstractă cu $g=e^{2\rho(u)}(du^2+dv^2)$, unde $u=u(\rho)$ satisface*

$$u=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\tau}{\sqrt{-3be^{-2\tau/3}-e^{2\tau}+a}}+u_0,$$

ρ aparţine unui interval deschis I, $a,b\in\mathbb{R}$ sunt constante pozitive, şi $u_0\in\mathbb{R}$. Atunci $\left(M^2,g\right)$ este izometrică cu

$$\left(D_{C_1},g_{C_1}=\frac{3}{\xi^2\left(-\xi^{8/3}+3C_1\xi^2-3\right)}d\xi^2+\frac{1}{\xi^2}d\theta^2\right),$$

unde $D_{C_1}=(\xi_{01},\xi_{02})\times\mathbb{R}$, $C_1\in\left(4/\left(3^{3/2}\right),\infty\right)$ este o constantă pozitivă, şi ξ_{01} and ξ_{02} sunt zerourile pozitive ale lui $-\xi^{8/3}+3C_1\xi^2-3$, cu $0<\xi_{01}<\xi_{02}$.

Suprafaţa (D_{C_1},g_{C_1}) nu este completă, dar are următoarele proprietăţi.

Teorema 3.27. *Fie (D_{C_1},g_{C_1}). Atunci avem*

(i) $K_{C_1}(\xi,\theta)=K(\xi,\theta)$,

$$1-K(\xi,\theta)=\frac{1}{9}\xi^{8/3}>0,\quad K'(\xi)=-\frac{8}{27}\xi^{5/3}$$

şi $\operatorname{grad}K\neq 0$ *în orice punct al lui D_{C_1};*

(ii) imersia $\phi_{C_1}:(D_{C_1},g_{C_1})\to\mathbb{S}^3$ dată prin

$$\phi_{C_1}(\xi,\theta)=\left(\sqrt{1-\frac{1}{C_1\xi^2}}\cos\zeta(\xi),\sqrt{1-\frac{1}{C_1\xi^2}}\sin\zeta(\xi),\frac{\cos(\sqrt{C_1}\theta)}{\sqrt{C_1}\xi},\frac{\sin(\sqrt{C_1}\theta)}{\sqrt{C_1}\xi}\right),$$

este biconservativă în $\mathbb{S}^3$, unde

$$\zeta(\xi)=\pm\left(\int_{\xi_{00}}^{\xi}\frac{\sqrt{C_1}\tau^{4/3}}{(-1+C_1\tau^2)\sqrt{-\tau^{8/3}+3C_1\tau^2-3}}\,d\tau+c_1\right),$$

iar $c_1\in\mathbb{R}$ şi $\xi_{00}\in(\xi_{01},\xi_{02})$.

Observaţia 3.28. Cum $(\operatorname{grad} K_{C_1})(\xi,\theta) = -\left(8\xi^{11/3}\left(-\xi^{8/3}+3C_1\xi^2-3\right)/81\right)\partial_\xi$ pentru orice $(\xi,\theta)\in D_{C_1}$, se obţine că

$$\lim_{\xi\searrow\xi_{01}}(\operatorname{grad} K_{C_1})(\xi,\theta) = \lim_{\xi\nearrow\xi_{02}}(\operatorname{grad} K_{C_1})(\xi,\theta) = 0.$$

Notând cu

$$\zeta_0(\xi) = \int_{\xi_{00}}^{\xi} \frac{\sqrt{C_1}\tau^{4/3}}{(-1+C_1\tau^2)\sqrt{-\tau^{8/3}+3C_1\tau^2-3}}\,d\tau,$$

putem formula următoarea lemă.

Lema 3.29. *Avem*

$$\lim_{\xi\searrow\xi_{01}}\zeta_0(\xi) = \zeta_{0,-1} > -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{\xi\nearrow\xi_{02}}\zeta_0(\xi) = \zeta_{0,1} < \infty.$$

Observaţia 3.30. Imersia ϕ_{C_1} depinde de semnul $\pm$ şi de constanta c_1 din expresia lui ζ. Cum clasificarea se face până la izometrii ale lui $\mathbb{S}^3$, semnul şi constanta nu sunt importante, dar ele vor juca un rol important în procesul de lipire.

Următorul rezultat ne arată că într-adevăr avem o familie unu-parametrică de suprafeţe riemanniene (D_{C_1}, g_{C_1}).

Propoziţia 3.31. *Fie*

$$\left(D_{C_1}, g_{C_1} = \frac{3}{\xi^2\left(-\xi^{8/3}+3C_1\xi^2-3\right)}d\xi^2 + \frac{1}{\xi^2}d\theta^2\right)$$

şi

$$\left(D_{C_1'}, g_{C_1'} = \frac{3}{\tilde\xi^2\left(-\tilde\xi^{8/3}+3C_1'\tilde\xi^2-3\right)}d\tilde\xi^2 + \frac{1}{\tilde\xi^2}d\tilde\theta^2\right).$$

Suprafeţele (D_{C_1}, g_{C_1}) şi $\left(D_{C_1'}, g_{C_1'}\right)$ sunt izometrice dacă şi numai dacă $C_1 = C_1'$ şi izometria este $\Theta(\xi,\theta) = (\xi, \pm\theta + \text{constant})$. Deci, avem o familie unu-parametrică de astfel de suprafeţe.

Construcţia, din *punct de vedere intrinsec* a suprafeţelor biconservative *complete* în $\mathbb{S}^3$ constă în două etape, şi ideea cheie este de a observa că (D_{C_1}, g_{C_1}) este, local şi intrinsec, izometrică cu suprafaţa de rotaţie în $\mathbb{R}^3$.

Prima etapă este construcţia unei suprafeţe de rotaţie completă în $\mathbb{R}^3$ care pe o submulţime deschisă şi densă este local izometrică cu (D_{C_1}, g_{C_1}). Avem următorul rezultat.

Teorema 3.32. *Fie (D_{C_1}, g_{C_1}) ca mai sus. Atunci (D_{C_1}, g_{C_1}) este acoperirea universală a suprafeţei de rotaţie în $\mathbb{R}^3$ dată prin*

$$\psi_{C_1,C_1^*}(\xi,\theta) = \left(\chi(\xi)\cos\frac{\theta}{C_1^*}, \chi(\xi)\sin\frac{\theta}{C_1^*}, \nu(\xi)\right), \tag{3.7}$$

unde $\chi(\xi) = C_1^*/\xi$,

$$\nu(\xi) = \pm\int_{\xi_{00}}^{\xi}\sqrt{\frac{3\tau^2-\left(C_1^*\right)^2\left(-\tau^{8/3}+3C_1\tau^2-3\right)}{\tau^4\left(-\tau^{8/3}+3C_1\tau^2-3\right)}}\,d\tau + c_1^*, \tag{3.8}$$

$C_1^* \in \left(0, \sqrt{\left(3^{3/2}\right)/\left(3^{3/2}C_1-4\right)}\right)$ *este o constantă pozitivă şi $c_1^*\in\mathbb{R}$.*

Observaţia 3.33. Funcţia curbura medie a lui ψ_{C_1,C_1^*} este dată de

$$f_{C_1,C_1^*} = \frac{9\xi^2-\left(C_1^*\right)^2\left(-2\xi^{8/3}+9C_1\xi^2-18\right)}{6C_1^*\sqrt{9\xi^2-3\left(C_1^*\right)^2\left(-\xi^{8/3}+3C_1\xi^2-3\right)}}$$

şi putem vedea că depinde atât de C_1 cât şi de C_1^*.

Observaţia 3.34. De acum înainte, vom considera $\xi_{00} = (9C_1/4)^{3/2} \in (\xi_{01}, \xi_{02})$ şi constanta $C_1^* \in \left(0, \sqrt{\left(3^{3/2}\right) / \left(3^{3/2}C_1 - 4\right)}\right)$.

Lema 3.35. *Fie*

$$\nu_0(\xi) = \int_{\xi_{00}}^{\xi} \sqrt{\frac{3\tau^2 - (C_1^*)^2 \left(-\tau^{8/3} + 3C_1\tau^2 - 3\right)}{\tau^4 \left(-\tau^{8/3} + 3C_1\tau^2 - 3\right)}}\, d\tau, \qquad \xi \in (\xi_{01}, \xi_{02}),$$

i.e., fixăm semnul în (3.8) *şi alegem* $c_1^* = c_{1,0}^* = 0$*. Atunci*

(i) $\lim_{\xi \searrow \xi_{01}} \nu_0(\xi) = \nu_{0,-1} > -\infty$ şi $\lim_{\xi \nearrow \xi_{02}} \nu_0(\xi) = \nu_{0,1} < \infty$*;*

(ii) ν_0 *este strict crescătoare şi*

$$\lim_{\xi \searrow \xi_{01}} \nu_0'(\xi) = \lim_{\xi \nearrow \xi_{02}} \nu_0'(\xi) = \infty;$$

(iii) $\lim_{\xi \searrow \xi_{01}} \nu_0''(\xi) = -\infty$ şi $\lim_{\xi \nearrow \xi_{02}} \nu_0''(\xi) = \infty$.

Observaţia 3.36. Imersia ψ_{C_1,C_1^*} depinde de semnul $\pm$ şi de constanta c_1^* din expresia lui ν. Notăm cu $S^{\pm}_{C_1,C_1^*,c_1^*}$ imaginea lui ψ_{C_1,C_1^*}.

Notăm că frontiera lui $S^{\pm}_{C_1,C_1^*,c_1^*}$ este dată de curbele

$$\left(\frac{C_1^*}{\xi_{01}} \cos\frac{\theta}{C_1^*}, \frac{C_1^*}{\xi_{01}} \sin\frac{\theta}{C_1^*}, \nu\left(\xi_{01}\right)\right)$$

şi

$$\left(\frac{C_1^*}{\xi_{02}} \cos\frac{\theta}{C_1^*}, \frac{C_1^*}{\xi_{02}} \sin\frac{\theta}{C_1^*}, \nu\left(\xi_{02}\right)\right)$$

Aceste curbe sunt cercuri în planele afine din $\mathbb{R}^3$ paralele cu planul Oxy şi razele lor sunt C_1^*/ξ_{01} şi C_1^*/ξ_{02}, respectiv.

Într-un punct oarecare de pe frontieră, folosind coordonatele (ν, θ), planul tangent la închiderea lui $S^{\pm}_{C_1,C_1^*,c_1^*}$ este generat de un vector care este tangent la cercul corespunzător şi de vectorul $(0,0,1)$. Deci, planul tangent este paralel cu axa de rotaţie Oz.

Geometric, începem cu o suprafaţă de tip $S^{\pm}_{C_1,C_1^*,c_1^*}$ şi prin simetrie faţă de planele unde se află frontiera, obţinem suprafaţa noastră completă $\tilde{S}_{C_1,C_1^*}$; procesul este periodic şi trebuie să îl executăm în lungul întregii axe Oz.

Analitic, fixăm C_1 şi C_1^*, şi alternând semnul şi cu alegeri potrivite ale constantei c_1^*, putem construi o suprafaţă de rotaţie completă $\tilde{S}_{C_1,C_1^*}$ în $\mathbb{R}^3$ care pe o submulţime deschisă şi densă este local izometrică cu (D_{C_1}, g_{C_1}). De fapt, aceste alegeri ale lui $+$ şi $-$, şi ale constantelor c_1^* sunt unic determinate de "prima" alegere a lui $+$, sau a lui $-$, şi a constantei c_1^*. Începem cu $+$ şi $c_1^* = c_{1,0}^*$.

Observaţia 3.37. Dacă $C_1 = C_1^* = 1$, $c_1^* = 0$ şi $\xi_{00} = (9/4)^{3/2}$, graficele lui

$$\nu_0(\xi) = \int_{\xi_{00}}^{\xi} \sqrt{\frac{3\tau^2 - \left(-\tau^{8/3} + 3C_1\tau^2 - 3\right)}{\tau^4 \left(-\tau^{8/3} + 3C_1\tau^2 - 3\right)}}\, d\tau,$$

$\nu_1(\xi) = 2\nu_{02} - \nu(\xi)$, $\nu_{-1}(\xi) = 2\nu_{01} - \nu(\xi)$, şi ale curbelor profil corespunzătoare $\sigma_0(\xi) = (1/\xi, \nu_0(\xi))$, $\sigma_1(\xi) = (1/\xi, \nu_1(\xi))$, şi $\sigma_{-1}(\xi) = (1/\xi, \nu_{-1}(\xi))$, for $\xi \in (\xi_{01}, \xi_{02})$, sunt reprezentate în Figurile 3.7, 3.8, 3.9, 3.10.

Curba profil a lui $S^{\pm}_{C_1,C_1^*,c_1^*}$ poate fi văzută ca graficul unei funcţii care depinde de ν şi aceasta ne permite să obţinem o funcţie F astfel încât curba profil a lui $\tilde{S}_{C_1,C_1^*}$ să fie graficul unei funcţii $\chi \circ F$ care depinde de ν şi este definită pe întreg Oz (sau $O\nu$). Funcţia $F : \mathbb{R} \to [\xi_{01}, \xi_{02}]$ este periodică şi cel puţin de clasă C^3.

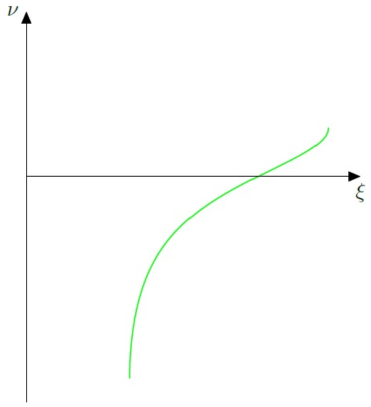

Figure 3.7: Graficul lui ν_0.

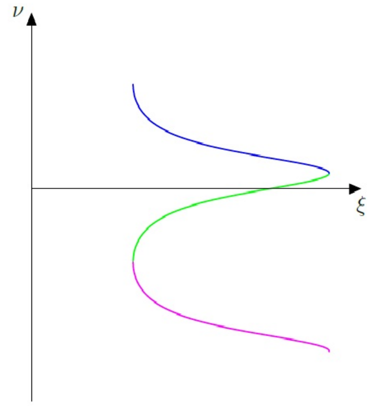

Figure 3.8: Graficul lui ν_0, ν_1 şi ν_{-1}.

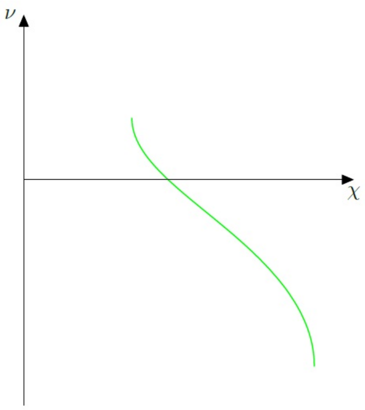

Figure 3.9: Graficul lui σ_0.

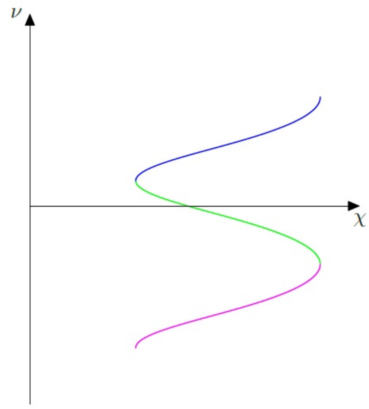

Figure 3.10: Graficul lui σ_0, σ_1 şi σ_{-1}.

Teorema 3.38. *Suprafaţa de rotaţie dată de*

$$\Psi_{C_1,C_1^*}(\nu,\theta) = \left((\chi\circ F)(\nu)\cos\frac{\theta}{C_1^*}, (\chi\circ F)(\nu)\sin\frac{\theta}{C_1^*}, \nu\right), \qquad (\nu,\theta)\in\mathbb{R}^2,$$

este completă şi, pe o submulţime deschisă şi densă, este local izometrică cu (D_{C_1}, g_{C_1}). *Metrica indusă este dată de*

$$g_{C_1,C_1^*}(\nu,\theta) = \frac{3F^2(\nu)}{3F^2(\nu) - (C_1^*)^2\left(-F^{8/3}(\nu) + 3C_1F^2(\nu) - 3\right)}d\nu^2 + \frac{1}{F^2(\nu)}d\theta^2,$$

$(\nu,\theta)\in\mathbb{R}^2$. *Mai mult,* $\operatorname{grad} K \neq 0$ *în orice punct al unei submulţimi deschise şi dense, şi* $1-K>0$ *în orice punct.*

Din Teorema 3.38 se obţine uşor următorul rezultat.

Propoziţia 3.39. *Acoperirea universală a suprafeţei de rotaţie dată de* Ψ_{C_1,C_1^*} *este* $\mathbb{R}^2$ *înzestrat cu metrica* g_{C_1,C_1^*}. *Aceasta este completă,* $1-K>0$ *pe* $\mathbb{R}^2$ *şi, pe o submulţime deschisă şi densă, este local izometrică cu* (D_{C_1}, g_{C_1}) *şi* $\operatorname{grad} K \neq 0$ *în orice punct. Mai mult oricare două suprafeţe* $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_1,C_1^*}\right)$ *şi* $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_1,C_1^{*\prime}}\right)$ *sunt izometrice.*

A doua etapă constă în construcţia efectivă a imersiei biconservative de la suprafaţa $\left(\mathbb{R}^2, g_{C_1,C_1^*}\right)$ în $\mathbb{S}^3$, sau de la $\tilde{S}_{C_1,C_1^*}$ în $\mathbb{S}^3$. Ideea geometrică a construcţiei este următoarea: de la fiecare “bucată” $S^{\pm}_{C_1,C_1^*,c_1^*}$ a lui $\tilde{S}_{C_1,C_1^*}$ “ne întoarcem” la (D_{C_1}, g_{C_1}) şi apoi, folosind ϕ_{C_1} şi alegerea potrivită a lui $+$ sau $-$ şi a constantei c_1, obţinem imersia biconservativă Φ_{C_1,C_1^*}. Din nou, alegerile lui $+$ sau $-$, şi a constantei c_1 sunt unic determinate (modulo 2π, pentru c_1) de “prima” alegere a lui $+$, sau a lui $-$, şi a constantei c_1.

Într-un final, se obţine următorul rezultat.

Teorema 3.40. *Aplicaţia* $\Phi_{C_1,C_1^*} : \left(\mathbb{R}^2, g_{C_1,C_1^*}\right) \to \mathbb{S}^3$, *definită de*

$$\Phi_{C_1,C_1^*}(\nu,\theta) = \phi_{C_1}(F(\nu),\theta) = \left(\Phi^1(\nu), \Phi^2(\nu), \Phi^3(\nu)\cos(\sqrt{C_1}\theta), \Phi^4(\nu)\sin(\sqrt{C_1}\theta)\right),$$

unde $(\nu,\theta) \in \mathbb{R}^2$, *este o imersie biconservativă.*

Mai multe detalii legate de această construcţie şi expresia explicită a imersiei Φ_{C_1,C_1^*} se regăsesc în teză.

Observaţia 3.41. Remarcăm faptul că Φ_{C_1,C_1^*} are auto-intersecţii (în lungul cercurilor).

În continuare, considerăm $C_1 = C_1^* = 1$, $c_1^* = 0$ şi începem cu $+$ în expresia lui ν.

Construcţia suprafeţelor biconservative complete în $\mathbb{S}^3$ poate fi rezumată în diagrama din Figura 3.11.

Anumite *experimente numerice* sugerează faptul că Φ_{C_1,C_1^*} nu este periodică şi are autointersecţii în lungul cercurilor paralele cu Ox^3x^4.

Încheiem acest capitol verificând (parţial) corectitudinea construcţiei de mai sus cu ajutorul anumitor grafice.

Se poate arăta că proiecţia lui Φ_{C_1,C_1^*} pe planul Ox^1x^2 este o curbă situată într-o coroană circulară cuprinsă între cercurile de raze $\sqrt{1-1/\left(C_1\xi_{01}^2\right)}$ şi $\sqrt{1-1/\left(C_1\xi_{02}^2\right)}$. Are autointersecţii şi este densă în coroana circulară. Aceasta este ilustrată în Figura 3.12.

În Figura 3.13, se reprezintă curbura cu semn a curbei profil a suprafeţei $\tilde{S}_{C_1,C_1^*}$ care sugerează faptul că avem o lipire netedă.

Curbura cu semn a curbei obţinută proiectând Φ_{C_1,C_1^*} pe planul Ox^1x^2 este reprezentată în Figura 3.14 şi aceasta sugerează faptul că Φ_{C_1,C_1^*} este cel puţin de clasă C^3.

Totuşi, putem formula următoarea problemă deschisă.

Problemă deschisă. *Există o imersie* Φ_{C_1,C_1^*} *biconservativă, non-CMC, care este dublu periodică, deci care defineşte o suprafaţă biconservativă, non-CMC în* $\mathbb{S}^3$*?*

În ceea ce priveşte suprafeţele biarmonice în $\mathbb{S}^3$ avem următorul rezultat de clasificare locală.

Teorema 3.42 ([5])**.** *Fie* $\varphi : M^2 \to \mathbb{S}^3$ *o suprafaţă propriu-biarmonică. Atunci* $\varphi(M)$ *este o submulţime deschisă a unei hipersfere mici* $\mathbb{S}^2(1/\sqrt{2})$.

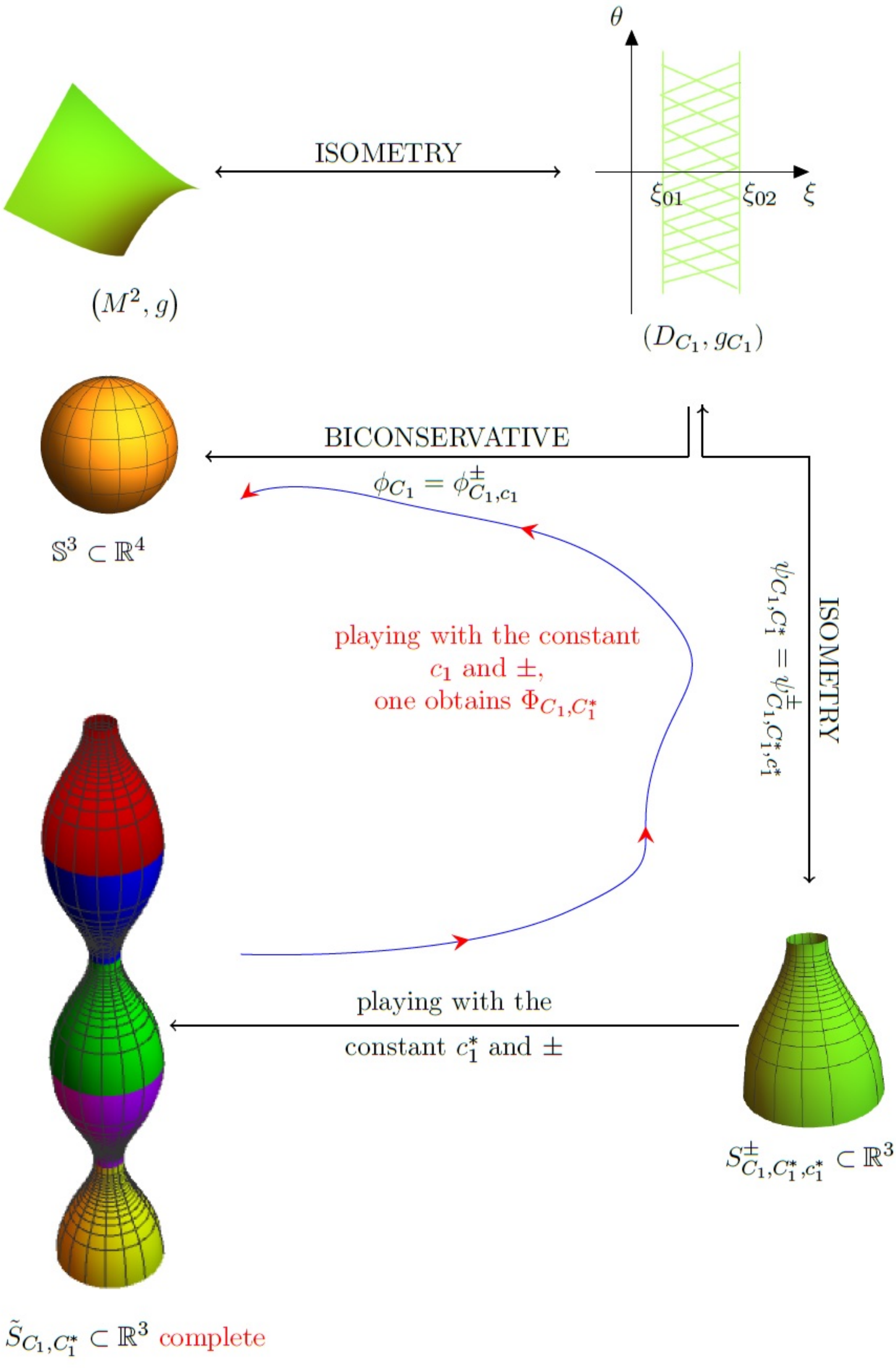

Figure 3.11: Ideea construcţiei suprafeţelor biconservative complete în $\mathbb{S}^3$.

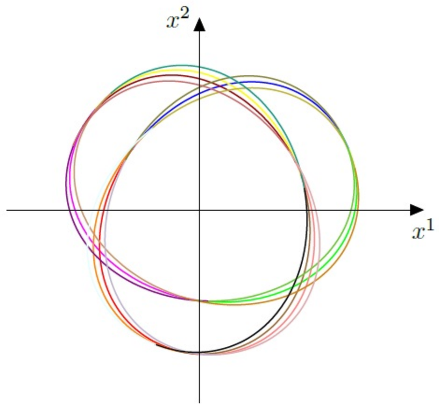

Figure 3.12: Proiecţia lui Φ_{C_1,C_1^*} pe planul Ox^1x^2.

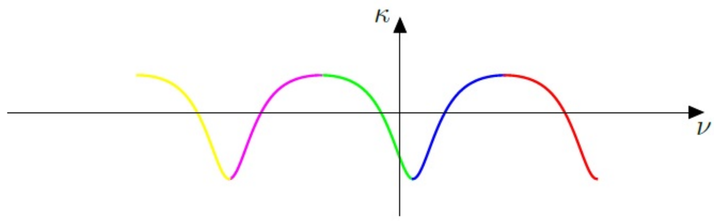

Figure 3.13: Curbura cu semn a curbei profil a lui $\tilde{S}_{C_1,C_1^*}$.

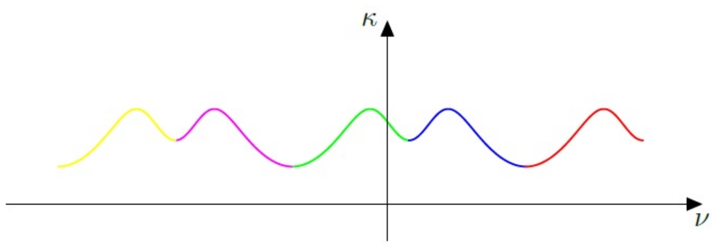

Figure 3.14: Curbura cu semn a curbei obţinută proiectând Φ_{C_1,C_1^*} pe planul Ox^1x^2.

CAPITOLUL 4

Suprafeţe biconservative în varietăţi riemanniene arbitrare

În acest capitol vom prezenta câteva proprietăţi generale ale suprafeţelor biconservative în varietăţi riemanniene oarecare. Vom găsi legătura dintre biconservativitate, proprietatea operatorului formă A_H de a fi câmp tensorial Codazzi, olomorfia funcţiei Hopf generalizată şi proprietatea suprafeţei de a avea curbură medie constantă. Apoi, vom descrie metrica şi operatorul formă A_H ale unei suprafeţe biconservative CMC. În final, vom găsi o formulă de tip Simons pentru suprafeţele biconservative şi apoi o vom folosi la studierea proprietăţilor acestor suprafeţe.

Majoritatea rezultatelor din acest capitol sunt orginale şi ele se pot regăsi în [26]. Anumite rezultate sunt cunoscute, dar obţinute într-un alt mod.

4.1 Mai multe caracterizări ale subvarietăţilor biconservative

În această secţiune vom caracteriza subvarietăţile biconservative care satisfac anumite ipoteze geometrice adiţionale.

Începem prin studierea proprietăţilor subvarietăţilor cu A_H paralel, din moment ce ele sunt "cele mai simple" suprafeţe biconservative. Mai întâi, definim *curburile principale* ale unei subvarietăţi M^m a lui N^n ca fiind funcţiile valori proprii ale lui A_H.

Propoziţia 4.1. *Fie $\varphi : M^m \to N^n$ o subvarietate şi $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$ curburile principale ale lui M. Dacă $\nabla A_H = 0$, atunci*

(i) M este biconservativă;

(ii) λ_i sunt funcţii constante pe M (în particular, M este CMC);

(iii) $A_{\nabla^\perp_X H}(Y) - A_{\nabla^\perp_Y H}(X) = \left(R^N(X,Y)H\right)^\top$, pentru orice $X, Y \in C(TM)$;

(iv) $\operatorname{trace} A_{\nabla^\perp_{\cdot} H}(\cdot) = -\operatorname{trace}\left(R^N(\cdot, H)\cdot\right)^\top$.

Vom găsi, mai târziu în acest capitol, anumite rezultate reciproce ale acestei propoziţii. Mai precis, în cazul în care $m = 2$, vom arăta că, sub anumite ipoteze "standard", o suprafaţă biconservativă satisface $\nabla A_H = 0$.

În cazul particular al suprafeţelor, avem un rezultat mai puternic.

Propoziţia 4.2. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă. Dacă $\nabla A_H = 0$, atunci M este pseudoumbilicală sau plată.*

Dacă (M^m, g) este o varietate riemanniană şi T este un câmp tensorial simetric de tip $(1,1)$, atunci funcţiile valori proprii ale sale $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$ sunt funcţii constante pe M şi, evident, T este un câmp tensorial Codazzi. Dacă $m = 2$, are loc şi reciproca acestui rezultat.

Propoziţia 4.3. *Fie* (M^2, g) *o suprafaţă şi* T *un câmp tensorial simetric de tip* $(1,1)$*. Fie* $\lambda_1 \geq \lambda_2$ *funcţiile valori proprii ale lui* T*. Dacă* λ_1 *şi* λ_2 *sunt constante pe* M *şi* T *este un câmp tensorial Codazzi, atunci* $\nabla T = 0$*. Mai mult, dacă* $\lambda_1 > \lambda_2$*, atunci* (M^2, g) *este plată.*

Dacă $T = A_H$, atunci avem următorul rezultat.

Corolarul 4.4. *Fie* $\varphi : M^2 \to N^n$ *o suprafaţă şi* $\lambda_1 \geq \lambda_2$ *curburile principale ale lui* M*. Dacă* λ_1 *şi* λ_2 *sunt funcţii constante pe* M *şi* A_H *este un câmp tensorial Codazzi, atunci* $\nabla A_H = 0$*.*

Notăm că, în general, A_H nu este un câmp tensorial Codazzi. În ceea ce urmează, vom studia proprietăţile subvarietăţilor cu A_H câmp tensorial Codazzi (din moment ce acesta este următorul pas natural după cel în care am considerat A_H paralel), şi legătura lor cu subvarietăţile biconservative.

Propoziţia 4.5. *Fie* $\varphi : M^m \to N^n$ *o subvarietate. Dacă* A_H *este un câmp tensorial Codazzi, atunci*

(i) $A_{\nabla^\perp_X H}(Y) - A_{\nabla^\perp_Y H}(X) = \left(R^N(X,Y)H\right)^\top$, *pentru orice* $X, Y \in C(TM)$*;*

(ii) $\operatorname{trace} \nabla A_H = m \operatorname{grad}\left(|H|^2\right)$*;*

(iii) $\operatorname{trace} A_{\nabla^\perp_\cdot H}(\cdot) = \frac{m}{2} \operatorname{grad}\left(|H|^2\right) - \operatorname{trace}\left(R^N(\cdot, H)\cdot\right)^\top$*;*

(iv) M *este biconservativă dacă şi numai dacă* $|H|$ *este constantă.*

În finalul acestei secţiuni considerăm acele subvarietăţi în forme spaţiale, care au H paralel în fibratul normal (subvarietăţile PMC). Folosind ecuaţia Codazzi, găsim următorul rezultat.

Propoziţia 4.6. *Fie* $\varphi : M^m \to N^n(c)$ *o subvarietate* PMC*. Atunci*

(i) M *este biconservativă;*

(ii) A_H *este un câmp tensorial Codazzi;*

(iii) $\langle (\nabla A_H)(\cdot,\cdot), \cdot\rangle$ *este total simetric;*

(iv) $\operatorname{trace} \nabla A_H = 0$.

4.2 Proprietăţi ale suprafeţelor biconservative

În această secţiune vom găsi proprietăţile cele mai importante ale suprafeţelor biconservative în varietăţi riemanniene oarecare.

Unul din cele mai importante rezultate ale acestei secţiuni este Teorema 4.10, dar înainte de a o enunţa, avem o lemă care are loc pentru un câmp tensorial simetric de tip $(1,1)$ oarecare, apoi Teorema 4.9, esenţială în demonstraţia Teoremei 4.10.

Lema 4.7. *Fie* (M^2, g) *o suprafaţă şi* T *un câmp tensorial simetric de tip* $(1,1)$*. Avem*

(i)

$$\operatorname{div} T = \operatorname{grad} t - \langle Z_{12}, X_2\rangle X_1 + \langle Z_{12}, X_1\rangle X_2,$$

unde $t = \operatorname{trace} T$*,* $\{X_1, X_2\}$ *este un câmp local de baze ortonormate pe* M *şi*

$$Z_{12} = (\nabla_{X_1} T)(X_2) - (\nabla_{X_2} T)(X_1);$$

(ii) $\langle T(\partial_z), \partial_z\rangle$ *este olomorfă dacă şi numai dacă* $\operatorname{grad} t = 2 \operatorname{div} T$*;*

(iii) $\langle T(\partial_z), \partial_z \rangle$ *este olomorfă dacă şi numai dacă*

$$\operatorname{grad} t = 2\langle Z_{12}, X_2 \rangle X_1 - 2\langle Z_{12}, X_1 \rangle X_2.$$

Observaţia 4.8. Remarcăm faptul că $\langle Z_{12}, X_2 \rangle X_1 - \langle Z_{12}, X_1 \rangle X_2$ nu depinde de câmpul local de baze ortonormate $\{X_1, X_2\}$. Deci, există un unic câmp vectorial global Z astfel încât pentru orice câmp local de baze ortonormate $\{X_1, X_2\}$, pe domeniul său de definiţie, avem

$$Z = \langle Z_{12}, X_2 \rangle X_1 - \langle Z_{12}, X_1 \rangle X_2.$$

Prin urmare, avem următoarea formulă globală

$$\operatorname{div} T = \operatorname{grad} t - Z.$$

Lema 4.7 este ingredientul cheie în demonstraţia următoarei teoreme.

Teorema 4.9. *Fie* $\left(M^2, g\right)$ *o suprafaţă şi* T *un câmp tensorial simetric de tip* $(1,1)$. *Atunci oricare două din relaţiile următoare implică pe oricare din celelalte*

(i) $\operatorname{div} T = 0$;

(ii) t *este constant;*

(iii) $\langle T(\partial_z), \partial_z \rangle$ *este olomorfă;*

(iv) T *este câmp tensorial Codazzi.*

Considerând $T = S_2$ sau $T = A_H$, obţinem următorul rezultat.

Teorema 4.10. *Fie* $\varphi : M^2 \to N^n$ *o suprafaţă. Atunci oricare două din relaţiile următoare implică pe oricare din celelalte*

(i) M *este biconservativă;*

(ii) $|H|$ *este constantă;*

(iii) $\langle A_H(\partial_z), \partial_z \rangle$ *este olomorfă;*

(iv) A_H *este câmp tensorial Codazzi.*

Folosind Corolarul 4.4 şi Teorema 4.10, se obţine următorul rezultat.

Teorema 4.11. *Fie* $\varphi : M^2 \to N^n$ *o suprafaţă biconservativă. Notăm cu* λ_1 *şi* λ_2 *curburile principale ale lui* M. *Dacă* λ_1 *şi* λ_2 *sunt constante pe* M, *atunci* $\nabla A_H = 0$.

Din moment ce o suprafaţă CMC într-o formă spaţială 3-dimensională este biconservativă, folosind Teorema 4.10, obţinem uşor următoarele proprietăţi bine cunoscute ale suprafeţelor CMC.

Corolarul 4.12. *Fie* $\varphi : M^2 \to N^3(c)$, $c \in \mathbb{R}$, *o suprafaţă* CMC. *Atunci*

(i) M *este biconservativă;*

(ii) A_H *este câmp tensorial Codazzi;*

(iii) $\langle A_H(\partial_z), \partial_z \rangle$ *este olomorfă.*

Pentru o suprafaţă PMC într-o varietate oarecare, A_H nu este în mod necesar un câmp tensorial Codazzi, dar dacă suprafaţa este biconservativă, atunci acest lucru are loc.

Corolarul 4.13. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă biconservativă PMC. Atunci A_H este câmp tensorial Codazzi şi $\left(R^N(X,Y)H\right)^\top = 0$ pentru orice $X, Y \in C(TM)$.*

Următoarea teoremă descrie cu ajutorul lui $|H|$ şi a curburilor principale ale lui M metrica şi operatorul formă A_H pentru o suprafaţă biconservativă CMC într-o varietate oarecare.

Teorema 4.14. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă biconservativă CMC. Notăm cu λ_1 şi λ_2 curburile principale al lui M şi cu $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$ diferenţa lor. Atunci, în jurul oricărui punct non-pseudoumbilical p există o hartă locală izotermă $(U; u, v)$ care este şi linie de curbură pentru A_H. Mai mult, pe U, avem*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = \frac{1}{\mu}\langle\cdot,\cdot\rangle_0,$$

şi A_H este dat de

$$\langle A_H(\cdot),\cdot\rangle = \left(\frac{|H|^2}{\mu} + \frac{1}{2}\right) du^2 + \left(\frac{|H|^2}{\mu} - \frac{1}{2}\right) dv^2,$$

sau, echivalent, de

$$A_H = \left(\frac{|H|^2}{\mu} + \frac{1}{2}\right) du \otimes \partial_u + \left(\frac{|H|^2}{\mu} - \frac{1}{2}\right) dv \otimes \partial_v,$$

unde $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ este metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^2$.

În cazul particular când $n = 3$, obţinem că μ satisface

$$\mu \overset{0}{\Delta} \mu + \left|\overset{0}{\operatorname{grad}} \mu\right|_0^2 + 2\mu\left(K^N + |H|^2 - \frac{\mu^2}{4|H|^2}\right) = 0, \tag{4.1}$$

unde K^N este curbura secţională a lui N^3 în lungul lui M^2.

Observaţia 4.15. Dacă N este o formă spaţială 3-dimensională, acelaşi rezultat are loc fără ipoteza de biconservativitate, din moment ce o suprafaţă CMC este automat biconservativă.

Remarcăm că, din moment ce $K = -(\Delta(\log \mu))/2$, următorul rezultat este evident.

Corolarul 4.16. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă biconservativă CMC. Presupunem că M este compactă şi nu are puncte pseudoumbilicale. Atunci M este topologic un tor.*

Utilizând Teorema 4.10 şi Corolarul 4.16, obţinem următorul rezultat.

Corolarul 4.17. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă biconservativă CMC. Presupunem că M este compactă şi că nu are puncte pseudoumbilicale. Dacă $K \geq 0$ sau $K \leq 0$, atunci $\nabla A_H = 0$ şi $K = 0$.*

Încheiem această secţiune cu două rezultate care, pe scurt, afirmă că o suprafaţă biconservativă CMC în N^n poate fi imersată şi în $N^3(c)$ având fie A_H, fie S_2, ca operator formă.

Teorema 4.18. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă biconservativă. Notăm cu λ_1 şi λ_2 curburile principale ale lui M corespunzătoare lui φ. Presupunem că λ_1 şi λ_2 sunt constante şi $\lambda_1 > \lambda_2$. Atunci*

(i) există local o suprafaţă izoparametrică $\psi : M^2 \to N^3(c)$ astfel încât $A^\varphi_{H^\varphi}$ este operatorul formă a lui ψ în direcţia câmpului vectorial unitar normal, unde

$$c = \frac{\mu^2}{4} - |H^\varphi|^4;$$

mai mult, $\left|H^\psi\right| = |H^\varphi|^2$.

(ii) există local o suprafaţă izoparametrică $\psi : M^2 \to N^3(c)$ astfel încât S^φ_2 este operatorul formă a lui ψ în direcţia câmpului vectorial unitar normal, unde

$$c = 4\left(\mu^2 - |H^\varphi|^4\right);$$

mai mult, $\left|H^\psi\right| = 2\,|H^\varphi|^2$.

Teorema 4.19. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă biconservativă. Notăm cu λ_1 and λ_2 curburile principale ale lui M corespunzătoare lui φ. Presupunem că λ_1 şi λ_2 sunt constante şi $\lambda_1 = \lambda_2$. Dacă $K = 0$, atunci:*

(i) există local o suprafaţă umbilicală $\psi : M^2 \to N^3(c)$ astfel încât $A^{\varphi}_{H^{\varphi}}$ este operatorul formă a lui ψ în direcţia câmpului vectorial unitar normal, unde

$$c = -\left|H^{\varphi}\right|^4 ;$$

mai mult, $\left|H^{\psi}\right| = \left|H^{\varphi}\right|^2$.

(ii) există local o suprafaţă umbilicală $\psi : M^2 \to N^3(c)$ astfel încât S^{φ}_2 este operatorul formă al lui ψ în direcţia câmpului vectorial unitar normal, unde

$$c = -4\left|H^{\varphi}\right|^4 ;$$

mai mult, $\left|H^{\psi}\right| = 2\left|H^{\varphi}\right|^2$.

4.3 O formulă de tip Simons pentru S_2

După cum am menţionat deja, vom prezenta aici anumite rezultate reciproce ale Propoziţiei 4.1 (vezi Teorema 4.11, Teorema 4.23 pentru cazul compact, şi Teorema 4.24 pentru cazul complet non-compact).

Ca şi în secţiunea anterioară, vom calcula mai întâi rough Laplacian $\Delta^R T$ pentru un câmp tensorial simetric T de tip $(1,1)$ oarecare pe M cu $\operatorname{div} T = 0$, şi apoi $\Delta^R S_2$.

Propoziţia 4.20. *Fie $\left(M^2, g\right)$ o suprafaţă şi T un câmp tensorial simetric de tip $(1,1)$. Presupunem că $\operatorname{div} T = 0$. Atunci*

$$\operatorname{trace}\left(\nabla^2 T\right) = 2KT - tKI - (\Delta t)I - \nabla \operatorname{grad} t. \tag{4.2}$$

Folosind (4.2), putem calcula laplacianul pătratului normei lui S_2 şi obţinem o formulă de tip Simons (aici, în locul formei a doua fundamentală avem tensorul bitensiune-impuls).

Propoziţia 4.21. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă biconservativă. Atunci*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta\left|S_2\right|^2 = \ & -2K\left|S_2\right|^2 + \operatorname{div}\left(\left(\left\langle S_2, \operatorname{grad}\left(|\tau(\varphi)|^2\right)\right\rangle\right)^{\sharp}\right) + K|\tau(\varphi)|^4 \\ & + \tfrac{1}{2}\Delta\left(|\tau(\varphi)|^4\right) + \left|\operatorname{grad}\left(|\tau(\varphi)|^2\right)\right|^2 - \left|\nabla S_2\right|^2 . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Integrând ecuaţia (4.3) obţinem următoarea formulă integrală.

Propoziţia 4.22. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă biconservativă compactă. Atunci*

$$\int_M \left(\left|\nabla S_2\right|^2 + 2K\left(\left|S_2\right|^2 - \frac{|\tau(\varphi)|^4}{2}\right)\right) v_g = \int_M \left|\operatorname{grad}\left(|\tau(\varphi)|^2\right)\right|^2 \ v_g, \tag{4.4}$$

sau, echivalent,

$$\int_M \left(\left|\nabla A_H\right|^2 + 2K\left(\left|A_H\right|^2 - 2|H|^4\right)\right) v_g = \frac{5}{2}\int_M \left|\operatorname{grad}\left(|H|^2\right)\right|^2 v_g. \tag{4.5}$$

Din (4.5) se obţine uşor următorul rezultat.

Teorema 4.23. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă biconservativă CMC compactă. Dacă $K \geq 0$, atunci $\nabla A_H = 0$ şi M este plată sau pseudoumbilicală.*

În cele ce urmează, studiem suprafeţele biconservative complete care nu sunt compacte.

Teorema 4.24. *Fie $\varphi : M^2 \to N^n$ o suprafaţă biconservativă CMC completă care nu este compactă şi presupunem $K \geq 0$. Dacă $\overset{N}{\operatorname{Riem}} \leq k_0$, unde k_0 este o constantă nenegativă, atunci $\nabla A_H = 0$.*

4.3.1 Exemple de subvarietăţi cu $\nabla A_H = 0$

După cum am văzut, o suprafaţă PMC într-o formă spaţială $N^n(c)$, $n \geq 4$, este, în mod trivial, biconservativă. Dar, dacă suprafaţa este doar CMC, atunci ea nu este obligatoriu biconservativă. În $\mathbb{R}^4$, au fost obţinute toate suprafeţele biconservative CMC care nu sunt PMC. Ele sunt date de imersia izometrică $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definită prin

$$\varphi(u, v) = \overline{\gamma}(u) + (v + a)\overline{e}_4,$$

unde $\overline{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ este o curbă netedă parametrizată prin lungime de arc cu curbura constantă pozitivă κ şi torsiunea $\tau = 0$. Printr-un calcul direct, obţinem că forma a doua fundamentală a suprafeţei este determinată de

$$B\left(\partial_u, \partial_u\right) = \kappa(u)N(u), \qquad B\left(\partial_u, \partial_v\right) = 0, \qquad B\left(\partial_v, \partial_v\right) = 0,$$

unde $\{T(u), N(u), B(u)\}$ este reprerul Frenet pentru curba $\overline{\gamma}$. Apoi, se obţine expresia câmpului vectorial curbură medie

$$H(u, v) = \frac{\kappa}{2}N(u),$$

expresia operatorului formă A_H

$$A_H\left(\partial_u\right) = \frac{\kappa^2}{2}\partial_u, \qquad A_H\left(\partial_v\right) = 0$$

şi

$$\nabla^{\perp}_{\partial_u} H = \frac{\kappa}{2}\tau(u)N(u), \qquad \nabla^{\perp}_{\partial_v} H = 0.$$

Este uşor de văzut că dacă φ este o imersie biconservativă, i.e., satisface

$$\operatorname{grad}\left(|H|^2\right) + 2\operatorname{trace} A_{\nabla^{\perp}_{\cdot} H}(\cdot) + 2\operatorname{trace}\left(R^{\mathbb{R}^4}(\cdot, H)\cdot\right)^{\top} = 0.$$

Deci, φ satisface toate ipotezele Teoremei 4.24 care implică faptul că A_H este paralel, un fapt care poate fi verificat şi printr-un calcul direct.

BIBLIOGRAFIE

[1] P. Baird, J. Eells, *A conservation law for harmonic maps*, Geometry Symposium Utrecht 1980, 1–25, Lecture Notes in Math. 894, Springer, Berlin-New York, 1981.

[2] A. Balmuş, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic PNMC submanifolds in spheres*, Ark. Mat. 51 (2013), 197–221.

[3] A. Besse, *Eistein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 10, Springer-Verlag Berlin, 1987.

[4] W.M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1986.

[5] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of* $\mathbb{S}^3$, Internat. J. Math. 12 (2001), 867–876.

[6] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, P. Piu, *Surfaces in three-dimensional space forms with divergence-free stress-bienergy tensor*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 193 (2014), 529–550.

[7] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Boston, 1992.

[8] B-Y. Chen, *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*, Series in Pure Mathematics, 1. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.

[9] B-Y. Chen, S. Ishikawa, *Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. 45 (1991), 323–347.

[10] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, Inc., 1990.

[11] J. Eells, J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109–160.

[12] D. Fetcu, S. Nistor, C. Oniciuc, *On biconservative surfaces in* 3*-dimensional space forms*, Comm. Anal. Geom. (5) 24 (2016), 1027–1045.

[13] D. Fetcu, C. Oniciuc, A.L. Pinheiro, *CMC biconservative surfaces in* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, J. Math. Anal. Appl. 425 (2015), 588–609.

[14] Y. Fu, *Explicit classification of biconservative surfaces in Lorentz* 3*-space forms*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 194 (2015), 805–822.

[15] Y. Fu, N.C. Turgay, *Complete classification of biconservative hypersurfaces with diagonalizable shape operator in Minkowski 4-space*, Internat. J. Math. (5) 27 (2016), 1650041, 17 pp.

[16] W.B. Gordon, *An analytical criterion for the completeness of Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973), 221–225.

[17] Th. Hasanis, Th. Vlachos, *Hypersurfaces in E^4 with harmonic mean curvature vector field*, Math. Nachr. 172 (1995), 145–169.

[18] D. Hilbert, *Die grundlagen der physik*, Math. Ann. 92 (1924), 1–32.

[19] G.Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A7 (4) (1986), 389–402.

[20] G.Y. Jiang, *The conservation law for 2-harmonic maps between Riemannian manifolds*, Acta Math. Sinica 30 (1987), 220–225.

[21] H.B. Lawson, *Complete minimal surfaces in* $\mathbb{S}^3$, Ann. of Math. (2) 92 (1970), 335–374.

[22] E. Loubeau, S. Montaldo, C. Oniciuc, *The stress-energy tensor for biharmonic maps*, Math. Z. 259 (2008), 503–524.

[23] S. Montaldo, C. Oniciuc, A. Ratto, *Proper biconservative immersions in the Euclidean space*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 195 (2016), 403–422.

[24] A. Moroianu, S. Moroianu, *Ricci surfaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 14 (2015), 1093–1118.

[25] S. Nistor, *Complete biconservative surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{S}^3$, J. Geom. Phys. 110 (2016), 130–153.

[26] S. Nistor, *On biconservative surfaces*, preprint, arXiv: 1704.04598.

[27] S. Nistor, C. Oniciuc, *Global properties of biconservative surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{S}^3$, Proceedings of The International Workshop on Theory of Submanifolds, Istambul Technical University, Turkey 2-4 June 2016, to appear.

[28] S. Nistor, C. Oniciuc, *On the uniqueness of complete biconservative surfaces in* $\mathbb{R}^3$, work in progress.

[29] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, An. Stiint. Univ. Al.I. Cuza Iasi Mat (N.S.) 48 (2002), 237–248.

[30] C. Oniciuc, *O Introducere în Teoria Aplicaţiilor Armonice*, Casa Editorială Demiurg, Iaşi, 2007.

[31] Y.L. Ou, *Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds*, Pacific J. Math. 248 (2010), 217–232.

[32] G. Ricci-Curbastro, *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di* 2° *grado*, Ven. Ist. Atti (7) VI (1895), 445–488.

[33] A. Sanini, *Applicazioni tra varietà riemanniane con energia critica rispetto a deformazioni di metriche*, Rend. Mat. 3 (1983), 53–63.

[34] T. Sasahara, *Tangentially biharmonic Lagrangian H-umbilical submanifolds in complex space forms*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 85 (2015), 107–123.

[35] A. Upadhyay, N.C. Turgay, *A Classification of Biconservative Hypersurfaces in a Pseudo-Euclidean Space*, J. Math. Anal. Appl. (2) 444 (2016), 1703–1720.