

Dinamica rezonanțelor și a haosului în științele spațiale

Roberto Paoli

Rezumat

Prezenta teză include o serie de rezultate clasice și originale, referitoare la dinamica corpurilor cerești naturale sau artificiale. Un accent deosebit este pus pe studiul rezonanțelor, fiind vizate aspecte privind modelarea analitică și numerică a acestora. Teza a fost elaborată de autor pe perioada studiilor sale, atât ca student doctorand, cât și ca asistent de cercetare al Universității Alexandru Ioan Cuza din Iași în cadrul proiectului Stardust-R Innovative Training Network, finanțat prin programul Marie Skłodowska-Curie. Teza își propune să culeagă o serie de rezultate relevante obținute în domeniul mecanicii cerești și al științelor spațiale. Cu toate că principalele rezultate originale se referă la dinamica deșeurilor spațiale, multe dintre subiectele discutate în prezenta teză pot fi adaptate la teoria dinamicii particulelor aflate în vecinătatea corpurilor extinse, de formă neregulată, cum ar fi asteroizii care populează sistemul nostru solar. Programele FORTRAN `plarrt`, disponibile online la adresa <https://github.com/bubberio/plarrt>, au fost realizate ca instrument de lucru ce însoțește prezenta teză cu scopul de a utiliza nu doar rezultate teoretice dar și instrumente numerice deosebit de utile precum metodele Runge-Kutta pentru propagarea orbitelor și indicatorul FLI pentru a distinge obitele haotice față de cele regulate. Toate simulările numerice prezentate în această teză au fost realizate în mod independent de către autor folosind un astfel de cod. Cu excepția unor cazuri singulare pentru care este menționată sursa, toate figurile au fost obținute de autor.

Noțiuni preliminare

Pentru prezentarea rezultatelor tezei, sunt descrise mai întâi câteva noțiuni preliminare, inclusiv legile fundamentale ale mecanicii, aspecte din domeniul sistemelor dinamice, proprietăți ale punctelor fixe și ale varietăților invariante asociate. Mișcarea studiată în prezenta teză este descrisă de o serie de *ecuații diferențiale ordinare*, care modelează modul în care o anumită mărime, cum ar fi poziția unei particule infinitezimale, se modifică în timp ca urmare a unor *accelerări* datorate unei *forțe* date. Se reamintesc câteva noțiuni legate de formalismul hamiltonian, unde evoluția unui sistem dat este descrisă în termenii unei funcții netede $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, care depinde de *coordonatele canonice* \mathbf{q} și de *impulsurile* conjugate \mathbf{p} , unde $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, iar n este numărul de grade de libertate al problemei considerate. Ecuațiile care descriu mișcarea, numite *ecuațiile canonice ale lui Hamilton*

0	0						
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0					
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	0			
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{8}$	0		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	
1	$-\frac{9}{44}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{63}{44}$	$\frac{18}{11}$	0	$-\frac{16}{11}$	0
	$\frac{11}{120}$	0	$\frac{27}{40}$	$\frac{27}{40}$	$-\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{11}{120}$

Table 1: Tabelul Butcher pentru metoda Runge-Kutta de ordinul 6 cu 7 etape.

sunt date de

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Sunt prezentate teorema lui Liouville privind integrabilitatea sistemelor hamiltoniene și derivarea variabilelor unghiuri–acțiuni $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{I})$, care permit rescrierea unui sistem hamiltonian integrabil numai în termenii acțiunilor \mathbf{I} , adică $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbf{I})$. Mai mult, sunt prezentate formulările hamiltoniene ale unor probleme clasice, inclusiv problema *pendulului simplu*. Sunt amintite și metodele numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare, și anume clasa metodelor Runge-Kutta cu un singur pas și algoritmul predictor–corector Adams-Bashfort-Moulton care implică metode liniare explicite și implicite cu mai mulți pași. Codul sursă `plarrt` include implementarea metodei Runge-Kutta de ordinul 6 cu 7 etape (RK6) în limbajul de programare FORTRAN. *Tabloul Butcher* care definește această metodă este dat în Tabelul 1. Schema Adams-Bashfort-Moulton a fost, de asemenea, implementată și folosită ca alternativă în diverse probleme. Menționăm că renumitul cod `ode`, implementat de Shampine și Gordon (disponibil gratuit online), poate fi interfațat cu `plarrt` atunci când este nevoie de o acuratețe maximă.

Problemele dinamicii spațiale sunt modelate în mod realist prin considerarea acțiunii concomitente a diverse forțe, care pot fi atât gravitaționale, cât și negravitaționale. Modelarea analitică a interacțiunilor complexe dintre forțe diferite este dificilă. De multe ori,

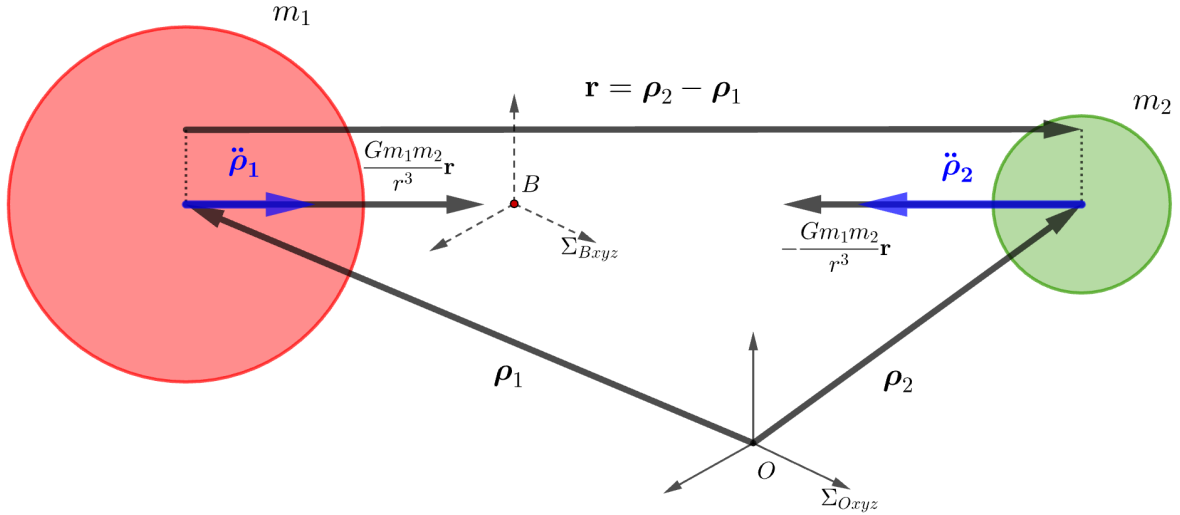


Figure 1: Schema problemei celor două corpuri pentru două mase punctuale (sau echivalent două corpuri sferice).

aceste interacțiuni conduc la *comportamente haotice*. În scopul analizării unor astfel de mișcări, este folosit indicatorul FLI (Fast Lyapunov Indicator), un instrument numeric, dezvoltat la sfârșitul anilor 1990, cu numeroase aplicații în ultimul deceniu. Indicatorul FLI este folosit pentru a distinge între mișcările haotice și mișcările regulate. În practică, este utilizat pentru a oferi o reprezentare vizuală a spațiului fazelor unei probleme date. În cadrul tezei, indicatorul FLI este utilizat pentru a analiza dinamica rezonanțelor, trasa "numeric" în spațiul fazelor varietățile invariante asociate punctelor fixe hiperbolice și pentru a detecta apariția comportamentelor haotice.

Mișcarea kepleriană

Pentru a descrie mișcarea corpurilor cerești, este potrivit să considerăm mai întâi o aproximare simplă a problemei, iar apoi să adăugăm mici *perturbații*. Aproximând cele două corpuri prin mase punctuale, reamintim mai întâi câteva detalii referitoare la problema clasică (kepleriană) a celor două corpuri (vezi Figura 1). *Problema restrânsă a celor două corpuri* este introdusă ca o versiune echivalentă a problemei celor două corpuri care aproximează cazul în care o masă este mult mai mare decât cealaltă, adică se referă la cazul *problemei satelitului*, unde un obiect de masă neglijabilă se mișcă în jurul unui corp masiv. Exemple de obiecte a căror mișcare poate fi modelată prin problema satelitului includ majoritatea planetelor și respectiv sateliților artificiali ai Pământului. Ecuațiile de mișcare care guvernează mișcarea satelitului sunt date de

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_{tot}}{r^3}\mathbf{r}, \quad (2)$$

unde \mathcal{M} este *masa redusă*, M_{tot} este *masa totală* a sistemului și $r = \|\mathbf{r}\|$. Forța gravitațională este *conservativă*, astfel accelerația poate fi exprimată ca gradientul unui potențial U , dat de

$$U = \frac{GM_{tot}}{r}. \quad (3)$$

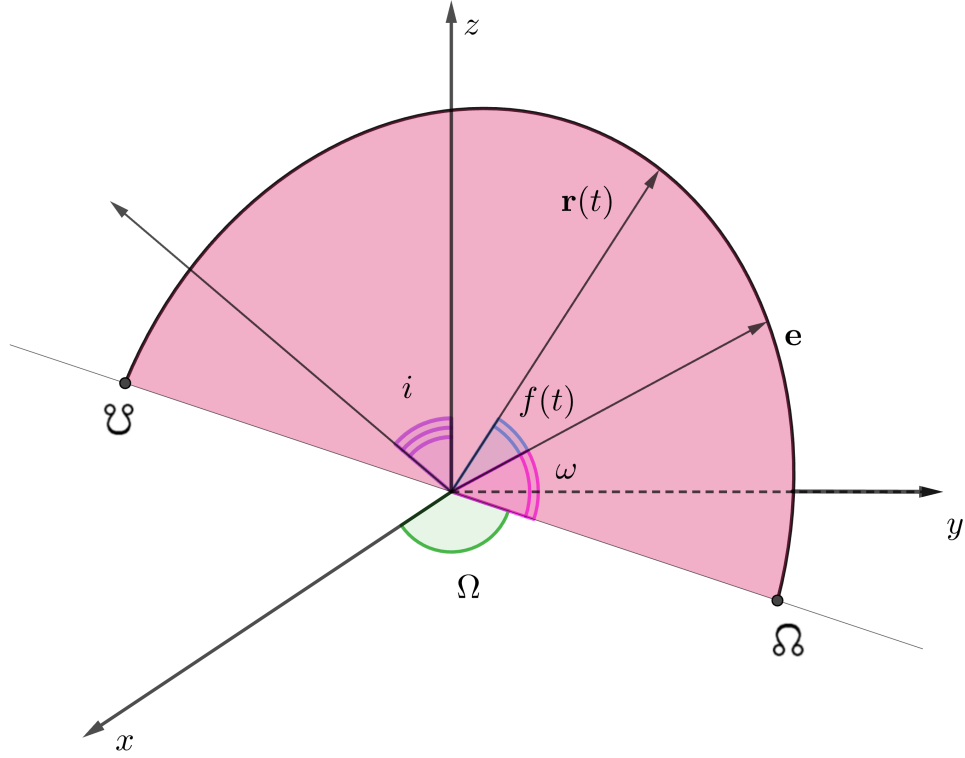


Figure 2: Reprezentarea geometrică a variabilelor unghiulare care aparțin mulțimii elementelor orbitale kepleriene. Punctele Ω și \mathcal{U} reprezintă nodul *ascendent* și, respectiv, *descendent*.

Folosind argumente geometrice, se poate arăta că traiectoria satelitelui poate fi descrisă prin ecuația focală a unei conice

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad (4)$$

unde a este *semi-axa mare*, e este *excentricitatea orbitei*, iar f este *anomalia adevărată*. Aceasta din urmă descrie poziția obiectului de-a lungul orbitei sale. Mai mult, se poate descrie poziția în spațiu a orbitei prin intermediul a trei unghiuri, *înclinația planului orbital* i , *argumentul pericentrului* ω și *ascensia dreaptă a nodul ascendent* Ω , sau RAAN, vezi Figura 2. Utilizând integralele prime ale problemei, se poate arăta că toate mărimile necesare pentru a descrie traiectoria sunt constante, cu excepția anomaliilor adevărate. Mai mult, pentru simplitate, putem descrie poziția de-a lungul orbitei folosind *anomalia medie* M , care variază liniar în timp. Prin urmare, în mod uzual, orbita kepleriană a unui corp este exprimată folosind *elementele orbitale kepleriene* $(a, e, I, \omega, \Omega, M)$.

Deoarece elementele orbitale nu sunt variabile canonice, se reamintește formularea hamiltoniană a problemei, împreună cu derivarea variabilelor *Delauney* (sau echivalent a *elementelor Delauney*), care sunt variabile unghiuri-acțiuni asociate mișcării *eliptice kepleriene*. Variabilele Delauney sunt

$$(L, G, H, \ell, g, h), \quad (5)$$

unde (L, G, H) sunt impulsurile canonice, în timp ce unghiurile canonice conjugate sunt

n	m	C_{nm}	S_{nm}
2	0	-1.0826261E-03	0.0000000E+00
2	1	-0.0002670E-06	0.0017873E-06
2	2	1.5746200E-06	-0.9038700E-06
3	0	2.5324100E-06	0.0000000E+00
3	1	2.1931500E-06	0.2680870E-04
3	2	0.3090400E-06	-0.2114310E-04
3	3	0.1005830E-06	0.1972220E-06
4	0	1.6199000E-06	0.0000000E+00
4	1	-0.5086400E-06	-0.4492650E-06
4	2	0.0783740E-06	0.1481350E-06
4	3	0.0592150E-06	-0.0120090E-06
4	4	-0.0039830E-06	0.0065250E-06

Table 2: Coeficienții armonici sferici ai Pământului, până la gradul și ordinul patru.

(ℓ, g, h) . Aceste variabile pot fi exprimate în termenii elementelor orbitale kepleriene prin

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{\mu a}, & G &= L\sqrt{1-e^2}, & H &= G \cos i. \\
\ell &= M, & g &= \omega, & h &= \Omega.
\end{aligned}
\tag{6}$$

Prin urmare, problema celor două corpuri este exprimată folosind variabilele Delauney, reducând Hamiltonianul la forma simplă

$$\mathcal{K} = -\frac{\mu^2}{2L^2}.
\tag{7}$$

Dinamica în jurul unui corp extins

Primul pas necesar pentru a crește fidelitatea modelului dinamic este să renunțăm la aproximarea făcută, conform căreia corpul masiv este asimilat unui punct material, și să descriem cum să modelăm un potențial gravitațional ne-central care apare în urma unei distribuții de masă care nu are simetrie sferică. Prezenta teză ia în considerare două metode: dezvoltarea în serie clasică a potențialului folosind *funcții armonice sferice* și o metodă care presupune că corpul extins poate fi modelat ca un *poliedru* cu densitate constantă.

Pentru început este prezentată dezvoltarea în serie a potențialului folosind funcții armonice sferice în forma sa generală, exprimată în termenii polinoamelor Legendre asociate și care se poate exprima fie în coordonate sferice, fie carteziene:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} P_{nm}(\cos \theta) [C_{nm} \cos m\phi + S_{nm} \sin m\phi].
\tag{8}$$

După introducerea coeficienților armonici sferici nenormalizați, amintim cum aceștia pot

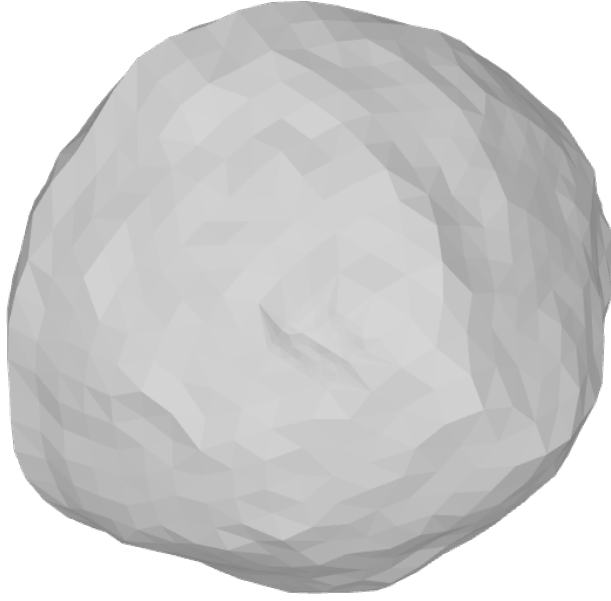


Figure 3: Reprezentarea poliedrică a asteroidului (101955) Bennu.

fi utilizați pentru a descrie distribuția internă a masei unui corp extins dat:

$$\begin{aligned}
 C_{nm} &= \frac{2 - \delta_{0m}}{M_E} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_V \left(\frac{s}{R}\right)^n P_{nm}(\cos \theta') \cos(m\phi') \rho(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s}, \\
 S_{nm} &= \frac{2 - \delta_{0m}}{M_E} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_V \left(\frac{s}{R}\right)^n P_{nm}(\cos \theta') \sin(m\phi') \rho(\mathbf{s}) d^3\mathbf{s},
 \end{aligned} \tag{9}$$

unde M_E este masa corpului extins. Potențialul U poate fi folosit pentru a determina accelerația în coordonate carteziene, prin simpla calculare a gradientului acestuia în raport cu variabilele (x, y, z) . Însă, formula de mai sus nu poate fi folosită pentru determinarea variațiilor elementelor orbitale. O soluție este utilizarea *dezvoltării în serie a lui Kaula*, [28], care oferă o expresie a potențialului corpului extins în termenii elementelor orbitale kepleriene:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{GM_E R^n}{a^{n+1}} \sum_{p=0}^n F_{nmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{npq}(e) S_{nmpq}(\omega, \Omega, M, \nu), \tag{10}$$

unde

$$\begin{aligned}
 S_{nmpq} &= \begin{bmatrix} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{bmatrix}_{l-m \text{ odd}}^{l-m \text{ even}} \cos[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega - \nu)] \\
 &+ \begin{bmatrix} S_{nm} \\ C_{nm} \end{bmatrix}_{l-m \text{ odd}}^{l-m \text{ even}} \sin[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\Omega - \nu)].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Remarcăm că rotația corpului central în jurul axei sale este descrisă de variabila ν , în timp ce $F_{nmp}(i)$ și $G_{npq}(e)$ reprezintă funcțiile de înclinație și respectiv funcțiile de excentricitate.

Studiul potențialului unui poliedru cu densitate constantă ([54]) a fost impulsionat de disponibilitatea unui număr mare de *forme poliedrice* ale obiectelor cerești obținute în urma misiunilor spațiale care explorează sistemul nostru Solar. Un exemplu de reprezentare vizuală a unui model de formă poliedrică este prezentat în figura 3, care redă forma asteroidului (101955) Bennu¹. Ipoteza conform căreia corpul central are densitate constantă ar putea fi percepută ca fiind restrictivă. Cu toate acestea, mulți asteroizi din centura principală de asteroizi au o densitate aproape constantă.

După descrierea instrumentelor geometrice necesare pentru a preciza poziția relativă a corpului extins și a satelitului modelat printr-un punct material sunt obținute următoarele formule:

- **Potențialul gravitațional**

$$U = \frac{1}{2}G\sigma \sum_{e \in \text{edges}} \mathbf{r}_e \cdot \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{r}_e \cdot L_e - \frac{1}{2}G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{r}_f \cdot \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \quad (12)$$

- **Accelerația**

$$\nabla U = -G\sigma \sum_{e \in \text{edges}} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{r}_e \cdot L_e + G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{r}_f \cdot \omega_f \quad (13)$$

- **Matricea gradient**

$$\nabla \nabla U = G\sigma \sum_{e \in \text{edges}} \mathbf{E}_e \cdot L_e - G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \mathbf{F}_f \cdot \omega_f, \quad (14)$$

- **Laplacianul**

$$\nabla^2 U = -G\sigma \sum_{f \in \text{faces}} \omega_f. \quad (15)$$

Matricele \mathbf{E}_e și \mathbf{F}_f , definite în teză, sunt simetrice și corespund unei muchii și, respectiv, unei fețe. Cantitatea ω_f , necesară pentru a calcula laplacianul, are următoarea formă în cazul unui poliedru cu fețe triunghiulare.

$$\omega_f = \iint_{\text{triangle}} \frac{\Delta z}{r^3} dS = 2 \arctan \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_k}{r_i r_j r_k + r_i (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k) + r_j (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_i) + r_k (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)}, \quad (16)$$

unde $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ și \mathbf{r}_k sunt vectorii care unesc *punctul câmpului* cu vârfurile feței triunghiulare, ordonați astfel încât normala feței să fie orientată spre exterior.

Remarcăm formula simplă pentru laplacian. Aceasta este deosebit de convenabilă într-un scenariu în care poliedrul aproximează un corp cu formă foarte neregulată, deoarece laplacianul poate fi folosit pentru a determina dacă punctul câmpului este în interiorul sau în afara poliedrului. Astfel, suma de mai sus este nulă numai când punctul câmpului este

¹(101955) Bennu este un asteroid NEA (*Near Earth Asteroid*) care a fost ținta misiunii OSIRIS-REx (vezi [6]). Această misiune a colectat fragmente de materie de pe suprafața asteroidului și le-a adus pe Pământ.

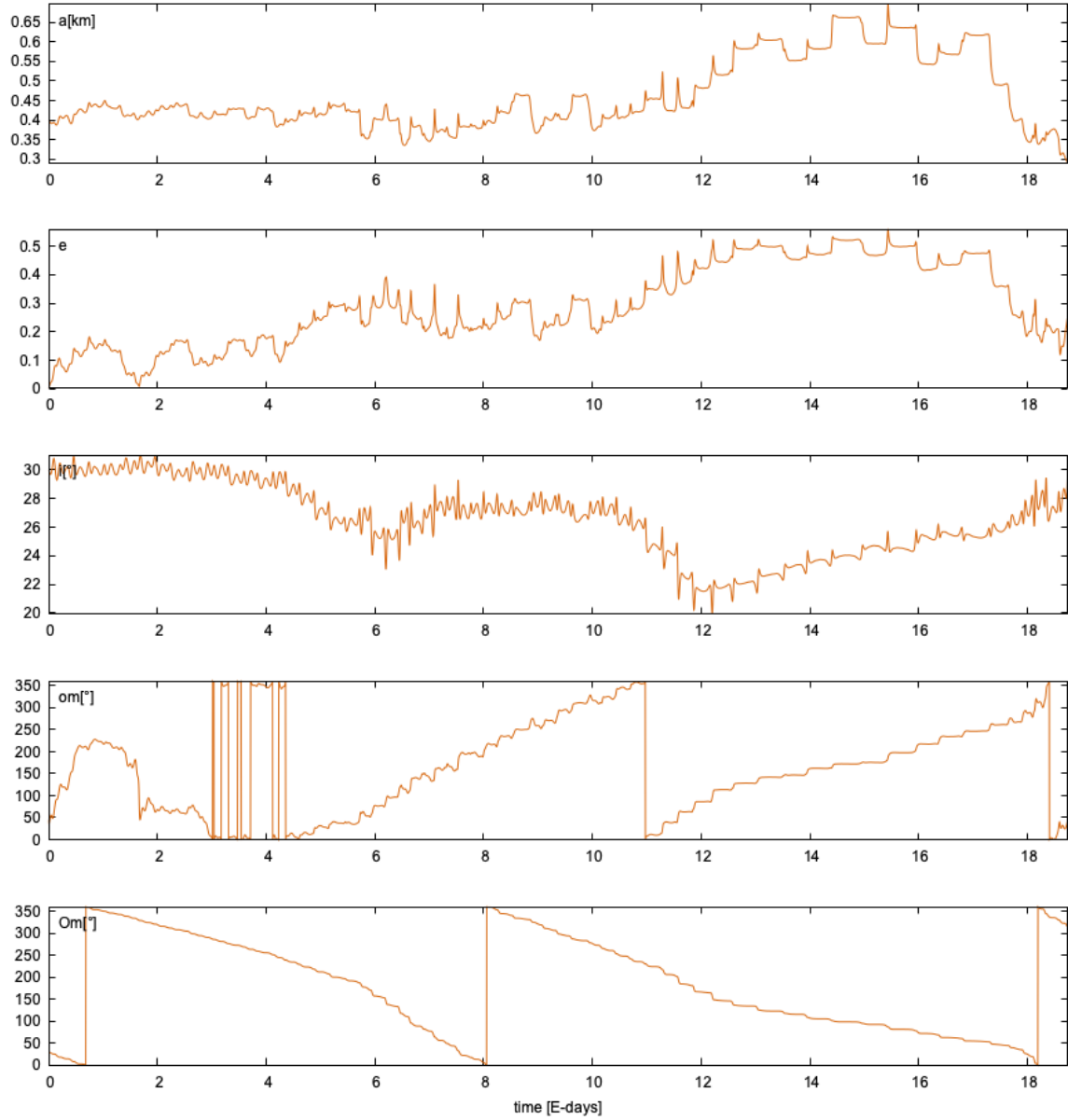


Figure 4: Evoluția elementelor orbitale ale unui satelit care orbitează în jurul asteroidului Benu.

în afara poliedrului. Deoarece cantitățile ω_f sunt necesare pentru a calcula accelerația unui corp care orbitează poliedrul, calculul laplacianului oferă o metodă de detectare rapidă a intrărilor/ieșirilor, fără resurse suplimentare.

Un exemplu este prezentat în figura 4, care arată evoluția elementelor orbitale (cu excepția anomaliei medii) ale unui satelit care orbitează în jurul asteroidului Benu. Orbita corespunde condițiilor inițiale $a_0 = 400\text{m}$, $e_0 = 0,001$, $i_0 = 30^\circ$, $\omega_0 = 45^\circ$, $\Omega_0 = 30^\circ$ și $M_0 = 180^\circ$, timpul total de integrare este de aproximativ 19 zile, până când satelitul se ciocnește de asteroid.

În principiu, această metodă, pe care o vom numi în continuare *dinamica poliedrului*, se poate folosi pentru a modela mișcarea unui corp infinitesimal care orbitează un asteroid dat. Cu toate acestea, testele numerice care utilizează codul `plarrt` arată că această

n	m	C_{nm}	S_{nm}	n	m	C_{nm}	S_{nm}
0	0	1.0000000	0	5	3	-5.970015E-06	2.870480E-06
1	0	2.154569E-05	0	5	4	4.783943E-06	-1.502941E-06
1	1	1.503074E-04	-3.1032743E-06	5	5	5.445080E-07	5.999735E-07
2	0	-2.826462E-02	0	6	0	-3.3880350E-03	0
2	1	1.371946E-06	-1.3425662E-07	6	1	3.5032387E-04	-9.3651971E-06
2	2	2.696969E-03	-5.3982740E-06	6	2	3.4467426E-05	-1.3498088E-05
3	0	8.985971E-03	0	6	3	1.0520645E-05	-7.5062734E-06
3	1	1.028504E-03	1.0152399E-03	6	4	-7.5171068E-07	-9.9541588E-07
3	2	2.175383E-05	2.2954929E-05	6	5	4.2447140E-08	-1.7527133E-07
3	3	2.241432E-04	-7.7688388E-05	6	6	6.2035740E-08	-2.9571149E-09
4	0	1.594519E-02	0	7	0	1.1060811E-03	0
4	1	1.997188E-0	9.1852075E-04	7	1	1.2040838E-04	7.8057602E-05
4	2	-2.505303E-04	8.7344928E-05	7	2	1.3391124E-06	2.5729814E-06
4	3	-3.327548E-05	2.9055773E-06	7	3	1.6182732E-07	-8.1730514E-07
4	4	2.394719E-05	3.4124413E-05	7	4	-1.5426714E-08	1.1347929E-07
5	0	-1.914364E-03	0	7	5	-7.3838247E-08	1.5887688E-09
5	1	2.071309E-04	-4.1788926E-05	7	6	-6.7912956E-09	7.4592830E-09
5	2	3.678853E-05	-8.8653134E-05	7	7	5.7264210E-09	-2.2932176E-09

Table 3: Coeficienții armonici sferici nenormalizați ai asteroidului Bennu, extrași din fișierul Bennu.Radar.obj.

metodă este costisitoare din punct de vedere computațional și nepotrivită pentru calcule pe termen lung, deoarece costurile sale de calcul depind de numărul de vârfuri și fețe ale modelului luat în considerare. Pentru a rezolva această problemă, codul numeric include implementarea FORTRAN a unui subprogram, dezvoltat pe baza teoriei descrise în articolul [53], pentru a calcula coeficienții armonici sferici asociați unui poliedru cu densitate constantă. Metoda exploatează o relație de recurență obținută din proprietățile polinoamelor Legendre asociate. Acest subprogram a fost testat pe un număr mare de modele de formă poliedrică, iar rezultatele au fost colectate într-un proiect numit *Asteroid spherical harmonic coefficients database* (ASHCD) coordonat de autor și care este accesibil gratuit la cerere. Spre exemplu, lista coeficienților armonici sferici ai asteroidului Bennu este prezentată în tabelul 3. Utilizarea coeficienților armonici sferici calculați numeric permite propagarea orbitelor la un cost de calcul mult mai mic comparativ cu dinamica poliedrului. Cu toate acestea, dinamica poliedrului este exactă până la suprafața obiectului, în timp ce dinamica armonicilor sferice poate fi utilizată numai în afara sferei Brillouin, adică în afara celei mai mici sfere care circumscrie obiectul.

Problema celor două corpuri perturbată

Implementarea unui model cartezian pentru potențialul și accelerația gravitațională permite propagarea numerică a orbitelor deșeurilor spațiale aflate în vecinătatea unui corp extins. Cu toate acestea, un astfel de model nu permite realizarea unor predicții privind

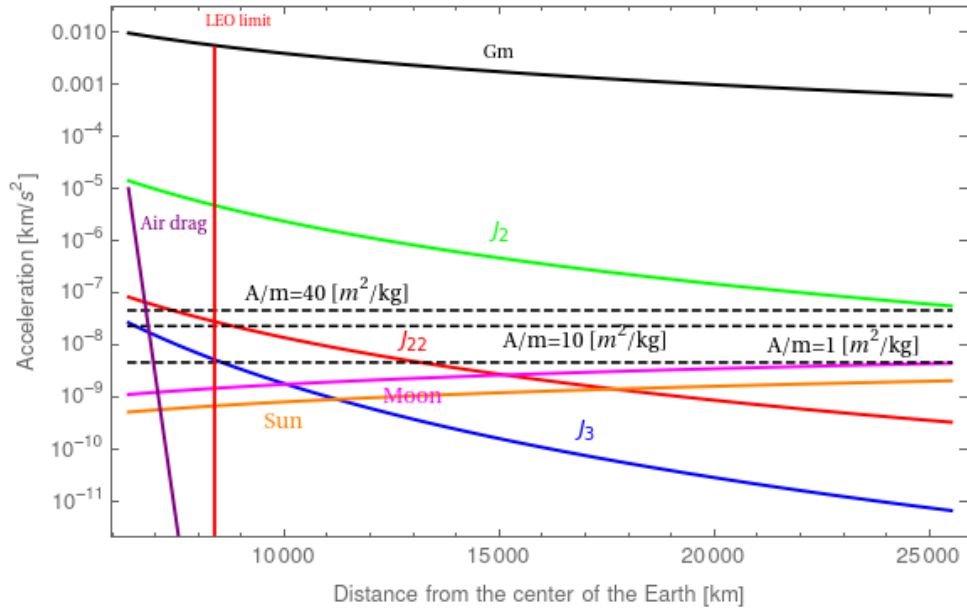


Figure 5: Comparație a magnitudinii perturbațiilor care influențează mișcarea orbitală a unui obiect care orbitează necontrolat în jurul Pământului. Dacă raportul arie-pe-masă este suficient de mare, atunci efectul SRP (liniile orizontale întrerupte) domină perturbațiile lunisolare (liniile portocalii și roz), cel puțin în regiunile LEO superioare și MEO inferioare. Termenul cel mai important al geopotentialului este cel corespunzător lui J_2 .

mișcarea deșeurilor, care este de fapt scopul principal al studiului dinamicii deșeurilor spațiale. Chiar dacă este posibil să se facă predicții simple asupra mișcării unor obiecte din spațiul cosmic folosind rezultatele clasice ale problemei celor două corpuri, totuși dinamica kepleriană nu este suficient de exactă pentru a descrie dinamica complexă a Sistemului Solar și a dinamicii obiectelor aflate în mediul circumterestru. Un rezultat bine-cunoscut al lui Henri Poincaré (1854-1912) afirmă că problema celor N -corpuri nu este integrabilă în sens Liouville pentru $N \geq 3$. Cu toate acestea, pe baza unor ipoteze preliminare, este posibilă modelarea unor probleme care apar în astrodinamică folosind o aproximare rezonabilă ce permite determinarea unor soluții explicite.

Fie

$$U = U_0 + \mathcal{R} \quad (17)$$

potențialul forțelor, unde U_0 este potențialul gravitațional asociat problemei celor două corpuri și \mathcal{R} este o funcție perturbatoare (mărimea forței asociate este mult mai mică comparativ cu mărimea forței gravitaționale din problema celor două corpuri). Deoarece perturbația este mică, ne așteptăm ca elementele orbitale ale elipsei osculatoare să se modifice lent în timp. Pentru a descrie modul în care elementele kepleriene variază sub efectul unor mici perturbații se pot folosi ecuațiile planetare ale lui Lagrange:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}, \\
\frac{de}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \left[(1 - e^2) \frac{\partial R}{\partial M} - \sqrt{1 - e^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right], \\
\frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \left(\cot i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right), \\
\frac{dM}{dt} = n - \frac{(1 - e^2)}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}, \\
\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}.
\end{array} \right. \quad (18)$$

Dacă forțele perturbatoare nu sunt conservative, cum este cazul unui sistem disipativ, se pot utiliza ecuațiile lui Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1 - e^2}} \left(Se \sin f + \frac{pT}{r} \right), \\
\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na} [S \sin f + T(\cos E + \cos f)], \\
\frac{di}{dt} = \frac{Wr \cos u}{na^2 \sqrt{1 - e^2}}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{Wr \sin u}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i}, \\
\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{nae} \left[-S \cos f + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \right] + 2 \frac{d\Omega}{dt} \sin^2 \frac{i}{2}, \\
\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e^2}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \frac{d\varpi}{dt} + 2\sqrt{1 - e^2} \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} - 2 \frac{rS}{na^2}.
\end{array} \right. \quad (19)$$

În ecuațiile de mai sus, S , T și W sunt componentele radială, transversală și normală ale rezultantei forțelor perturbatoare. Prin aceste două tipuri de ecuații se pot descrie efectele induse de perturbațiile cele mai importante în problema mișcării unui satelit artificial al Pământului.

Cele mai importante perturbații care influențează mișcarea orbitală a unui satelit al Pământului sunt prezentate în figura 5. În această figură este reprezentată magnitudinea forțelor în funcție de distanța de la centrul Pământului. Efectele induse de aceste perturbații sunt investigate folosind cele două tipuri de ecuații de mai sus.

Pentru a obține informații relevante referitoare la evoluția pe termen lung a elementelor orbitale, se poate studia dinamica seculară prin medierea funcției perturbatoare în raport

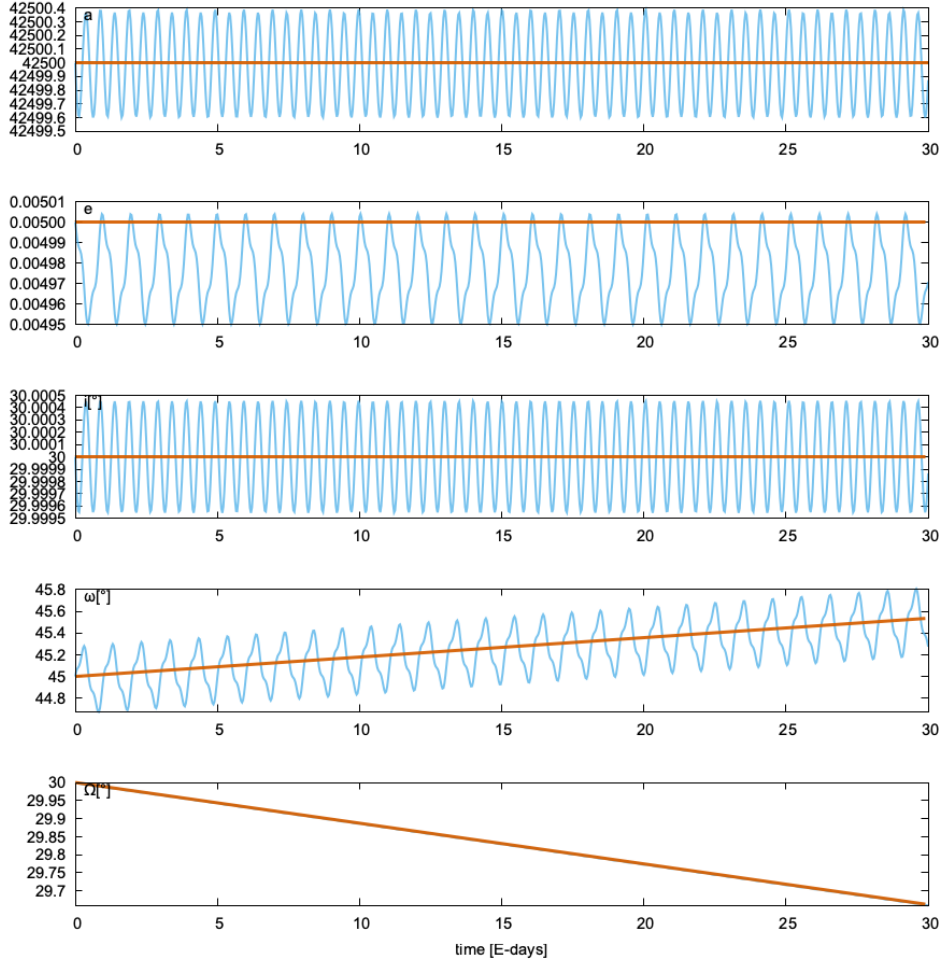


Figure 6: Propagarea orbitei unui satelit care se mișcă în jurul Pământului în regiunea GEO, pe o durată de 30 de zile. Modelul hamiltonian neglijează termenii teserali și sectoriali. *Linia portocalie* corespunde dinamicii hamiltoniene mediate, în timp ce *curba albastră* este obținută prin propagarea ecuațiilor carteziene care iau în considerare toate efectele. Elementele orbitale inițiale sunt $a_0 = 42500$ km, $e_0 = 0.005$, $i_0 = 30^\circ$, $\omega_0 = 30^\circ$ și $\Omega_0 = 30^\circ$.

cu anomalia medie M a satelitului, care este o *variabilă rapidă* în cazul dinamicii kepleriene. Apoi, folosind propagatoare numerice se poate compara evoluția elementelor orbitale medii și oscilatoare, ca în figura 6. De exemplu, efectul secular al aplatizării Pământului este descris de relațiile

$$\begin{aligned} \dot{M} &\simeq \left[6135.7 \left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - 4.98 \left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{(1 - 3 \cos^2 i)}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \text{ }^\circ/\text{day}, \\ \dot{\omega} &\simeq 4.98 \left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{(5 \cos^2 i - 1)}{(1 - e^2)^2} \text{ }^\circ/\text{day}, \\ \dot{\Omega} &\simeq -9.97 \left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2} \text{ }^\circ/\text{day}. \end{aligned}$$

Forma generală a funcției perturbatoare datorată efectelor gravitaționale exercitate de

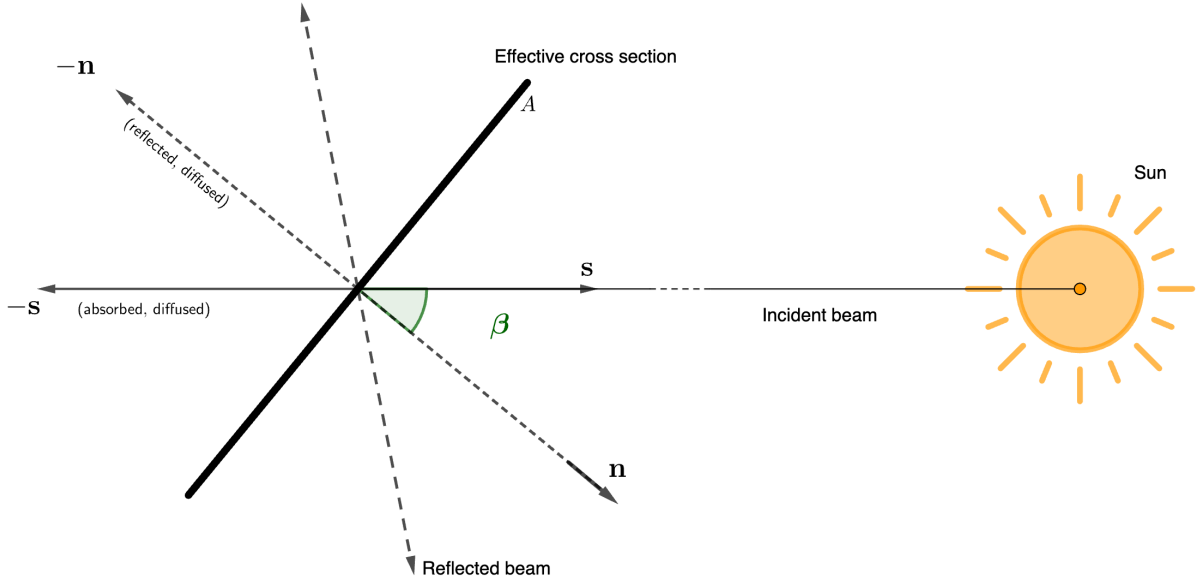


Figure 7: Reprezentarea schematică a presiunii radiației solare în cazul unui reflector plat.

un al treilea corp (Soarele sau Luna) este dată de:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{3b} = & \mu_{3b} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{a^n}{a_{3b}^{n+1}} \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\ & \times \mathcal{F}_{nmph}(i, i_{3b}) \mathcal{H}_{npq}(e) \mathcal{G}_{nhj}(e_{3b}) \cos(\varphi_{lmphqj}), \end{aligned} \quad (20)$$

unde sufixul $3b$ este folosit pentru a eticheta elementele kepleriene ale celui de-al treilea corp. Deoarece variația elementelor orbitale ale Lunii, atunci când acestea sunt raportate la ecuatorul ceresc, este neliniară, urmând [14] sunt exprimate elementele orbitale ale Lunii față de planul eclipticii. Pentru a studia variațiile seculare ale elementelor orbitale ale unui satelit, sunt prezentate și funcțiile perturbatoare dublu-mediate $\overline{\overline{\mathcal{R}}}_{\odot}$ și $\overline{\overline{\mathcal{R}}}_M$ datorate influenței Soarelui și respectiv Lunii, obținute prin medierea în raport cu anomaliile medii ale satelitului și Soarelui, respectiv a Lunii.

De asemenea, sunt analizate consecințele datorate acțiunii a două perturbații negravitacionale, și anume *presiunea radiației solare* și efectul *Yarkovsky*. Acesta din urmă este dat ca exemplu de efect care induce o variație seculară a semi-axei mari. Studiul presiunii radiației solare este punctul central al ultimei părți a tezei.

Pentru a simplifica studiul dinamicii induse de presiunea radiației solare, adoptăm următoarele ipoteze:

- deșeurile spațiale se comportă ca și *corpul negru*, adică lumina solară absorbită nu este reemisă;
- deșeurile spațiale sunt *oglinzi perfecte*, adică fotonii care cad pe suprafețe netede se supun legilor reflexiei;
- intensitatea luminii difuzate este proporțională cu cosinusul unghiului β dintre normala la dS și direcția luminii solare;

- suprafața elementară dS se comportă ca o combinație liniară a trei modele fizice, adică aceasta este o combinație între un corp negru, o oglindă perfectă și un difuzor.²

Dacă deșeurile au o formă simplă, atunci forța indusă de presiunea radiației solare poate fi exprimată prin

$$\mathbf{F}_{SRP} = -\frac{\Phi_{\odot}A}{c}\mathbf{s}, \quad (21)$$

unde A este *secțiunea transversală efectivă*, a cărei expresie este simplă pentru forme de bază, cum ar fi un panou plat sau o sferă (vezi [49]), Φ_{\odot} este fluxul solar, c reprezintă viteza luminii, iar \mathbf{s} este vectorul unitar orientat spre Soare.

Pentru a obține un model unitar care redă cu o bună acuratețe influența presiunii radiației solare, se presupune că satelitul/deșeurile spațiale este o sferă, ceea ce, împreună cu considerațiile anterioare, echivalează cu presupunerea că lumina solară cade întotdeauna perpendicular pe suprafața obiectului, adică forța este tot timpul paralelă cu direcția razelor solare \mathbf{s} . Acest model este foarte util întrucât oferă o descriere a posibilelor orbite spațiale, dar poate fi utilă și pentru a caracteriza *cu precizie* dinamica unei *vele solare*, a cărei orientare se poate schimba continuu, astfel încât lumina soarelui să cadă întotdeauna perpendicular pe aceasta. Expresia carteziană a forței datorate presiunii radiației solare, care acționează asupra unui corp din vecinătatea Pământului este dată de

$$\mathbf{F}_{SRP} = C_r P_r a_{\odot}^2 \frac{A}{m} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3}, \quad (22)$$

unde C_r , P_r și a_{\odot} sunt constante, iar A/m reprezintă parametrul arie-pe-masă.

În plus, dacă se adoptă modelul descris mai sus, forța datorată presiunii radiației solare este conservatoare. Astfel, se poate obține următoarea expresie pentru funcția perturbatoare corespunzătoare presiunii radiației solare, dezvoltare în serie care este asemănătoare cu expresia funcției perturbatoare corespunzătoare unui al treilea corp:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SRP} = & -C_r P_r \frac{A}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{a^n}{a_{\odot}^{n-1}} \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\ & \times \mathcal{F}_{nmp}(i, i_{\odot}) \mathcal{H}_{npq}(e) \mathcal{G}_{nhj}(e_{\odot}) \cos(\varphi_{lmphqj}). \end{aligned} \quad (23)$$

Mișcări rezonante

Testele numerice referitoare la problema mișcării unui satelit sugerează că influența unei anumite perturbații poate fi *intensificată* dacă satelitul se află în anumite regiuni în spațiul fazelor asociat problemei. Pentru a justifica această afirmație observăm mai întâi că principalele perturbații au fost exprimate în serii Fourier (infinite). Forma generală a fiecărui termen este dată de

$$\mathcal{R}_{\sigma} \propto a^{-\ell} F(i) G(e) \cos(\sigma), \quad (24)$$

unde funcțiile F și G se exprimă cu ajutorul funcțiilor de înclinare Kaula și funcțiilor de excentricitate determinate din coeficienții Hansen. Unghiul σ este o combinație liniară

²Parametrii care codifică *absorbția*, *reflexia* și *difuzia* radiației solare descriu complet proprietățile optice ale corpului fizic.

cu coeficienți întregi a unghiurilor ce descriu orbita satelitului și, eventual, a orbitei unui corp perturbator. În cazul unui corp care se rotește uniform în jurul axei sale, cum ar fi Pământul, σ poate depinde liniar și de variabila unghiulară care descrie rotația corpului. În general, argumentul funcției trigonometrice cosinus, care apare în \mathcal{R}_σ , are forma:

$$\sigma = j_1\omega + j_2(\Omega - \theta) + j_3M + j_4\omega_{3b} + j_5\Omega_{3b} + j_6M_{3b}, \quad (25)$$

unde am folosit sufixul $3b$ pentru a eticheta elementele orbitale ale corpului perturbator (Soarele sau Luna) și simbolul θ pentru a descrie rotația Pământului în jurul axei sale.

Variația pe termen lung a orbitei satelitului depinde de condițiile sale inițiale. Într-adevăr, o alegere diferită a condițiilor inițiale conduce la o altă evoluție a elementelor orbitale. Dacă unghiul σ este un *unghi rapid*, a cărui rată de variație este mare și comparabilă cu mișcarea medie, efectul rezultat va fi de scurtă durată și nu va modifica semnificativ mișcarea pe termen lung a satelitului. *Mișcarea rezonantă* apare atunci când unghiul σ este aproape constant în timp, adică atunci când $\dot{\sigma} = 0$. Ca o consecință, efectele datorate termenului \mathcal{R}_σ *se acumulează în timp*, producând modificări cu perioadă lungă, sau (uneori) liniare, ale elementelor orbitale.

Rezonanțele sunt adesea asociate cu un spațiu al fazelor echivalent topologic cu cel al unui *pendul simplu*

$$\mathcal{H}_1(J, \psi) = \frac{1}{2}J^2 - \cos(m\psi). \quad (26)$$

Cu toate acestea, în ultimele decenii, au fost dezvoltate și alte *modele fundamentale* de rezonanță, cum ar fi *al doilea model fundamental de rezonanță*, introdus de Henrard și Lemaitre, [22], și exprimat prin următoarea funcție a lui Hamilton, depinzând de parametrul δ :

$$\tilde{\mathcal{H}} = R^2 - 3(\delta + 1)R - 2\sqrt{2R} \cos r, \quad (27)$$

precum și *modelul fundamental de rezonanță extins* definit de Breiter ([8]) prin hamiltonianul

$$\mathcal{M}_1 = J^3 + \frac{1}{2}uJ^2 + vJ + \sqrt{2J} \cos \psi, \quad (28)$$

care depinde de doi parametri (u, v) . Figura 8 ilustrează spațiul fazelor în termenii variabilelor Poincaré

$$x = \sqrt{2R} \sin \psi, \quad X = \sqrt{2J} \cos \psi, \quad (29)$$

pentru modelul fundamental de rezonanță extins.

O metodă pentru calculul diametrului regiunii rezonante în cazul unei rezonanțe tesorale $p : q$, unde p și q sunt numere naturale nenule, este prezentată în articolul [9]. Același articol arată cum poate fi utilizat indicatorul FLI pentru a cartografia spațiul fazelor în cazul unei rezonanțe (a se vedea figura 9).

Referitor la rezonanțele datorate perturbațiilor lunisolare, sunt trecute în revistă rezultate obținute de diverși autori care descriu efectele acestora folosind diferite metode. Aceste perturbații, deși relevante în numeroase cazuri, vor fi neglijate în studiul rezonanțelor care apar ca o consecință a cuplării efectului datorat aplatizării Pământului și a presiunii radiației solare pentru obiecte cu valori mari ale parametrului arie-pe-masă, deoarece în acest scenariu presiunea radiației solare domină perturbațiile induse de Soare și Lună.

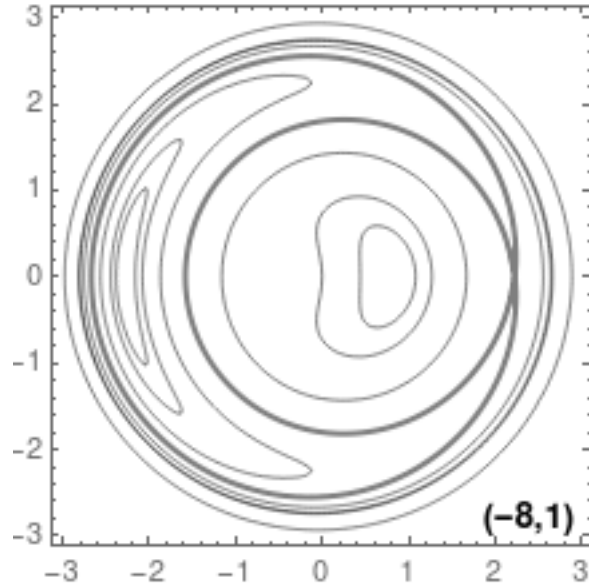


Figure 8: Spațiul fazelor pentru Hamiltonianul \mathcal{M}_1^* în cazul $(u, v) = (-8, 1)$. Axa orizontală reprezintă momentul canonic, în timp ce cea verticală reprezintă coordonata canonică. Curbele separatoare asociate punctului de echilibru de tip \mathcal{S} și sunt reprezentate îngroșat.

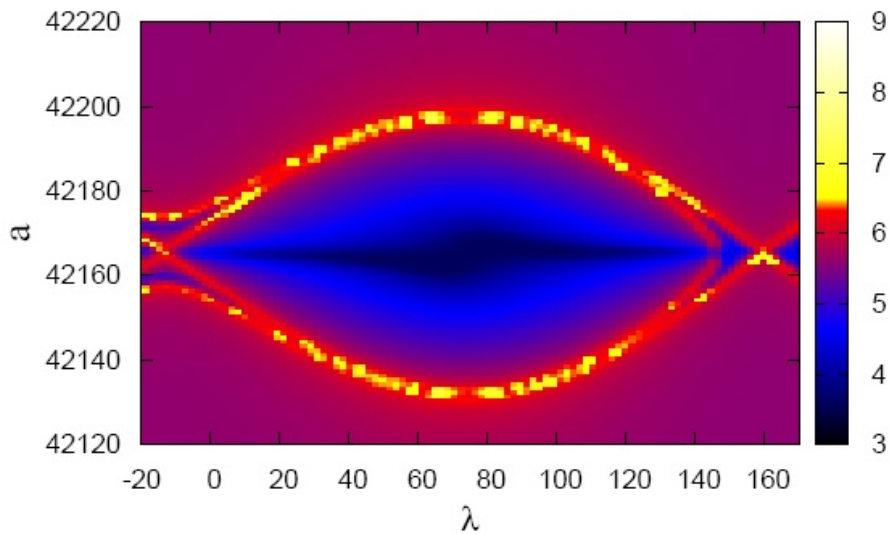


Figure 9: Indicatorul FLI, calculat prin utilizarea ecuațiilor carteziene, pentru 100x100 orbite, în cazul rezonanței 1:1 aflată în regiunea GEO. Condițiile inițiale sunt $e = 0,005$, $i = 30^\circ$, $\omega = 0^\circ$, $\Omega = 0^\circ$. Această figură este o reproducere a figurii 5 din articolul [9].

Rezonanțe semi–seculare datorate presiunii radiației solare

Ultima parte a tezei este dedicată culegerii principalelor rezultate referitoare la studiul influenței presiunii radiației solare. Rezultatele sunt publicate de autor în articolul [39].

Este prezentată o analiză detaliată a rezonanțelor semi-seculare care acționează pe scări de timp de ordinul deceniilor, sau chiar secolelor.

Problema cuplării efectelor induse de termenul armonic J_2 și presiunea radiației solare a fost recent studiată în multe lucrări. Astfel, lucrarea [16] realizează un studiu parametric pentru diferite valori ale semiaxei mari și ale raportului arie-pe-masă, pentru a obține poziția punctelor de echilibru care apar ca o consecință a cuplării. Articolul [1] descrie spațiul fazelor asociat problemei. Lucrarea [44] folosește tehnici de analiză a frecvențelor pentru a studia orbitele joase din vecinătatea Pământului, perturbate de presiunea radiației solare. Articolul [48] realizează o analiză detaliată a dinamicii în regiunea GEO pentru obiecte care au raportul arie-pe-masă foarte mare. Cercetarea realizată de autor își propune să completeze rezultatele lucrărilor anterioare prin furnizarea de formule analitice pentru a determina locația, diametrul și perioada rezonanțelor rezultate din cuplarea efectelor induse de termenul armonic J_2 și presiunea radiației solare. Pentru a da o nouă perspectivă asupra problemei, se utilizează diverse modele fundamentale ale rezonanțelor, inclusiv modelul de rezonanță extins pentru a descrie calitativ și cantitativ efectele rezonanțelor.

Hamiltonianul problemei are forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{J_2} + \mathcal{H}_{SRP}, \quad (30)$$

unde \mathcal{H}_{J_2} codifică efectul (secular) al lui termenului armonic J_2 și este dat de

$$\mathcal{H}_{J_2} = \frac{1}{4} \frac{J_2 R_E^2 \mu^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}} G^3} \left(1 - \frac{3H^2}{G^2} \right). \quad (31)$$

Componenta \mathcal{H}_{SRP} include suma celor mai importanți șase termeni din dezvoltarea în serie a funcției perturbatoare asociată presiunii radiației solare:

$$\mathcal{H}_{SRP} = \sum_{j,k} \mathcal{H}_{SRP}^{j,k} = \sum_{j,k} C_{j,k} \cos \sigma_{j,k}, \quad (32)$$

Unghiul $\sigma_{j,k}$ are forma $\sigma_{j,k} = \omega + j\Omega + kM_\odot + k\omega_\odot$, iar coeficienții $C_{j,k}$ sunt dați de relația:

$$C_{j,k} = -\frac{3}{2} C_r P_r \frac{A}{m} \frac{L^2}{\mu} e \mathcal{F}_{j,k}(i, i_\odot), \quad (33)$$

Spunem că se produce o rezonanță atunci când următoarea ecuație este satisfăcută:

$$\dot{\omega} + j\dot{\Omega} + kn_\odot = 0. \quad (34)$$

În relația de mai sus, $n_\odot = \dot{M}_\odot$ reprezintă viteza unghiulară medie a Soarelui, iar numerele întregi j și k iau valori în mulțimea $j \in \{-1, 0, 1\}$, $k \in \{-1, 1\}$. Rezonanțele care implică anomalia medie a Soarelui sau a Lunii, sunt denumite *rezonanțe semi-seculare* în lucrarea [15]. Pe de altă parte, rezonanțe care implică argumentul perigeului ω sunt cunoscute sub numele de *rezonanțe apsidale* (a se vedea articolul [7]). Când ecuația (34) este satisfăcută, termenul perturbativ asociat, numit termen rezonant, are o influență mărită din punct de vedere dinamic, iar pentru a-i caracteriza efectele, problema poate

fi redusă local la un model fundamental de rezonanță, precum este pendulul simplu, al doilea model introdus de Henrard și Lemaitre [22], sau modelul descris de Breiter [8].

Pentru a determina o locație aproximativă a acestor rezonanțe în spațiul fazelor, se pot folosi expresiile pentru $\dot{\omega}$ și $\dot{\Omega}$, obținute prin reținerea influenței exercitate de termenul armonic J_2 și neglijând în același timp alte influențe. În lucrarea [7], această abordare este folosită pentru a calcula pozițiile aproximative ale rezonanțelor absidale lunisolare. Prin neglijarea termenilor rezonanți în problema determinării locației rezonanțelor se presupune de fapt că punctele de echilibru cu stabilitate diferită se obțin pentru aceeași valoare a excentricității, ceea ce simplifică analiza problemei bifurcațiilor.

Pentru a obține formule analitice care caracterizează rezonanțele, hamiltonianul general poate fi redus local la modele simple, de tipul celor fundamentale descrise mai sus. Mai precis, putem considera următoarele modele simplificate descrise de:

$$\mathcal{H}_{j,k}(G, H, \omega, \Omega; L) = \mathcal{H}_{J_2} + \mathcal{H}_{SRP}^{j,k}. \quad (35)$$

Fiecare model, definit prin intermediul relației (35), se obține prin medierea tuturor termenilor din dezvoltarea în serie a funcției perturbatoare asociate presiunii radiației solare, cu excepția unuia, corespunzător rezonanței. Sunt determinate punctele de echilibru și este analizat modul în care se modifică dinamica odată cu modificarea parametrilor orbitali, în particular cu variația înclinării și semi-axe mari.

Pentru a atinge acest obiectiv, transformăm hamiltonianul $\mathcal{H}_{j,k}$ într-un hamiltonian *autonom* prin introducerea acțiunii Λ_{\odot} conjugată anomaliei medii M_{\odot} a Soarelui. Exprimăm hamiltonianul în funcție de semi-axa mare a în locul impulsului L , deoarece ambele cantități sunt constante ale mișcării. Hamiltonianul modificat, notat prin $\tilde{\mathcal{H}}_{j,k}$, are trei grade de libertate și poate fi scris astfel:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{j,k} = n_{\odot}\Lambda_{\odot} + n a^2(\mathcal{Z}(G, H) + \mathcal{P}_{j,k}(\omega, \Omega, M_{\odot}, G, H)). \quad (36)$$

Termenul $\mathcal{Z}(G, H)$ cuantifică efectele seculare datorate termenului armonic J_2 și altor perturbații seculare, în timp ce $\mathcal{P}_{j,k}(\omega, \Omega, M_{\odot}, G, H)$ reprezintă termenul rezonant specific, asociat presiunii radiației solare.

Numărul gradelor de libertate poate fi redus utilizând o *transformare canonică* adecvată. Pentru orice pereche de indici (j, k) putem efectua următoarea transformare canonică $\kappa_a^{j,k}$, depinzând de constanta a , unde noile variabile sunt adimensionale:

$$\kappa_a^{j,k} : (\omega, \Omega, M_{\odot}, G, H, \Lambda_{\odot}; \mathcal{H}_{j,k}) \longrightarrow (\sigma_{j,k}, \psi_{j,k}, \chi_{j,k}, \Phi_{j,k}, \Psi_{j,k}, X_{j,k}; \mathcal{H}_{j,k}^*), \quad (37)$$

unde

$$\sigma_{j,k} = \omega + j\Omega + kM_{\odot} + k\omega_{\odot}, \quad (38)$$

$$\Phi_{j,k} = \frac{G}{\sqrt{\mu a}} = \eta, \quad (39)$$

$$\psi_{j,k} = \Omega, \quad (40)$$

$$\Psi_{j,k} = \frac{H - jG}{\sqrt{\mu a}} = \eta(c - j), \quad (41)$$

$$\chi_{j,k} = M_{\odot}, \quad (42)$$

$$X_{j,k} = \frac{\Lambda_{\odot} - kG}{\sqrt{\mu a}}. \quad (43)$$

Hamiltonianul exprimat în noile variabile canonice (după eliminarea termenilor constanți) este dat de

$$\mathcal{K}_{j,k} = k n_{\odot} \eta + \mathcal{Z} + C_{j,k} \cos \sigma_{j,k}. \quad (44)$$

După o analiză a formei funcției hamiltoniene $\mathcal{K}_{j,k}$, pentru diferite valori ale indicilor j și k , începem prin a investiga punctele de echilibru ale problemei reduse. Ecuațiile canonice ale mișcării sunt date de:

$$\dot{\sigma}_{j,k} = \frac{\partial \mathcal{K}_{j,k}}{\partial \eta} = k n_{\odot} + \mathcal{Z}' + C'_{j,k} \cos \sigma_{j,k}, \quad (45)$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial \mathcal{K}_{j,k}}{\partial \sigma_{j,k}} = -C_{j,k} \sin \sigma_{j,k}, \quad (46)$$

unde simbolul " ' " indică derivate parțiale în raport cu η .

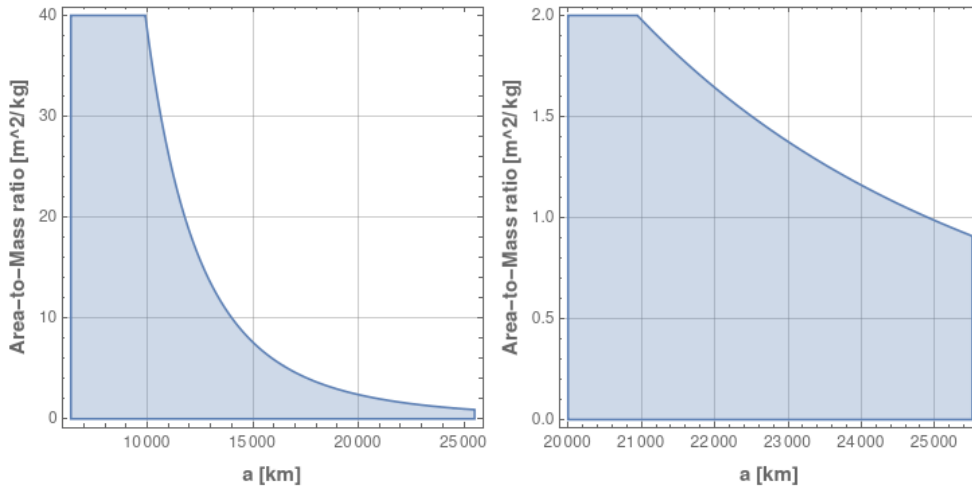


Figure 10: Regiunea evidențiată a planului $(a, \frac{A}{m})$ corespunde valorilor pentru care $\epsilon < 0.1$ (vezi ecuația (48)) și care ne permite să aproximăm ecuația (47) prin (49); Figura din stânga corespunde intervalului $a \in [R_E, 4R_E]$; Figura din dreapta mărește colțul din dreapta jos al figurii din stânga. În regiunea LEO, această aproximare este valabilă până la valori foarte mari ale raportului arie-pe-masă, în timp ce în regiunea MEO inferioară, valorile raportului arie-pe-masă nu pot depăși o valoare prag (până la $\simeq 1 \text{ m}^2/\text{kg}$ pentru $a = 25000 \text{ km}$).

Valoarea variabilei η pentru punctele critice poate fi obținută din condiția de rezonanță $\dot{\sigma}_{j,k} = 0$, adică,

$$\frac{\partial \mathcal{K}_{j,k}}{\partial \eta} = k n_{\odot} + \mathcal{Z}' + \gamma C'_{j,k} = 0. \quad (47)$$

Ecuția de mai sus poate fi adusă la o formă mai simplă atunci când orbita satelitului este suficient de joasă. Valabilitatea acestei aproximări se exprimă în termenii unui parametru dat prin

$$\epsilon := \frac{C_r P_r a}{J_2 R_E^2 n^2} \frac{A}{m}. \quad (48)$$

Dacă acest parametru este mic, spre exemplu $\epsilon < 0.1$, atunci magnitudinea termenului \mathcal{Z}' este mult mai mare comparativ cu magnitudinea termenului $C'_{j,k}$, iar cel din urmă îl putem neglija. Această aproximare este valabilă în regiunea gri descrisă în figura 10. Trebuie remarcat faptul că, în această aproximare, putem considera valori mari ale raportului arie-pe-masă în regiunea LEO și valori moderate (comparabile cu $0,5 \text{ m}^2/\text{kg}$) până în regiunea GPS, aflată la mai puțin de 2000 km distanță de $a = 25000 \text{ km}$.

Neglijând contribuția presiunii radiației solare în ecuația (47), se obține

$$k n_{\odot} + \mathcal{Z}' = 0. \quad (49)$$

În teză, se determină locația rezonanțelor pentru cele șase modele simplificate, iar rezultatele sunt vizualizate folosind figuri precum figura 11.

Utilizând aproximația de mai jos a hamiltonianului, similară pendulului matematic

$$\bar{\mathcal{K}}(\eta, \sigma) = \frac{\mathcal{Z}''(\hat{\eta})}{2} (\eta - \hat{\eta})^2 + C_{j,k} \left(\hat{\eta}; \frac{A}{m} \right) \cos \sigma, \quad (50)$$

se pot dezvolta formule pentru a determina diametrul regiunii rezonante (de librație):

$$\Delta_{j,k} = 2 \left[\sqrt{\frac{|C_{j,k}|}{|\mathcal{Z}''|}} \right]_{\eta=\hat{\eta}}. \quad (51)$$

Substituind expresiile pentru \mathcal{Z} și $C_{j,k}$, se obțin formule analitice care dau o estimare a diametrului regiunii rezonante în termenii elementelor orbitale și a parametrului *arie-pe-masă*. Mai mult, putem calcula *frecvența fundamentală la echilibru* dată prin:

$$\nu = \frac{\mathcal{Z}''(\hat{\eta})}{4\pi} C_{j,k} \left(\hat{\eta}; \frac{A}{m} \right), \quad (52)$$

care poate fi utilizată pentru a calcula perioada fundamentală corespunzătoare punctului de echilibru stabil:

$$T = \nu^{-1}. \quad (53)$$

Aceste marimi, diametrul și perioada, ne permit să clasificăm rezonanțele semiseculare induse de presiunea radiației solare. Un exemplu de clasificare a rezonanțelor este dat de Tabelul 4, preluat din [39].

j	k	ℓ	$\frac{A}{m} = 10 \text{ m}^2/\text{kg}$		$\frac{A}{m} = 1 \text{ m}^2/\text{kg}$		a	e	i (deg)	a^*	Sing. (y/n)	Period (yrs) $\frac{A}{m} = 1 \text{ m}^2/\text{kg}$
			Δ_{\max}	δq (km)	Δ_{\max}	δq (km)						
0	-1	1	0.04869	1044.11	0.01540	327.5	2.53	0.605	38.6	3.60	n	14.0405
0	-1	-1	0.04869	1044.11	0.01540	327.5	2.53	0.605	141.4	3.60	n	14.0405
0	1	± 1	0.06801	1688.07	0.02151	500.29	1.80	0.445	90.0	1.80	y	19.7702
1	-1	1	0.04940	1058.51	0.01562	332.11	2.59	0.614	128.3	4.51	n	9.8886
1	-1	-1	0.17779	4572.57	0.05622	1210.41	2.50	0.600	0.0	2.50	y	7.1061
1	1	± 1	0.02533	567.29	0.00801	178.47	1.96	0.489	78.5	1.96	y	54.8171
-1	-1	1	0.01025	217.76	0.00324	68.84	2.59	0.614	51.7	4.51	n	47.6678
-1	-1	-1	0.03688	788.31	0.01166	248.09	2.50	0.600	180.0	2.50	y	34.2551
-1	1	± 1	0.12210	3470.23	0.03861	871.54	1.96	0.489	101.5	1.96	y	11.3717

Table 4: Diametrul maxim $\Delta_{j,k}$ al regiunii rezonante, împreună cu poziția centrului rezonanței pentru diverse alegeri ale elementelor orbitale. De notat faptul că a și a^* sunt exprimate în raze terestre. Ultima coloană redă perioada fundamentală corespunzătoare punctului de echilibru stabil pentru un obiect cu raportul arie-pe-masă egal cu $1 \text{ m}^2/\text{kg}$, exprimată în ani. Pentru mai multe detalii se poate consulta articolul [39].

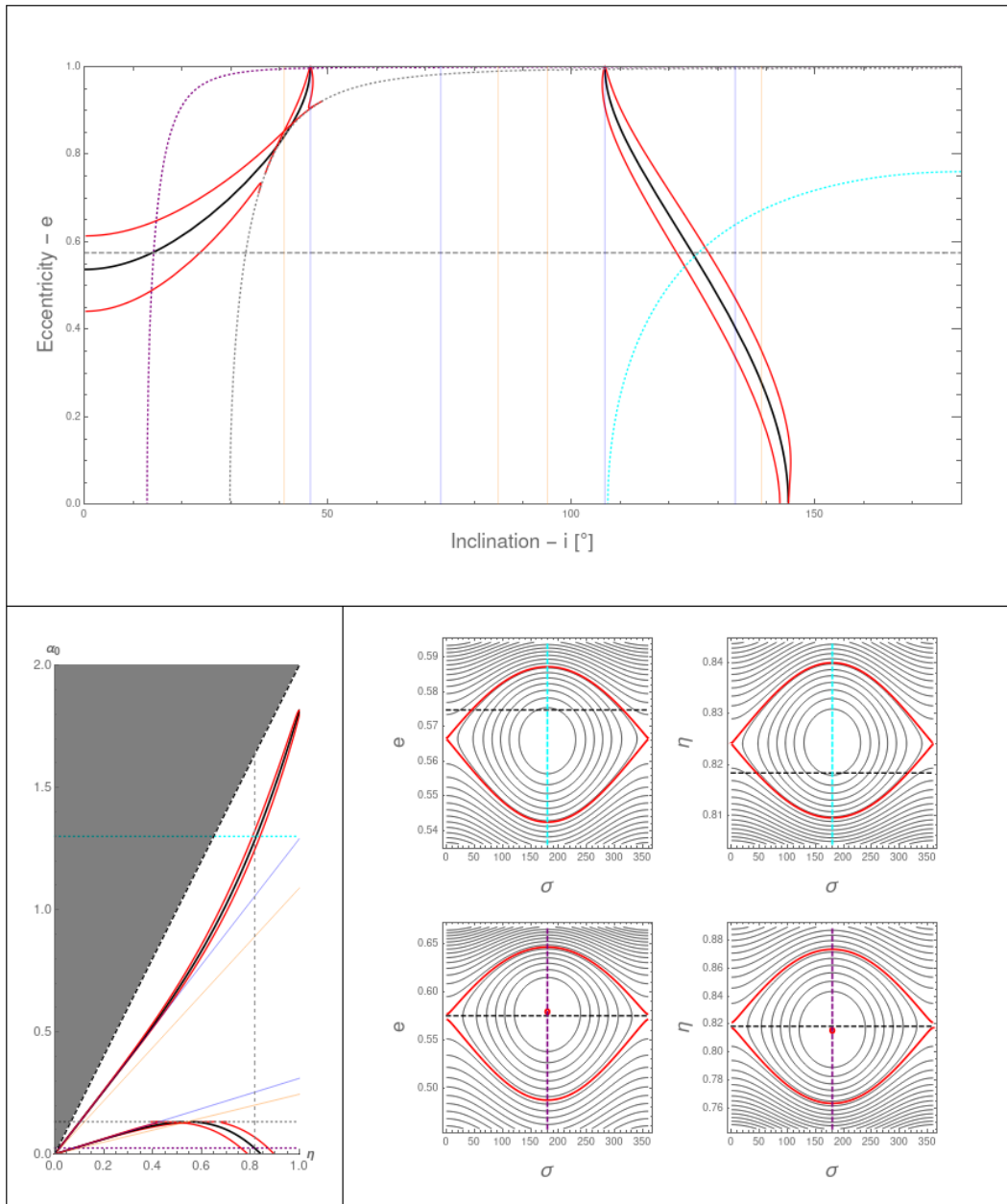


Figure 11: Rezonanța (1, -1): Locația punctelor de echilibru și diametrul zonei de rezonanță delimitată de curbele separatoare pentru un obiect cu $A/m = 1 \text{ m}^2/\text{kg}$ și aflat pe o orbită cu semi-axa mare medie $a = 15000 \text{ km}$. Curbele rezonante sunt reprezentate în planul (i, e) (*panoul de sus*) și în planul (η, α) (*panoul din stânga jos*). Liniile drepte gri întrerupte marchează excentricitatea critică care duce la reîntoarea obiectului în atmosfera terestră. Curba gri punctată reprezintă soluțiile ecuației $\mathcal{Z}'' = 0$ și corespunde unui maxim al curbei rezonante în planul (η, α) . Curba corespunzătoare în planul (i, e) este tangentă la curbele rezonante. Curbele violet și cyan corespund valorilor $\alpha = 0,025$ și, respectiv, $\alpha = 1,3$. Spațiile fazelor pentru aceste două valori selectate ale lui α sunt prezentate în panoul din dreapta jos în termenii unghiului de rezonanță σ și a excentricității e (*coloana din stânga*) și respectiv a unghiului canonic și a variabilei η (*coloana din dreapta*). Curbele roșii care înconjoară curbele rezonante delimitează zona de librație. Aceste curbe corespund intersecției celor două ramuri ale curbei separatoare cu o dreaptă pentru care $\sigma = 0^\circ$ sau $\sigma = 180^\circ$, în funcție de rezonanța luată în considerare.

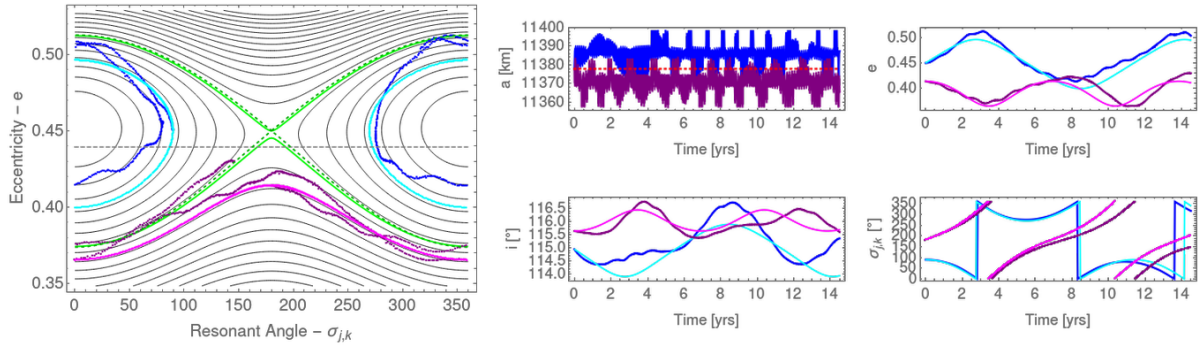


Figure 12: Rezonanța $(-1, 1)$. Spațiul fazelor obținut pentru $A/m = 1 \text{ m}^2/\text{kg}$, $a = 11377.8 \text{ km}$ și $\alpha_{-1} = 0.516343$, care corespund valorii $i = 114.949^\circ$ pentru punctul de echilibru $e_c = 0.45$. Condițiile inițiale sunt astfel încât $\sigma_{-1,1}(t_0) = 90^\circ$, $e(t_0) = e_c$ (curbele cyan și albastre) și $\sigma_{-1,1}(t_0) = 180^\circ$, $e(t_0) = 0.414003$ (curbele magenta și violet).

Pentru a valida modelele simplificate, comparăm rezultatele cu cele obținute prin utilizarea ecuațiilor carteziene ale mișcării, care iau în considerare toate efectele perturbatoare. Acest lucru ne permite să evaluăm acuratețea și eficacitatea modelelor simplificate în studiul dinamicii sistemului. Rezultatele sunt prezentate folosind diagrame precum cele prezentate în Figura 12. Propagarile numerice confirmă faptul că modelele simplificate oferă o bună aproximare a dinamicii carteziene pentru rezonanțe caracterizate de excentricități mici sau moderate.

Indicatorul FLI este folosit intensiv pentru a descrie numeric spațiul fazelor asociat rezonanțelor semi-seculare. Mai mult, acesta poate fi utilizat pentru a investiga modul în care rezonanțele din apropiere, asociate aceluiași model simplificat ar putea fuziona ca o consecință a variației raportului arie-pe-masă. Dacă raportul arie-pe-masă este suficient de mare, spațiul fazelor nu mai este asemănător pendulului ci își schimbă structura fundamentală, așa cum se poate aprecia din diagramele de pe sus al figurii 13.

Dacă centrul rezonanței este aproape de regiunea $e = 0$, reprezentarea FLI în variabilele canonice Poincaré arată un spațiu al fazelor care amintește de cel de-al doilea model fundamental al rezonanțelor și de modelul extins al rezonanțelor, prezentate anterior. Un exemplu în acest sens este prezentat în Figura 14, care se referă la rezonanța $(1, -1)$ pentru diferite valori ale parametrului arie-pe-masă.

În sfârșit, remarcăm că, în funcție de semi-axa mare a satelitului, rezonanțele seculare se pot suprapune pentru $i = 90^\circ$. O modalitate de a detecta numeric dinamica haotică care apare ca o consecință a suprapunerii rezonanțelor asociate termenilor rezonanți diferiți este de a folosi indicatorul FLI. Rezultatele acestor simulări sunt prezentate în figura 15, unde se poate aprecia dinamica haotică complicată datorată suprapunerii rezonanțelor.

Lista publicațiilor

5 Paoli, R., *Analytical and Numerical Estimates for Solar Radiation Pressure Semi-secular Resonances*, Advances in Space Research, (2023) - Journal Publication
DOI: 10.1016/j.asr.2023.01.037

4 Laino, M. A., Wilson, A. R., Vasile, M., Paoli, R., Galeș, C., *A Transport Network*

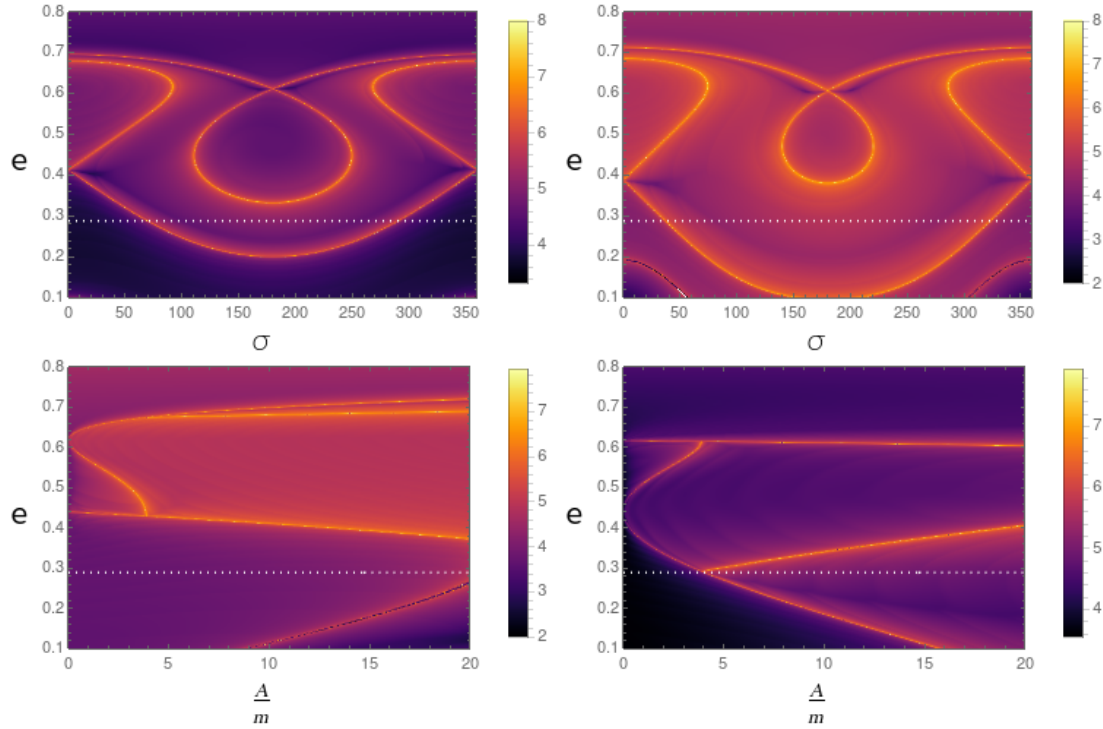


Figure 13: Această figură ilustrează fenomenul de îmbinare a rezonanțelor prin variația parametrului arie-pe-masă. Cazul testat este rezonanța $(0, 1)$, pentru $a = 1.405 R_E$, $\Omega = 0^\circ$ și $\alpha_0 = 0.305$, care corespunde valorii înclinației $i = 72.24^\circ$ atunci când $e = 0$. Timpul de propagare este 75 de ani, pasul de integrare 10 zile. Primele două diagrame arată portretele spațiului fazelor în planul $(\sigma_{0,1}, e)$, pentru $A/m = 9$ și $16 \text{ m}^2/\text{kg}$, în timp ce, diagramele de pe al doilea rând, prezintă fenomenul bifurcațiilor, adică cum se comportă punctele de echilibru și curbele separatoare la variația raportului arie-pe-masă, până la $20 \text{ m}^2/\text{kg}$. Aceste două grafice arată cum variază secțiunile obținute prin intersecția portretului spațiului fazelor cu liniile $\sigma_{0,1} = 0^\circ$ (*stânga*), sau $\sigma_{0,1} = 180^\circ$ (*dreapta*) în raport cu valorile parametrului A/m . Linia punctată albă corespunde valorii critice a excentricității, care în acest caz este egală cu $e_{crit} \simeq 0.288$.

for In-Orbit Recycling Exploiting Natural Dynamics, in 73rd International Astronautical Congress, (2022) - Proceeding Paper

3 Peñarroya, P. and **Paoli, R.**, *Orbit propagation around small bodies using spherical harmonic coefficients obtained from polyhedron shape models*, IAU Symposium, vol. 364, pp. 203–210, (2022) - Proceeding Paper
DOI: 10.1017/S1743921321001496.

2 Peñarroya, P. and **Paoli, R.**, *Orbit propagation around small bodies using spherical harmonic coefficients obtained from polyhedron shape models.*, in 7th IAA Planetary Defense Conference, (2021) - Poster

1 Peñarroya, P., Vyas, S., **Paoli, R.**, & Kajak, K. M. *Survey of Landing Methods on Small Bodies : Benefits of Robotics Manipulators to the Field*. International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space (i-SAIRAS), (2020) - Poster
DOI: 10.5281/zenodo.4275978

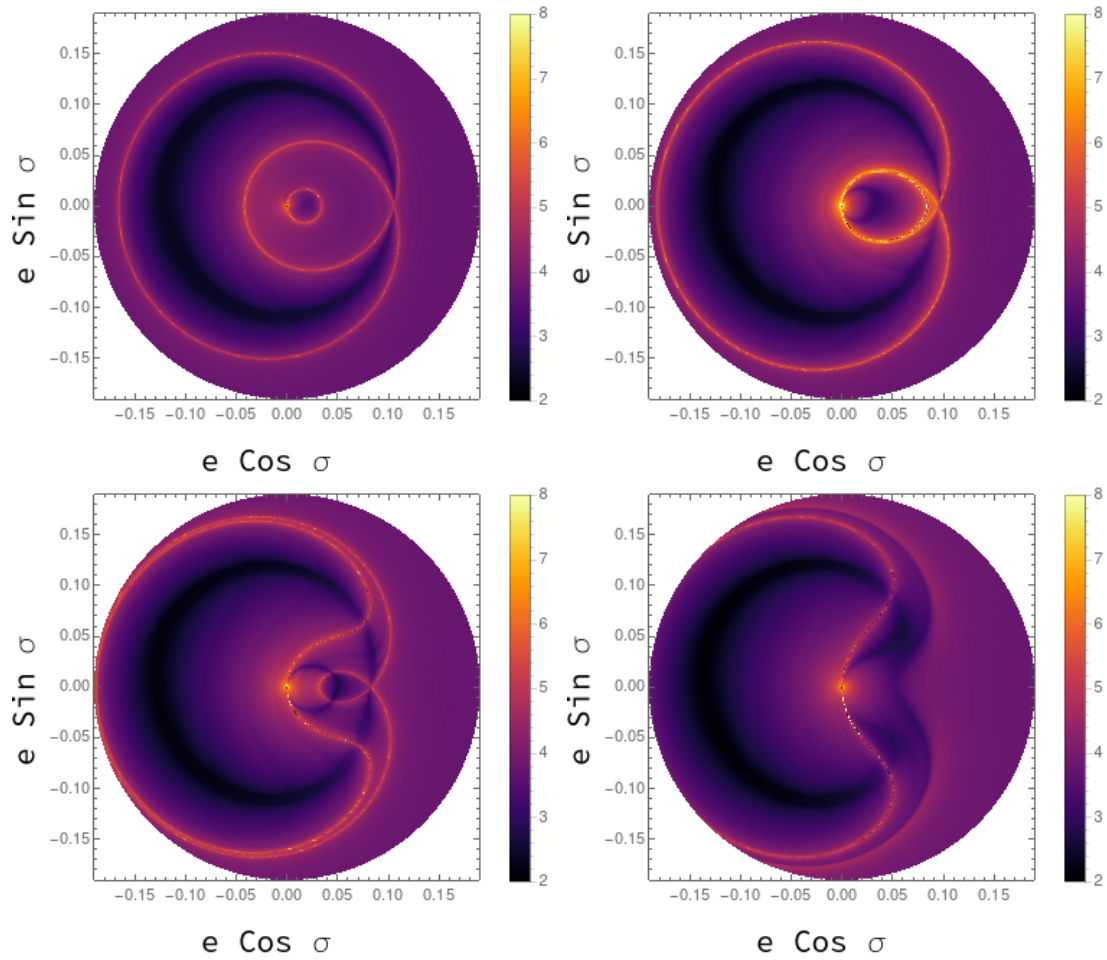


Figure 14: Rezonanța $(1, -1)$. Portretul spațiului fazelor în vecinătatea regiunii $e = 0$, obținut prin calculul indicatorului FLI în planul $(e \cos \sigma, e \sin \sigma)$. Condițiile inițiale sunt $a = 1.589R_E$, $\alpha_1 = 1.45$, $\Omega = 0$. Graficele au fost obținute pentru următoarele valori ale parametrului arie-pe-masă: 1, 1.9, 2.5 și, respectiv, 4 m^2/kg . Curba strălucitoare care trece prin punctul $(0,0)$ evidențiază singularitățile formulării considerate.

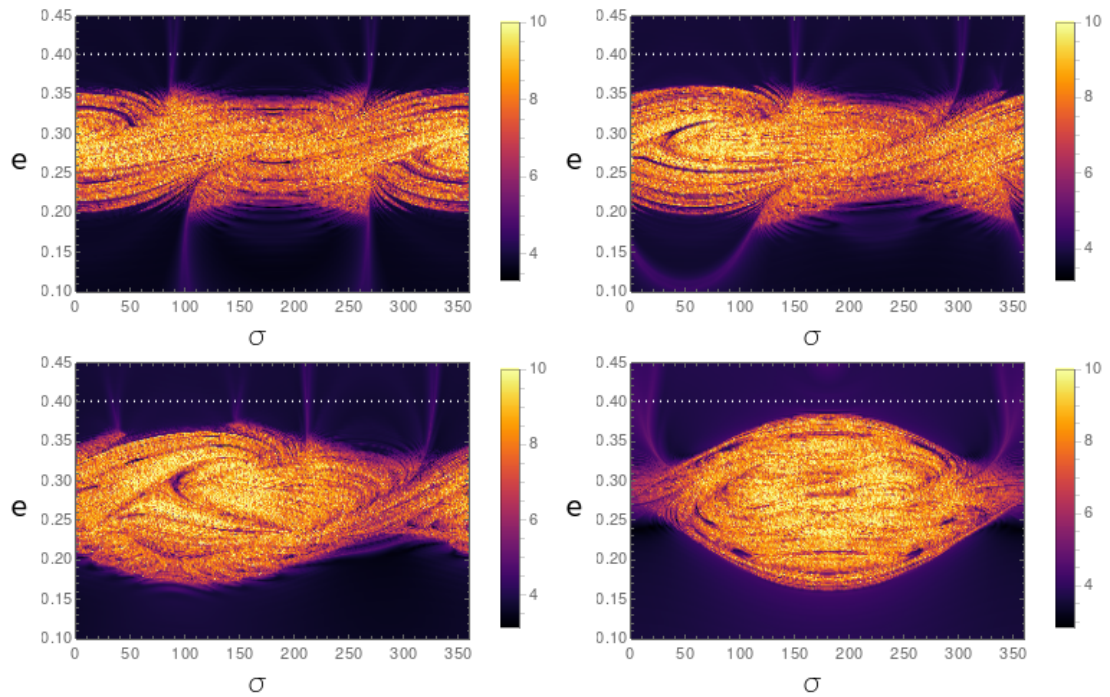


Figure 15: Suprapunerea rezonanțelor cu $k = 1$ pentru orbitele polare, demonstrată prin utilizarea indicatorului FLI. Hărțile sunt obținute prin fixarea condițiilor inițiale $a = 1.67 R_E$, $i = 90^\circ$, $A/m = 1 \text{ m}^2/\text{kg}$ și $\Omega = \Omega_0$ și calcularea indicatorului FLI peste un număr mare de orbite distribuite în planul $(e, \sigma_{0,1})$. Graficele de sus corespund valorilor $\Omega_0 = 0^\circ$ și $\Omega_0 = 45^\circ$, în timp ce cele de jos corespund valorilor $\Omega_0 = 90^\circ$ și $\Omega_0 = 180^\circ$. Linia albă punctată corespunde valorii critice a excentricității, egală cu 0.401.

References

- [1] E. Alessi, C. Colombo, and A. Rossi. Phase space description of the dynamics due to the coupled effect of the planetary oblateness and the solar radiation pressure perturbations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 131(43), 2019. doi: <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9919-z>. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s10569-019-9919-z>.
- [2] E. M. Alessi, C. Colombo, and A. Rossi. Phase space description of the dynamics due to the coupled effect of the planetary oblateness and the solar radiation pressure perturbations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 131:1–20, 2019.
- [3] V. Arnold. *Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, volume 18. 01 2009. ISBN 978-3-642-01741-4. doi: 10.1007/978-3-642-01742-1_21.
- [4] V. Barbu. *Differential Equations*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer Cham, 2016. ISBN 978-3-319-45260-9.
- [5] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems - a method for computing all of them. i - theory. ii - numerical application. *Meccanica*, 15:21–30, 03 1980. doi: 10.1007/BF02128236.
- [6] E. Bierhaus, B. Clark, J. Harris, K. Payne, R. Dubisher, D. Wurts, R. Hund, R. Kuhns, T. Linn, J. Wood, A. May, J. Dworkin, E. Beshore, and D. Lauretta. The osiris-rex spacecraft and the touch-and-go sample acquisition mechanism (tagsam). *Space Science Reviews*, 214, 09 2018. doi: 10.1007/s11214-018-0521-6.
- [7] S. Breiter. Lunisolar apsidal resonances at low satellite orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 74:253–274, 08 1999. doi: 10.1023/A:1008379908163.
- [8] S. Breiter. Extended fundamental model of resonance. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 85:209–218, 03 2003. doi: 10.1023/A:1022569419866.
- [9] A. Celletti and C. Gales. On the dynamics of space debris: 1:1 and 2:1 resonances. *Journal of Nonlinear Science*, 24, 08 2014. doi: 10.1007/s00332-014-9217-6.
- [10] A. Celletti and C. Gales. Dynamical investigation of minor resonances for space debris. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 123(2):203–222, July 2015. ISSN 1572-9478. doi: 10.1007/s10569-015-9636-1. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10569-015-9636-1>.
- [11] A. Celletti and C. B. Gales. A study of the lunisolar secular resonance $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} = 0$. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 3, 2016. ISSN 2296-987X. doi: 10.3389/fspas.2016.00011. URL <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fspas.2016.00011>.

- [12] A. Celletti, C. Galeş, and G. Pucacco. Bifurcation of lunisolar secular resonances for space debris orbits. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 15(3):1352–1383, 2016. doi: 10.1137/15M1042632. URL <https://doi.org/10.1137/15M1042632>.
- [13] A. Celletti, C. Efthymiopoulos, F. Gachet, C. Galeş, and G. Pucacco. Dynamical models and the onset of chaos in space debris. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 90:147–163, 2017. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.12.015>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0020746216301172>.
- [14] A. Celletti, C. Galeş, G. Pucacco, and A. Rosengren. Analytical development of the lunisolar disturbing function and the critical inclination secular resonance. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 127:259–283, 2017. doi: <https://doi.org/10.1007/s10569-016-9726-8>. URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s10569-016-9726-8>.
- [15] A. Celletti, C. Galeş, and C. Lhotka. (INVITED) Resonances in the Earth’s space environment. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 84: 1231–1262, 2020. doi: <https://doi.org/110.1016/j.cnsns.2020.105185>.
- [16] C. Colombo, C. Lücking, and C. R. McInnes. Orbital dynamics of high area-to-mass ratio spacecraft with j_2 and solar radiation pressure for novel earth observation and communication services. *Acta Astronautica*, 81(1):137–150, 2012.
- [17] L. E. Cunningham. On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed during the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite. *Celestial Mechanics*, 2(2):207–216, June 1970. doi: 10.1007/BF01229495.
- [18] C. Delaunay. *Théorie du mouvement de la lune*. Number pt. 1 in Mémoires de l’Académie des sciences de l’Institut de France. Série 2. Didot, 1860. URL <https://books.google.it/books?id=gRZ-D7pL9LwC>.
- [19] A. Giorgilli. *Notes on Hamiltonian Dynamical Systems*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2022.
- [20] M. Guzzo, E. Lega, and C. Froeschlé. On the numerical detection of the effective stability of chaotic motions in quasi-integrable systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 163:1–25, 03 2002. doi: 10.1016/S0167-2789(01)00383-9.
- [21] J. Henrard. Virtual singularities in artificial satellite theory. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 10:437–449, 1974. ISSN 0923-2958.
- [22] J. Henrard and A. Lemaitre. A second fundamental model for resonance. *Celestial Mechanics*, 30:197–218, 1983. doi: 10.1007/BF01234306.
- [23] E. W. Hobson. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. 1955. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117916326>.

- [24] S. Huges. Earth satellite orbits with resonant lunisolar perturbations I. Resonances dependent only on inclination. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 372(1749):243–264, 1980. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1980.0111>. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.1980.0111>.
- [25] S. Hughes. Satellite orbits perturbed by direct solar radiation pressure: General expansion of the disturbing function. *Planetary and Space Science*, 25(9): 809–815, 1977. doi: [https://doi.org/10.1016/0032-0633\(77\)90034-4](https://doi.org/10.1016/0032-0633(77)90034-4). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0032063377900344>.
- [26] M. Kanamaru. Yarkovsky-driven orbital migration of asteroid Ryugu: Implications for the returned sample analyses. In *53rd Lunar and Planetary Science Conference (2022)*, 2022.
- [27] W. Kaula. Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite. *Astronomical Journal*, 67:300, 1962. doi: https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/1962AJ.....67..300K/doi:10.1086/108729. URL <http://adsabs.harvard.edu/full/1962AJ.....67..300K>.
- [28] W. M. Kaula. *Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy*. Blaisdell Publishing Company, Waltam, Massachusetts, 1966.
- [29] Y. Kozai. Effects Motion of an Artificial Satellite. *SAO Special Report*, 56:25, Jan. 1961.
- [30] M. A. Laino, A. R. Wilson, M. Vasile, R. Paoli, and C. Gales. A transport network for in-orbit recycling exploiting natural dynamics. In *73rd International Astronautical Congress*, FRA, September 2022. URL <https://strathprints.strath.ac.uk/83592/>.
- [31] S.-L. Lien and J. T. Kajiya. A symbolic method for calculating the integral properties of arbitrary nonconvex polyhedra. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4:35–42, 1984. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:18573367>.
- [32] M. R. M. M. and J. Molenaar. *Ordinary Differential Equations in Theory and Practice*. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 2002. ISBN 0898715318.
- [33] W. D. MacMillan. *The Theory of the Potential*. McGraw-Hill book Company, 1930.
- [34] A. Milani and G. F. Gronchi. *Theory of Orbit Determination*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2009, 2009. doi: 10.1017/CBO9781139175371.
- [35] A. Milani, A. M. Nobili, and P. Farinella. *Non-gravitational perturbations and satellite geodesy*. 1987.
- [36] O. Montenbruck and E. Gill. *Satellite Orbits: Models, Methods and Applications*. Springer Berlin, Heidelberg, 2000. ISBN 978-3-540-67280-7.
- [37] C. Müller. *Spherical harmonics*. Lecture notes in mathematics. Springer, 1966.

- [38] C. D. Murray and S. F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000. doi: 10.1017/CBO9781139174817.
- [39] R. Paoli. Analytical and numerical estimates for solar radiation pressure semi-secular resonances. *Advances in Space Research*, 72(7):2481–2514, 2023. ISSN 0273-1177. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2023.01.037>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117723000613>. Space Environment Management and Space Sustainability.
- [40] N. K. Pavlis, S. A. Holmes, S. C. Kenyon, and J. K. Factor. The development and evaluation of the earth gravitational model 2008 (egm2008). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 117(B4), 2012. doi: <https://doi.org/10.1029/2011JB008916>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2011JB008916>.
- [41] P. Peñarroya and R. Paoli. Orbit propagation around small bodies using spherical harmonic coefficients obtained from polyhedron shape models. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 15(S364):203–210, 2019. doi: 10.1017/S1743921321001496.
- [42] P. Peñarroya, S. Vyas, R. Paoli, and K. M. Kajak. Survey of Landing Methods on Small Bodies : Benefits of Robotics Manipulators to the Field, Nov. 2020. URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.4275978>.
- [43] A. Roy. *Orbital Motion*. CRC Press, 2020. ISBN 9781420056884.
- [44] G. Schettino, E. M. Alessi, A. Rossi, and G. B. Valsecchi. A frequency portrait of low earth orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 131(8), jul 2019. doi: 10.1007/s10569-019-9912-6. URL <https://doi.org/10.1007%2Fs10569-019-9912-6>.
- [45] R. Schulz, H. Sierks, M. Küppers, and A. Accomazzo. Rosetta fly-by at asteroid (21) lutetia: An overview. *Planetary and Space Science*, 66(1):2–8, 2012. ISSN 0032-0633. doi: <https://doi.org/10.1016/j.pss.2011.11.013>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032063311003436>. Rosetta Fly-by at Asteroid (21) Lutetia.
- [46] L. Shampine and M. Gordon. *Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem*. W. H. Freeman, 1975. ISBN 9780716704614. URL <https://books.google.it/books?id=3TFPAQAAIAAJ>.
- [47] F. Tisserand. *Traité de mécanique céleste: Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la lune*, volume 3. Gauthier-Villars, 1894.
- [48] S. Valk, A. Lemaitre, and L. Anselmo. Analytical and semi-analytical investigations of geosynchronous space debris with high area-to-mass ratios. *Advances in Space Research*, 41(7):1077–1090, 2008. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2007.10.025>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0273117707010435>.

- [49] S. Valk, N. Delsate, A. Lemaître, and T. Carletti. Global dynamics of high area-to-mass ratios geo space debris by means of the megnio indicator. *Advances in Space Research*, 43(10):1509–1526, 2009. ISSN 0273-1177. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2009.02.014>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117709001471>.
- [50] D. Vokrouhlický. Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. II. Non-sphericity effects. , 338:353–363, Oct. 1998.
- [51] D. Vokrouhlický. A complete linear model for the Yarkovsky thermal force on spherical asteroid fragments. , 344:362–366, Apr. 1999.
- [52] D. Vokrouhlický and P. Farinella. The yarkovsky seasonal effect on asteroidal fragments: A nonlinearized theory for spherical bodies. *The Astronomical Journal*, 118(6):3049, dec 1999. doi: 10.1086/301138. URL <https://dx.doi.org/10.1086/301138>.
- [53] R. Werner. Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron. *Computers Geosciences*, 23(10):1071–1077, 1997. doi: [https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(97\)00110-6](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(97)00110-6).
- [54] R. Werner and D. Scheeres. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 castalia. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 65:313–344, 09 1996. doi: 10.1007/BF00053511.
- [55] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2003. ISBN 9780387001777. URL <https://books.google.it/books?id=RSI4RGdwnU4C>.