Universitatea „Alexandru Ioan Cuza" Iaşi
Facultatea de Matematică

Contribuţii la studiul unor concepte de eficienţă Pareto generalizată

Coordonator: **Prof. Dr. Marius Durea**

Rezumatul tezei de doctorat

Student: **Plop (căs. Maxim) Diana-Elena**

Iaşi, 2023

Introducere

Lucrarea de faţă este organizată într-un capitol introductiv care conţine preliminarii şi două capitole principale în care studiem unele probleme de optimizare cu ordine fixă, respectiv cu ordine variabilă.

În primul capitol facem o scurtă prezentare a noţiunilor şi rezultatelor principale de analiză variaţională şi optimizare pe care le folosim în lucrare. Cele mai consultate referinţe pentru acest capitol au fost [7], [32], [44] şi [58].

În al doilea capitol studiem două noţiuni de eficienţă Pareto direcţională în raport cu una, respectiv două mulţimi de direcţii, introduse în [8] şi [27]. Obiectivul principal al studiului este să obţinem condiţii necesare de optimalitate pe spaţii primale şi duale. În prima secţiune obţinem astfel de condiţii pentru probleme fără restricţii folosind următoarea schemă de lucru: întâi stabilim unele condiţii suficiente de deschidere direcţională pentru multifuncţii, apoi, rezultatele cu condiţii de optimalitate le construim cu ipoteza de minimalitate şi cu o parte din condiţiile suficiente de regularitate; apoi, bazându-ne pe incompatibilitatea dintre deschidere şi minimalitate (adaptată la cadrul nostru direcţional), deducem condiţii de optimalitate prin negarea celorlalte condiţii suficiente de deschidere. Ideile noi pe care le folosim în demersul nostru, faţă de alte rezultate asemănătoare din literatură, sunt că evităm ipoteza de închidere a multifuncţiei epigraf asociată cu multifuncţia obiectiv şi folosim doar închiderea acesteia din urmă şi, în al doilea rând, propunem o versiune adaptată la cadru direcţional pentru binecunoscutul Principiu Variaţional al lui Ekeland.

În Secţiunea 2 obţinem condiţii de optimalitate pentru o problemă de optimizare cu restricţii, în raport cu un minim direcţional în raport cu două mulţimi de direcţii. Metoda de lucru este destul de directă; pornim de la faptul că un punct de minim pentru o problemă cu restricţii este punct extremal pentru un sistem în care sunt implicate multifuncţia obiectiv şi restricţiile problemei, apoi folosim faptul că Principiul Extremal Aproximativ este satisfăcut pe spaţii Asplund.

În Secţiunea 3 abordăm din nou o problemă de optimizare fără restricţii, de data aceasta din perspectiva analizei senzitivităţii. Mai precis, arătăm că limita unui şir de minime direcţionale pentru un şir de perturbări ale multifuncţiei obiectiv F este punct critic pentru F, în sens Fermat generalizat exprimat folosind coderivate Mordukhovich. Pentru acest scop folosim unele rezultate auxiliare, care au de asemenea importanţă de sine stătătoare. Introducem o noţiune mai slabă de deschidere direcţională (a se vedea [22] şi [27]) în raport cu două mulţimi de direcţii în spacţiile de pornire şi de sosire, respectiv, şi de asemenea în raport cu conul de ordonare din spaţiul de sosire; în raport cu această noţiune, arătăm că suma dintre o multifuncţie în acest fel direcţional deschisă şi una direcţional Aubin continuă rămâne direcţional deschisă, atât într-o versiune locală cât şi în una globală.

Studiul din Secţiunea 4 are ca punct de pornire o dilemă pe care o descriem pe scurt în continuare. Dacă ne referim la o problemă de optimizare cu restricţii, în general, pentru a scrie condiţii de optimalitate este nevoie de nişte condiţii de calificare. Dacă adăugăm o restricţie, problema se poate schimba foarte mult şi chiar dacă sistemul iniţial de restricţii verifică o condiţie de calificare, noul sistem este posibil să nu o mai verifice. Astfel, ne punem întrebarea dacă putem lega într-un fel cele două sisteme de restricţii în aşa fel încât să putem scrie condiţii de optimalitate pentru cel de-al doilea sistem fără a fi nevoie să verificăm o condiţie de calificare pentru întregul sistem de restricţii, ci doar pentru cel iniţial şi restricţia pe care o adăugăm la acesta. Am început investigaţia în acest sens de la o problemă de optimizare netedă cu restricţii de tip inegalitate şi am observat că, pentru a menţine ipotezele minime, ajungem la o condiţie de tip inegalitate metrică; acest tip de inegalitate intervine în mod natural şi în alt fel de probleme de optimizare, incluzând probleme ne-netede şi de asemenea unele rezultate de penalizare de tip Clarke. Introducem deci o condiţie metrică (inegalitate) menită să umple golul dintre ipotezele folosite înainte de introducerea unei noi restricţii şi cele necesare pentru a putea scrie condiţii de optimalitate pentru noua problemă.
Folosim apoi schema de lucru cu care am ajuns la inegalitatea metrică pe de o parte pentru a obţine condiţii necesare de optimalitate pentru conceptele de minim direcţional Pareto studiate în această teză, iar pe de altă parte, pentru rezultate de penalizare pentru probleme de optimizare nenetede cu restricţii multiple. În ultima secţiune din capitol realizăm o comparare între condiţia metrică introdusă în secţiunea anterioară şi alte condiţii asemănătoare din literatură, subliniind faptul că inegalitatea noastră are avantajul de a fi mai uşor de verificat şi poate fi folosită în contexte în care lipseşte diferenţiabilitatea.
Capitolul se încheie cu unele comentarii bibliografice.

Începem ultimul capitol al tezei, în care tratăm probleme de optimizare cu ordine variabilă, cu o discuţie legată de patru concepte de dilatări de conuri, cu proprietăţi şi relaţii între ele. Apoi stabilim în cadru infinit dimensional un rezultat de separare a conurilor în sensul dat în [33]; mai precis, având două conuri C_1 şi C_2 a căror intersecţie este $\{0\}$, găsim un al treilea con C_3, o dilatare a lui C_2 în fapt, care le separă, adică intersecţia dintre C_3 şi C_1 este tot $\{0\}$, iar conul C_2 este inclus în interiorul topologic al lui C_3. Secţiunea 2 tratează stabilitatea a trei tipuri de eficienţă aproximativă definite în contextul ordinei variabile, pentru mulţimi şi pentru multifuncţii. Mai precis, stabilim că limita unui şir de minime pentru un şir de perturbări ale unei mulţimi A este minim pentru A, şi similar, limita unui şir de minime pentru un şir de perturbări ale unei multifuncţii F este punct de minim pentru F. În Secţiunea 3 investigăm unele posibilităţi de a recupera o problemă de optimizare cu ordine fixă dintr-una cu ordine variabilă. Dintr-un element robust al unei multifuncţii F în raport cu o dilatare a multifuncţiei de ordonare K recuperăm un minim clasic pentru F în raport cu limita superioară a lui K, şi dintr-un element nondominat al lui F în raport cu o dilatare a lui K recuperăm un minim aproximativ pentru F în raport cu limita inferioară a lui K. În final, în ultima secţiune stabilim un rezultat de optimalitate pentru probleme de optimizare cu ordine variabilă folosind conversia la ordine fixă din secţiunea anterioară, un rezultat de separare a conurilor şi bine-cunoscuta funcţională Gerstewitz. Încheiem capitolul cu unele comentarii bibliografice.

Rezultatele originale din această lucrare sunt conţinute în lucrările [23], [24], [27] şi [42], lista lor fiind după cum urmează: Definiţia 2.1.2, Teorema 2.1.7, Teorema 2.1.8, Teorema 2.1.10, Teorema 2.1.11, Teorema 2.1.12, Teorema 2.2.2, Teorema 2.3.3, Teorema 2.3.4, Corolarul 2.3.6, Teorema 2.3.7, Teorema 2.4.1, Corolarele 2.4.3 şi 2.4.4, Lema 2.4.6, Teorema 2.4.7, Propoziţia 2.5.3, Propoziţia 2.4.5, Teorema 2.4.8, Corolarul 2.4.9, Teorema 2.4.11, Propoziţia 3.1.8, Propoziţia 3.2.4, Propoziţia 3.2.6, Propoziţia 3.2.10, Propoziţia 3.3.1, Propoziţia 3.3.2, Propoziţia 3.3.4 şi Teorema 3.4.1, precum şi exemplele care ilustrează unele rezultate şi relaţiile dintre diversele condiţii discutate pe parcursul lucrării.

Cuprins

Capitolul 1

Preliminarii

1.1 Elemente de analiză neliniară

Pe parcursul acestei teze notăm prin X şi Y spaţii liniare normate, dacă nu specificăm altfel. Originea spaţiului X o notăm explicit cu 0_X, iar 0 reprezintă originea spaţiului $\mathbb{R}$. Dualul topologic al lui X este notat cu X^*, iar topologiile slabă şi slab-stelată, respectiv, sunt notate cu w şi w^*. Bila unitate deschisă, bila unitate închisă şi sfera unitate din X sunt notate cu B_X, D_X şi S_X. Bila deschisă de centru $x \in X$ şi rază $r > 0$ o notăm cu $B(x,r)$. Notaţiile $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$ şi $\operatorname{bd} A$ sunt pentru interiorul topologic, închiderea şi frontiera unei mulţimi nevide $A \subset X$. Mulţimea vecinătăţilor unui punct $\overline{x} \in X$ este $\mathcal{V}(x)$. O submulţime A a lui X este local închisă în jurul unui punct $\overline{x} \in A$ dacă este o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât $A \cap U$ este închisă.
Distanţa de la un punct $x \in X$ la o mulţime nevidă $\Omega \subset X$ este $d(x,\Omega) := \inf\{\|x-\omega\| \mid \omega \in \Omega\}$ şi funcţia distanţă la Ω este $d_\Omega : X \to \mathbb{R}$ dată prin $d_\Omega(x) := d(x,\Omega)$.

Fie $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ o funcţie cu valori pe axa reală extinsă. Mulţimile $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$ şi $\operatorname{epi} f := \{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}$ sunt *domeniul* şi *epigraful* lui f. Dacă $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$, funcţia se numeşte *proprie*. Dacă λ este un scalar real, mulţimea de subnivel a lui f faţă de λ este $[f \leq \lambda] := \{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$.
Pentru o multifuncţie $F : X \rightrightarrows Y$ domeniul şi graficul sunt mulţimile $\operatorname{Dom} F = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ şi $\operatorname{Gr} F = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$. Dat $(\overline{x},\overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$, spunem că F este de tip Lipschitz în jurul lui $(\overline{x},\overline{y})$ cu modul $l > 0$ dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât

$$F(x) \subset F(u) + l\|x-u\|D_X, \ \forall x, u \in U.$$

F este inferior semicontinuă în $(x,y) \in \operatorname{Gr} F$ dacă pentru orice şir $x_n \to x$, există un şir $y_n \to y$ cu $(x_n,y_n) \in \operatorname{Gr} F$ pentru orice n.

Un con $K \subset Y$ se numeşte *propriu* dacă nu este nici $\{0_Y\}$ nici spaţiul întreg Y; dacă intersecţia $K \cap -K = \{0_Y\}$, conul K este *punctat*; dacă $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, K este numit *solid*. Înfăşurătoarea conică a unei mulţimi nevide $C \subset Y$ este notată cu $\operatorname{cone} C$.
Un con convex induce o relaţie de preordine pe un spaţiu liniar, compatibilă cu structura liniară. Dacă în plus conul convex este şi punctat, relaţia de preordine devine o relaţie de ordine parţială.
Conul dual pozitiv al conului $K \subset Y$ se defineşte prin

$$K^+ := \{y^* \in Y^* \mid \langle y^*, y\rangle \geq 0, \ \forall y \in K\}.$$

1.2 Elemente de analiză variaţională şi diferenţiere generalizată

În această lucrare folosim definiţiile conului tangent în sens Bouligand, Ursescu şi Dubovitskiy-Miljutin.
Fie $\Omega \subset X$ o submulţime a spaţiului normat X şi $\overline{x} \in X$. Conul contingent cone (**Bouligand**), conul adiacent (**Ursescu**) şi conul interior contingent (**Dubovitskiy-Miljutin**), respectiv, la Ω în $\overline{x}$ sunt descrise prin

$$\begin{aligned} T_B(\Omega,\overline{x}) &= \{u \in X \mid \exists t_n \to 0^+ \text{ and } \exists u_n \to u \text{ s.t. } \overline{x}+t_nu_n \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N}\}; \qquad (1.1)\\ T_U(\Omega,\overline{x}) &= \{u \in X \mid \forall t_n \to 0^+ \text{ and } \exists u_n \to u \text{ s.t. } \overline{x}+t_nu_n \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N}\};\\ T_{DM}(\Omega,\overline{x}) &= \{u \in X \mid \forall t_n \to 0^+ \text{ and } \forall u_n \to u\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \overline{x}+t_nu_n \in \Omega,\ \forall n \geq n_0\}. \end{aligned}$$

Derivata Bouligand a unei multifuncţii într-un punct se defineşte prin conul tangent Bouligand după cum urmează (a se vedea [1]).

Definiţia 1.2.1 *Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $(\overline{x},\overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. Derivata Bouligand a lui F în $(\overline{x},\overline{y})$ este multifuncţia $D_BF(\overline{x},\overline{y}) : X \rightrightarrows Y$ astfel încât*

$$\operatorname{Gr} D_BF(\overline{x},\overline{y}) = T_B(\operatorname{Gr} F,(\overline{x},\overline{y})).$$

Obiectul de diferenţiere generalizată principal care ne trebuie în această lucrare, pe care îl amintim din [8], este o variantă direcţională a derivatei Bouligand de mai sus.

Definiţia 1.2.2 *Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie, $(\overline{x},\overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ şi $\emptyset \neq L \subset S_X$, $\emptyset \neq M \subset S_Y$. Derivata Bouligand a lui F în $(\overline{x},\overline{y})$ în raport cu L şi M este multifuncţia $D_B^{L,M}F(\overline{x},\overline{y}) : X \rightrightarrows Y$ definită prin*

$$\begin{aligned} D_B^{L,M}F(\overline{x},\overline{y})(u) =&\{v \in Y | \exists\ t_n \to 0^+,\ \exists\ u_n \xrightarrow{\operatorname{cone} L} u,\ \exists\ v_n \xrightarrow{\operatorname{cone} M} v\\ &\textit{such that for all } n,\ \overline{y}+t_nv_n \in F(\overline{x}+t_nu_n)\}, \end{aligned}$$

unde prin notaţia $u_n \xrightarrow{\operatorname{cone} L} u$ înţelegem că $(u_n) \subset \operatorname{cone} L$ şi $u_n \to u$.

Se poate verifica uşor că $D_B^{L,M}F(\overline{x},\overline{y})$ este pozitiv omogenă.

Un alt instrument important în analiza neliniară util pentru studiul problemelor de optimizare îl reprezintă conurile normale. În această lucrare folosim construcţiile de diferenţiere generalizată dezvoltate de Mordukhovich şi colaboratorii săi (a se vedea [44]) pe spaţii duale.
Fie X un spaţiu Banach şi fie Ω o submulţime nevidă a lui X, $\varepsilon \geq 0$ şi $\overline{x} \in \Omega$. Mulţimea $\varepsilon-$normalelor la Ω în $\overline{x}$ este

$$\widehat{N}_\varepsilon(\Omega,\overline{x}) := \left\{ x^* \in X^* \mid \limsup_{x \xrightarrow{\Omega} \overline{x}} \frac{\langle x^*, x-\overline{x}\rangle}{\|x-\overline{x}\|} \leq \varepsilon \right\},$$

unde notaţia $x \xrightarrow{\Omega} \overline{x}$ înseamnă că $x \in \Omega$ şi $x \to \overline{x}$. Dacă $\varepsilon = 0$, elementele din partea dreaptă a expresiei de mai sus se numesc normale Fréchet, iar mulţimea lor este conul

normal Fréchet la Ω în $\overline{x}$, notat prin $\widehat{N}(\Omega,\overline{x})$.
Conul normal Mordukhovich la Ω în $\overline{x}$ este

$$N(\Omega,\overline{x}) := \{x^* \in X^* \mid \exists \varepsilon_n \to 0^+, x_n \xrightarrow{\Omega} \overline{x}, x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*, x_n^* \in \widehat{N}_{\varepsilon_n}(\Omega, x_n), \forall n \in \mathbb{N}\},$$

unde notaţia $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ înseamnă convergenţă în topologia slab-stelată.
Dacă Ω este convexă, atunci conul normal Fréchet şi conul normal Mordukhovich la Ω în $\overline{x}$ coincid cu conul normal din analiza convexă, adică

$$\widehat{N}(\Omega,\overline{x}) = N(\Omega,\overline{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x-\overline{x}\rangle \leq 0,\ \forall x \in \Omega\}.$$

Când X este spaţiu finit-dimensional, relaţia dintre conurile tangente şi normale este dată de [44, Theorem 1.10], anume

$$\widehat{N}(\Omega,\overline{x}) = -(T_B(\Omega,\overline{x}))^+.$$

Dacă X este Asplund (i.e., un spaţiu Banach în care orice funcţie continuă convexă $f : U \to \mathbb{R}$ definită pe o mulţime deschisă convexă U din X este Fréchet diferenţiabilă pe o submulţime densă a lui U) şi Ω este local închisă în jurul lui $\overline{x}$, are loc că $N(\Omega,\overline{x}) = \operatorname*{Limsup}_{x\to\overline{x}} \widehat{N}(\Omega,\overline{x})$.
Altă proprietate topologică importantă a spaţiilor Asplund este că orice şir mărginit din dualul unui spaţiu Asplund admite un subşir w^*-convergent.

Aşa cum conurile tangente sunt la baza construcţiei derivatelor pentru multifuncţii în spaţii primale, conurile normale sunt esenţiale pentru construcţia coderivatelor multifuncţiilor, în spaţii duale. Pentru o multifuncţie $F : X \rightrightarrows Y$ între spaţiile Banach X şi Y, coderivata Fréchet a lui F în $(\overline{x},\overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este multifuncţia $\widehat{D}^*F(\overline{x},\overline{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$ dată prin

$$\widehat{D}^*F(\overline{x},\overline{y})(y^*) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in \widehat{N}(\operatorname{Gr} F, (\overline{x},\overline{y}))\},$$

şi coderivata Mordukhovich a lui F în $(\overline{x},\overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este multifuncţia $D^*F(\overline{x},\overline{y}) : Y^* \rightrightarrows X^*$ dată prin

$$D^*F(\overline{x},\overline{y})(y^*) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in N(\operatorname{Gr} F, (\overline{x},\overline{y}))\}.$$

Când $F := f$ este o funcţie, $\overline{y} = f(\overline{x})$ şi scriem $\widehat{D}^*f(\overline{x})$ în loc de $\widehat{D}^*F(\overline{x},\overline{y})$ şi $D^*f(\overline{x})$ în loc de $D^*F(\overline{x},\overline{y})$.

Dacă $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ este o funcţie convexă finită în $\overline{x} \in X$. Subdiferenţiala Fenchel a lui f în $\overline{x}$ este definită prin

$$\partial f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle - \langle x^*, \overline{x}\rangle \leq f(x) - f(\overline{x}), \forall x \in X\}.$$

Pentru o funcţie $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ finită în $\overline{x} \in X$, subdiferenţialele Fréchet şi Mordukhovich ale lui f în $\overline{x}$ sunt mulţimile

$$\widehat{\partial} f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in \widehat{N}(\operatorname{epi} f, (\overline{x}, f(\overline{x})))\},$$

respectiv
$$\partial f(\overline{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N(\operatorname{epi} f, (\overline{x}, f(\overline{x})))\}.$$
Folosim aceeaşi notaţie pentru subdiferenţialele Fenchel şi cele la limită întrucât coincid pentru funcţii convexe.
Are loc incluziunea $\widehat{\partial} f(\overline{x}) \subset \partial f(\overline{x})$ şi o regulă generalizată de tip Fermat: dacă $\overline{x}$ este punct de minim local pentru f atunci $0_{X^*} \in \widehat{\partial} f(\overline{x})$.

1.3 Câteva instrumente pentru probleme de optimizare cu multifuncţii

Prezentăm câteva instrumente tehnice pe care le vom folosi în această teză.

• Considerăm $\Omega \subset X$ şi $M \subset S_X$ două mulţimi nevide. Funcţia direcţională de timp minimal în raport cu M, $T_M(\cdot, \Omega) : X \to [0, \infty]$, este dată prin

$$T_M(x, \Omega) := \inf\{t \geq 0 \mid \exists u \in M \ : \ x + tu \in \Omega\} \text{ pentru orice } x \in X. \tag{1.2}$$

Când Ω are doar un element, scriem $T_M(x, \{u\}) =: T_M(x, u)$. Este uşor de verificat că $T_M(x, u)$ este $+\infty$ dacă şi numai dacă $u - x \notin \operatorname{cone} M$, şi este $\|u - x\|$ dacă şi numai dacă $u - x \in \operatorname{cone} M$. Dacă una din mulţimile M şi Ω este închisă, iar cealaltă este compactă, atunci $T_M(\cdot, \Omega)$ este inferior semicontinuă. Dacă $\Omega = \{u\}$ şi $\operatorname{cone} M$ este convexă, atunci funcţia de timp minimal este convexă.
• Binecunoscuta funcţională de scalarizare Gerstewitz (Tammer) şi unele proprietăţi ale ei sunt date în următoarea lemă.

Lema 1.3.1 *Fie $\emptyset \neq A \subset Y$, $A \neq Y$, o mulţime închisă şi $e \in Y \setminus \{0_Y\}$ astfel încât $A + [0, \infty)e \subset A$.*
Atunci funcţionala $s_{e,A} : Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ dată prin

$$s_{e,A}(y) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda e \in y + A\} \tag{1.3}$$

este inferior semicontinuă şi, în plus, $s_{e,A}$ este convexă dacă şi numai dacă A este convexă.

• Principiul Variaţional al lui Ekeland

Teorema 1.3.2 *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ o funcţie proprie, inferior semicontinuă şi mărginită inferior. Pentru orice $x_0 \in \operatorname{dom} f$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $x_\varepsilon \in X$ astfel încât*

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x_0) - \varepsilon d(x_0, x_\varepsilon)$$

şi
$$f(x_\varepsilon) < f(x) + \varepsilon d(x, x_\varepsilon), \ \forall x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}.$$

• Dăm acum definiţii pentru unele proprietăţi de compactitate generalizată (a se vedea [16]).

Definiţia 1.3.3 *Fie X şi Y spaţii Asplund.*

(i) O mulţime $\Omega \subset X$ local închisă în jurul lui $\overline{x} \in \Omega$ se numeşte secvenţial normal compactă (prescurtat (SNC)) în $\overline{x}$ dacă pentru orice şiruri $(x_n, x_n^*) \subset \Omega \times X^*$ care verifică

$$x_n \to \overline{x},\ x_n^* \in \widehat{N}(\Omega, x_n) \,\text{and}\, x_n^* \xrightarrow{w^*} 0_{X^*},$$

urmează că $x_n^* \to 0_{X^*}$ pentru $n \to \infty$.

(ii) O multifuncţie $F : X \rightrightarrows Y$ local închisă în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}F$ se numeşte parţial secvenţial normal compactă (prescurtat (PSNC)) în $(\overline{x}, \overline{y})$ dacă pentru orice şiruri $(x_n, y_n, x_n^*, y_n^*) \in \mathrm{Gr}F \times X^* \times Y^*$ care verifică

$$(x_n, y_n) \to (\overline{x}, \overline{y}),\ x_n^* \in \widehat{D}^* F(x_n, y_n)(y_n^*),\ x_n^* \xrightarrow{w^*} 0_{X*},\ and\ y_n^* \to 0_{Y*},$$

urmează că $x_n^* \to 0_{X*}$ pentru $n \to \infty$.

Definiţia 1.3.4 *Fie Ω_1 şi Ω_2 două mulţimi închise nevide ale spaţiului X. Spunem că Ω_1 şi Ω_2 sunt aliate în $\overline{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ dacă pentru orice $(x_{in}) \xrightarrow{\Omega_i} \overline{x}$, $x_{in}^* \in \widehat{N}(\Omega_i, x_{in})$, $i = 1, 2$, relaţia $x_{1n}^* + x_{2n}^* \to 0_{X^*}$ implică $x_{1n}^* \to 0_{X^*}$ şi $x_{2n}^* \to 0_{X^*}$.*

În această lucrare studiem următoarea problemă de optimizare cu restricţii geometrice:

$$(P)\ \min\ F(x),\ \text{subject to}\ x \in \Omega,$$

unde $F : X \rightrightarrows Y$ este o multifuncţie şi $\Omega \subset X$ este o mulţime nevidă. Conceptele de minimalitate sunt în raport cu o relaţie de ordine indusă de un con $K \subset Y$. În general, pe parcursul lucrării, când ne referim la minimalitate în raport cu K, înţelegem că acesta este propriu, convex şi închis.
Multifuncţia epigraf asociată cu F este multifuncţia $\widetilde{F} : X \rightrightarrows Y$ dată prin $\widetilde{F}(x) = F(x) + K$ pentru orice $x \in X$.
Noţiunea de minim cu care lucrăm este cea de minim Pareto care se referă, în linii mari, la a găsi un punct în jurul căruia nu se pot obţine valori mai mici pentru un obiectiv fără a dăuna altui obiectiv. Formal, avem următoarea definiţie.

Definiţia 1.3.5 *(i) Un punct $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}\, F \cap (\Omega \times Y)$ se numeşte minim local Pareto pentru F pe Ω dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât*

$$(F(U \cap \Omega) - \overline{y}) \cap (-K) \subset K. \tag{1.4}$$

(ii) Dacă $\mathrm{int}\, K \neq \emptyset$, $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}\, F \cap (\Omega \times Y)$ se numeşte minim local Pareto slab pentru F pe Ω dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât

$$(F(U \cap \Omega) - \overline{y}) \cap (-\,\mathrm{int}\, K) = \emptyset.$$

Dacă $U = X$, obţinem noţiunile globale corespunzătoare.

Când $Y := \mathbb{R}$ considerăm $K = [0, \infty)$ şi astfel noţiunile de eficienţă de mai sus se reduc la conceptul clasic de minim din optimizarea scalară.

În continuare enunţăm două exemple de rezultate ce conţin condiţii de optimalitate care ne-au fost puncte de start pentru rezultatele obţinute în această teză.

Propoziţia 1.3.6 *[17, Proposition 3.3] Fie X şi Y spaţii Banach, $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie, K un con închis convex şi fie $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ un minim local Pareto pentru F. Presupunem că $\widetilde{F}$ este local închis în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$ şi $K \setminus -K \neq \emptyset$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \operatorname{Gr} \widetilde{F} \cap B((\overline{x}, \overline{y}), \varepsilon)$, $z_\varepsilon \in B(0_Y, \varepsilon) \setminus \{0_Y\}$ astfel încât*

$$z_\varepsilon \notin \operatorname{cl}(D_B \widetilde{F}(x_\varepsilon, y_\varepsilon)(B(0_X, 1))).$$

Teorema 1.3.7 *[16, Theorem 3.11] Fie X, Y spaţii Asplund, $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ un minim local Pareto pentru F. Presupunem că are loc una din ipotezele de compactitate asupra lui K, anume K să fie SNC în 0_Y sau F^{-1} să fie $PSNC$ în $(\overline{y}, \overline{x})$. Dacă $\operatorname{Gr} F$ este local închis în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$, atunci există $y^* \in K^+ \setminus \{0_Y\}$ astfel încât*

$$0_{X^*} \in D^* F(\overline{x}, \overline{y})(y^*).$$

Capitolul 2

Eficienţă Pareto generalizată în optimizarea cu ordine fixă

Scopul acestui capitol este de a obţine condiţii de optimalitate necesare pentru o noţiune de eficienţă Pareto generalizată, pe care o introducem mai jos. Pe lângă aceasta, mai propunem o condiţie de calificare în formă metrică şi discutăm despre utilitatea ei în unele probleme de optimizare. Conţinutul acestui capitol se bazează pe lucrările [23], [27] şi [42]. Principalele contribuţii originale sunt Definiţia 2.1.2, Teorema 2.1.7, Teorema 2.1.8, Teorema 2.1.10, Teorema 2.1.11, Teorema 2.1.12, Teorema 2.2.2, Teorema 2.3.3, Teorema 2.3.4, Corolarul 2.3.6, Teorema 2.3.7, Teorema 2.4.1, Corolarele 2.4.3 şi 2.4.4, Lema 2.4.6, Teorema 2.4.7, Propoziţia 2.5.3, Propoziţia 2.4.5, Teorema 2.4.8, Corolarul 2.4.9, Teorema 2.4.11 şi exemplele care ilustrează unele rezultate şi relaţiile dintre diferitele condiţii tratate pe parcursul lucrării.

2.1 Condiții de optimalitate pentru minimalitate direcțională fără restricții

În acest capitol, dacă nu se precizează altfel, X şi Y reprezintă spaţii Banach reale, iar $K \subset Y$ un con convex închis şi propriu. Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $\Omega \subset X$ o mulţime nevidă. Problema de optimizare pe care o avem în vedere este

$$(P) \ \min \ F(x), \text{ subject to } x \in \Omega.$$

Definim în continuare noţiunile de minim direcţional care stau la baza studiului din acest capitol. Prima noţiune este aceea de minim direcţional în raport cu o mulţime închisă de direcţii din sfera unitate a spaţiului X, anume $\emptyset \neq L \subset S_X$. Această noţiune a fost introdusă în [8].

Definiţia 2.1.1 *(i) Spunem că $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (\Omega \times Y)$ este minim direcţional Pareto local pentru F pe Ω în raport cu mulţimea de direcţii L dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât*

$$(F(U \cap \Omega \cap (\overline{x} + \operatorname{cone} L)) - \overline{y}) \cap (-K) \subset K. \tag{2.1}$$

(ii) Dacă $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, spunem că $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (\Omega \times Y)$ este minim direcţional Pareto local slab pentru F pe Ω în raport cu mulţimea de direcţii L dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât

$$(F(U \cap \Omega \cap (\overline{x} + \operatorname{cone} L)) - \overline{y}) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset.$$

Desigur, dacă $L = S_X$, noţiunile direcţionale de minimalitate Pareto definite mai sus se reduc la noţiunile clasice de eficienţă Pareto din Definiţia 1.32. De asemenea, se observă cu uşurinţă că un punct de minim Pareto local în sens clasic este minim direcţional Pareto local în raport cu orice mulţime de direcţii. Implicaţia inversă nu este în general valabilă.
Pentru a doua variantă de minim direcţional, introdusă în [27], considerăm altă mulţime închisă de direcţii, de data aceasta din spaţiul Y, anume $\emptyset \neq M \subset S_Y$.

Definiţia 2.1.2 *(i) Spunem că $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (\Omega \times Y)$ este minim direcţional Pareto local pentru F pe Ω în raport cu $L \subset S_X$ şi $M \subset S_Y$ dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât*

$$[F(U \cap \Omega \cap (\overline{x} + \operatorname{cone} L)) \cap (\overline{y} - \operatorname{cone} M) - \overline{y}] \cap (-K) \subset K. \tag{2.2}$$

(ii) Dacă $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, spunem că $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F \cap (\Omega \times Y)$ este minim direcţional Pareto local slab pentru F pe Ω în raport cu $L \subset S_X$ şi $M \subset S_Y$ dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât

$$[F(U \cap \Omega \cap (\overline{x} + \operatorname{cone} L)) \cap (\overline{y} - \operatorname{cone} M) - \overline{y}] \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset.$$

Observaţia 2.1.3 *În cazul în care $F := f$ este o funcţie, nu se mai precizează $\overline{y}$ întrucât $\overline{y} = f(\overline{x})$. De asemenea, dacă $\Omega = X$ atunci avem minimalitate fără restricţii şi nu mai menţionăm "pe Ω", iar dacă $U = X$ atunci obţinem noţiunile globale corespunzătoare.*

Observăm că relaţia (2.2) este echivalentă cu

$$[F(U \cap \Omega \cap (\overline{x} + \operatorname{cone} L)) - \overline{y}] \cap (-\operatorname{cone} M) \cap (-K) \subset K,$$

şi astfel, dacă avem $K \subset \operatorname{cone} M$, relaţia de mai sus se reduce la relaţia (2.1). Cu alte cuvinte, în cazul $K \subset \operatorname{cone} M$, mulţimea de direcţii M nu mai joacă niciun rol în noţiunea de eficienţă din Definiţia 2.1.2(i) şi cea din urmă se reduce la noţiunea din Definiţia 2.1.1(i).

În cazul particular în care $M = S_Y$, cele două noţiuni direcţionale de minimalitate Pareto din Definiţiile 2.1.1 şi 2.1.2 coincid. Observăm că (2.1) implică (2.2), dar implicaţia inversă nu este în general adevărată.

În această secţiune ne propunem să obţinem condiţii necesare de optimalitate pentru noţiunile de eficienţă direcţională considerate în această lucrare atât pe spaţii primale cât şi pe spaţii duale. Pentru a face acest lucru urmăm doi paşi. Întâi amintim un rezultat de incompatibilitate între un concept de deschidere direcţională şi eficienţa Pareto direcţională cu care lucrăm. Ideea unui astfel de rezultat vine dintr-o observaţie în cazul scalar care afirmă că o funcţie nu poate fi deschisă într-un punct de minim. Această observaţie a fost generalizată la cadre mai generale în mai multe lucrări (a se vedea, de exemplu, [16] şi [**?**]). Al doilea pas, motivat de primul, este de a obţine condiţii suficiente pentru deschiderea direcţională a multifuncţiilor folosind atât derivate

generalizate, cât şi coderivate.
Conceptul de dechidere direcţională folosit în continuare este dat în următoarea definiţie (pentru mai multe detalii despre regularitatea direcţională a multifuncţiilor, cităm [20]).

Definiţia 2.1.4 *Fie multifuncţia* $F : X \rightrightarrows Y$, *un punct* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$, $\emptyset \neq L \subset S_X$, *şi* $\emptyset \neq M \subset S_Y$. *Spunem că* F *este deschisă direcţional în* $(\overline{x}, \overline{y})$ *în raport cu* L *şi* M *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $r > 0$ *astfel încât*

$$B(\overline{y}, r) \cap (\overline{y} - \operatorname{cone} M) \subset F((B(\overline{x}, \varepsilon) \cap (\overline{x} + \operatorname{cone} L)).$$

Observaţia 2.1.5 *Se constată cu uşurinţă că dacă* F *este deschisă direcţional în* $(\overline{x}, \overline{y})$ *în raport cu* L *şi* M, *atunci şi multifuncţia epigraf asociată lui* F, *anume* $\widetilde{F}$, *este deschisă direcţional în* $(\overline{x}, \overline{y})$ *în raport cu* L *şi* M.

Cităm acum din [8, Proposition 3.7] rezultatul de incompatibilitate care arată că o multifuncţie nu poate fi deschisă direcţional în raport cu două mulţimi de direcţii într-un punct de minim direcţional în raport cu mulţimea de direcţii corespunzătoare din direcţiile deschiderii.

Propoziţia 2.1.6 *Dacă* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ *este punct de minim direcţional Pareto local pentru* F *în raport cu* $L \subset S_X$, *atunci oricare ar fi* $M \subset S_Y$ *cu* $M \cap (K \setminus -K) \neq \emptyset$, *multifuncţia* $\widetilde{F}$ *nu este deschisă direcţional în* $(\overline{x}, \overline{y})$ *în raport cu* L *şi* M. *În particular,* F *nu este deschisă direcţional în* $(\overline{x}, \overline{y})$ *în raport cu* L *şi* M.

Demonstrăm mai departe un rezultat conţinând condiţii suficiente de deschidere direcţională cu ipoteze exprimate folosind derivate direcţionale Bouligand. Acest rezultat este o versiune direcţională a unui principiu privind obţinerea deschiderii unei multifuncţii având ca ipoteză o deschidere aproximativă a unei derivate a ei. Pentru a vedea forma originală a acestui principiu, facem trimitere la lucrările lui Penot [47] şi Ursescu [56].

Teorema 2.1.7 *Fie* $F : X \rightrightarrows Y$ *o multifuncţie,* $W \subset X \times Y$ *o mulţime deschisă astfel încât* $\operatorname{Gr} F \cap \operatorname{cl} W$ *este închisă, şi fie* $\emptyset \neq L \subset S_X$, $\emptyset \neq M \subset S_Y$ *mulţimi închise astfel încât* $\operatorname{cone} L$ *şi* $\operatorname{cone} M$ *sunt convexe. Fie* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ *şi presupunem că există* $\lambda > 0$ *astfel încât pentru orice* $(x, y) \in \operatorname{Gr} F \cap W \cap [(\overline{x} + \operatorname{cone} L) \times (\overline{y} - \operatorname{cone} M)]$ *avem*

$$B(0_Y, \lambda) \cap A \subset \operatorname{cl}[D_B^{L,-M} F(x, y)(B(0_X, 1)) + K \cap B(0_Y, 1)], \tag{2.3}$$

unde $A := \operatorname{cone} M - \operatorname{cone} M - K$.

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ *şi orice* $(x, y) \in \operatorname{Gr} F \cap ((\overline{x} + \operatorname{cone} L) \times (\overline{y} - \operatorname{cone} M))$ *astfel încât* $B(x, \varepsilon) \times B(y, (\lambda + 1)\varepsilon) \subset W$, *avem*

$$B(y, \lambda\varepsilon) \cap (\overline{y} - \operatorname{cone} M) \subset F(B(x, \varepsilon) \cap (\overline{x} + \operatorname{cone} L)) + K \cap B(0_Y, \varepsilon).$$

Pe baza celor arătate până acum, formulăm condiţii necesare de optimalitate pentru conceptul de minim direcţional în raport cu o mulţime de direcţii, folosind o versiune direcţională a derivatei Bouligand.

Teorema 2.1.8 *Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi fie $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ un punct de minim direcţional Pareto local pentru F în raport cu $\emptyset \neq L \subset S_X$. Presupunem că $\operatorname{Gr} F$ şi L sunt închise şi $\operatorname{cone} L$ este convexă.*
Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $M \subset S_Y$ astfel încât $M \cap (K \setminus -K) \neq \emptyset$ şi $\operatorname{cone} M$ este convexă, există $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \operatorname{Gr} F \cap ((\overline{x} + \operatorname{cone} L) \times (\overline{y} - \operatorname{cone} M))$, $z_\varepsilon \in B(0_Y, \varepsilon) \cap (\operatorname{cone} M - \operatorname{cone} M - K) \setminus \{0_Y\}$ astfel încât

$$z_\varepsilon \notin \operatorname{cl}[D_B^{L,-M} F(x_\varepsilon, y_\varepsilon)(B(0_X, 1)) + K \cap B(0_Y, 1)].$$

Ilustrăm validitatea acestui rezultat prin următorul exemplu.

Exemplul 2.1.9 Fie $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$, $F(x) = [x, \infty) \times \{0\}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}^2_+$ şi $L = \{1\}$. Se verifică uşor că $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, (0, 0))$ este punct de minim direcţional Pareto local pentru F în raport cu L, în esenţă datorită faptului că $F(x)$ este o submulţime a axei absciselor pentru orice x; toate celelalte ipoteze din Teorema 2.1.8 sunt de asemenea satisfăcute.
Considerăm mulţimea $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ alegem $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = (\overline{x}, \overline{y})$. Din calcul direct obţinem că

$$D_B^{L,-M} F(x_\varepsilon, y_\varepsilon)(u) = \begin{cases} \{(v, 0) \mid v \geq u\}, & \text{if } u \geq 0, \\ \emptyset, & \text{if } u < 0, \end{cases}$$

şi apoi

$$D_B^{L,-M} F(x_\varepsilon, y_\varepsilon)(B(0, 1)) = [0, \infty) \times \{0\}.$$

După aceea, observăm că

$$\operatorname{cl}[D_B^{L,-M} F(x_\varepsilon, y_\varepsilon)(B(0, 1)) + K \cap B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)] = \{(x + a, b) \mid x, a, b \geq 0,\ a^2 + b^2 \leq 1\},$$

şi astfel putem mereu găsi $z_\varepsilon \in B(0_{\mathbb{R}^2}, \varepsilon) \cap (\operatorname{cone} M - \operatorname{cone} M - K) \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\} = B(0_{\mathbb{R}^2}, \varepsilon) \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ astfel încât

$$z_\varepsilon \notin \operatorname{cl}[D_B^{L,-M} F(x_\varepsilon, y_\varepsilon)(B(0, 1)) + K \cap B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)].$$

În continuare vrem să obţinem condiţii de optimalitate pe spaţii duale. Observăm că Teorema 2.1.7 se bazează pe Principiul Variaţional al lui Ekeland aşa că ne propunem să demonstrăm o variantă generalizată a acestui Principiu pe un produs de spaţii Banach în care înlocuim distanţa uzuală pe spaţiul produs $X \times Y$ cu suma dintre o funcţie de timp minimal pe X şi norma pe Y. Vom folosi acest rezultat pentru a obţine condiţii suficiente de regularitate direcţională pe spaţii duale.
Enunţăm acum varianta adaptată a Principiului Variaţional al lui Ekeland.

Teorema 2.1.10 *Fie X şi Y spaţii Banach, $A \subset X \times Y$ o mulţime închisă şi $\emptyset \neq L \subset S_X$ o mulţime închisă astfel încât $\operatorname{cone} L$ este convexă. Considerăm $f : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ o funcţie mărginită inferior şi inferior semicontinuă. Atunci, pentru orice $(x_0, y_0) \in A$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in A$ astfel încât*

$$f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq f(x_0, y_0) - \varepsilon (T_L(x_\varepsilon, x_0) + \|y_\varepsilon - y_0\|) \tag{2.4}$$

şi pentru orice $(x, y) \in A \setminus \{(x_\varepsilon, y_\varepsilon)\}$,

$$f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < f(x, y) + \varepsilon (T_L(x, x_\varepsilon) + \|y_\varepsilon - y\|). \tag{2.5}$$

În continuare propunem şi demonstrăm nişte condiţii suficiente pentru deschiderea direcţională a multifuncţiilor cu ipoteze exprimate cu ajutorul coderivatelor Fréchet. Următorul rezultat este o adaptare a [49, Theorem 2.3] adaptată cadrului nostru: obţinem deschiderea direcţională a multifuncţiei epigraf fără a presupune închiderea acesteia, ci doar închiderea multifuncţiei iniţiale. Acesta este un avantaj întrucât este bineînţeles mai uşor de verificat închiderea unei singure mulţimi decât a unei sume de mulţimi.

Teorema 2.1.11 *Fie X şi Y spaţii finit dimensionale, $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie, $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ şi fie $\emptyset \neq L \subset S_X$ şi $\emptyset \neq M \subset S_Y$ mulţimi închise astfel încât* $\operatorname{cone} L$ *şi* $\operatorname{cone} M$ *sunt convexe. Presupunem că următoarele ipoteze sunt satisfăcute:*

(i) $\operatorname{Gr} F$ *este închis;*

(ii) există $c > 0$, $r > 0$ astfel încât pentru orice $u \in M$ şi $y^* \in K^+$ cu $\langle y^*, u\rangle = 1$ şi pentru orice $z^* \in B(0_Y, 2c)$, $(x, y) \in \operatorname{Gr} F \cap (B(\overline{x}, r) \times B(\overline{y}, r))$ and $x^* \in \widehat{D}^* F(x, y)(y^* + z^*)$, există $w \in L$ astfel încât

$$-\langle x^*, w\rangle \geq c\|y^* + z^*\|.$$

Atunci, există $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $a \in (0, c)$, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon)$ şi pentru orice $(x, y) \in \operatorname{Gr} F \cap (B(\overline{x}, 2^{-1}r) \times B(\overline{y}, 2^{-1}r))$,

$$B(y, \rho a) \cap (y - \operatorname{cone} M) \subset F(B(x, \rho) \cap (x + \operatorname{cone} L)) + K.$$

Următorul rezultat conţine condiţii necesare de optimalitate cu ipoteze exprimate cu ajutorul coderivatei Mordukhovich a multifuncţiei obiectiv. Abordarea noastră implică trecerea la limită într-o condiţie dată de teorema anterioară, lucru care nu este deloc o chestiune evidentă întrucât impune condiţia ca interiorul conului K să fie nevid.

Teorema 2.1.12 *Fie X, Y spaţii finit dimensionale, $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu grafic închis şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. Considerăm o direcţie $u \in (\operatorname{int} K \setminus -K) \cap S_Y$ şi o mulţime închisă de direcţii $L \subset X$ cu $\operatorname{cone} L$ convexă. Presupunem că F este de tip Lipschitz în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$ şi că $(\overline{x}, \overline{y})$ este punct de minim direcţional Pareto local pentru F în raport cu L.*
Atunci, există $x^* \in X^*$, $y^* \in K^+$ cu $\langle x^*, l\rangle \geq 0$ pentru orice $l \in L$ şi $\langle y^*, u\rangle = 1$ astfel încât

$$x^* \in D^* F(\overline{x}, \overline{y})(y^*).$$

Pentru a ilustra condiţiile de optimalitate din acest rezultat propunem următorul exemplu.

Exemplul 2.1.13 Fie $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ dată prin

$$F(x) = \begin{cases} \{(a, a) \mid a \in [-x, 0]\}, & \text{if } x > 0, \\ \{(a, 0) \mid a \in [x, 0]\}, & \text{if } x \leq 0, \end{cases}$$

$K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$, şi considerăm pe $\mathbb{R}^2$ norma euclidiană uzuală. Atunci $(0, (0, 0)) \in \operatorname{Gr} F$ este punct de minim direcţional Pareto local pentru F în raport cu $L = \{-1\}$ şi F este de tip Lipschitz în jurul lui $(0, (0, 0))$. Alegem $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in (\operatorname{int} K \setminus -K) \cap S_{\mathbb{R}^2}$.
Trebuie să găsim $x^* \in \mathbb{R}$, $y^* \in K^+ = \{(0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ astfel încât $x^* l \geq 0$ pentru orice $l \in L$, $\langle y^*, u\rangle = 1$ şi de asemenea că $x^* \in D^* F(0, (0, 0))(y^*)$, sau echivalent, că $(x^*, -y^*) \in N(\operatorname{Gr} F, (0, (0, 0)))$.
Folosind că $\widehat{N}(\operatorname{Gr} F, (a, (b, c))) = -T_B(\operatorname{Gr} F, (a, (b, c)))^+$ pentru $(a, (b, c)) \in \operatorname{Gr} F$, obţinem după câteva calcule, întâi că

$$T_B(\operatorname{Gr} F, (0, (0, 0))) = \{(u, v, v) \mid u \geq 0,\ v \in [-u, 0]\} \cup \{(u, v, 0) \mid u < 0,\ v \in [u, 0]\}$$

şi

$$T_B(\operatorname{Gr} F, (a, (b, c))) = \begin{cases} \{(u, v, v) \mid v \leq 0,\ u \in \mathbb{R}\}, & \text{if } a > 0,\ b = c = 0, \\ \{(u, v, v) \mid -u \leq v,\ u, v \in \mathbb{R}\}, & \text{if } a > 0,\ b = c = -a, \\ \{(u, v, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}, & \text{if } a > 0,\ b = c \in (-a, 0), \\ \{(u, v, 0) \mid u \in \mathbb{R},\ v \leq 0\}, & \text{if } a < 0,\ b = c = 0, \\ \{(u, v, 0) \mid u, v \in \mathbb{R},\ u \leq v\}, & \text{if } a < 0,\ c = 0,\ a = b \\ \{(u, v, 0) \mid u, v \in \mathbb{R}\}, & \text{if } a < 0,\ c = 0,\ b \in (a, 0), \end{cases}$$

iar apoi că

$$\widehat{N}(\operatorname{Gr} F, (0, (0, 0))) = \{(0, q, r) \mid r \in \mathbb{R},\ q \geq 0,\ q + r \geq 0\}$$

şi

$$\widehat{N}(\operatorname{Gr} F, (a, (b, c))) = \begin{cases} \{(0, q, r) \mid q, r \in \mathbb{R},\ q + r \geq 0\}, & \text{if } a > 0,\ b = c = 0, \\ \{(q + r, q, r) \mid q, r \in \mathbb{R},\ q + r \leq 0\}, & \text{if } a > 0,\ b = c = -a, \\ \{(0, q, r) \mid q, r \in \mathbb{R},\ q + r = 0\}, & \text{if } a > 0,\ b = c \in (-a, 0), \\ \{(0, q, r) \mid r \in \mathbb{R},\ q \geq 0\}, & \text{if } a < 0,\ b = c = 0, \\ \{(p, -p, r) \mid r \in \mathbb{R},\ p \geq 0\}, & \text{if } a < 0,\ c = 0,\ a = b, \\ \{(0, 0, r) \mid r \in \mathbb{R}\}, & \text{if } a < 0,\ c = 0,\ b \in (a, 0). \end{cases}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} N(\operatorname{Gr} F, (0, (0, 0))) = &\{(0, q, r) \mid q + r \geq 0\} \cup \{(p, -p, r) \mid p \geq 0,\ r \in \mathbb{R}\} \\ &\cup \{(q + r, q, r) \mid q + r \leq 0\} \cup \{(0, q, r) \mid r \in \mathbb{R}, q \geq 0\}. \end{aligned}$$

Alegem acum $x^* = 0$ şi $y^* = (0, \sqrt{2})$ şi verificăm că într-adevăr are loc concluzia Teoremei 2.1.12.

2.2 Condiții de optimalitate pentru eficiență direcțională cu restricții

În această secţiune obţinem condiţii de optimalitate pentru problema (P) în raport cu noţiunea de minim direcţional din Definiţia 2.1.2 folosind principiul extremal dezvoltat de Kruger şi Mordukhovich (a se vedea [43]). Acest principiu extremal este un analog variaţional al principiului de separare convexă în cadru neconvex, şi ca atare este util în deducerea de condiţii de optimalitate în probleme de optimizare cu restricţii (a se vedea [29], [28]).
Dăm acum definiţia unui sistem extremal.

Definiţia 2.2.1 *Fie Ω_1, $\Omega_2 \subset X$ şi fie $\overline{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Sistemul $\{\Omega_1, \Omega_2, \overline{x}\}$ se numeşte extremal dacă există nişte şiruri convergente $a_{1n}, a_{2n} \to 0$ pentru $n \to \infty$ şi U o vecinătate a lui $\overline{x}$ astfel încât*

$$(\Omega_1 - a_{1n}) \cap (\Omega_2 - a_{2n}) \cap U = \emptyset, \ \forall n.$$

Punctul $\overline{x}$ se numeşte punct extremal local pentru sistemul de mulţimi $\{\Omega_1, \Omega_2\}$.

Rezultatul obţinut în continuare este o extindere directă a Teoremei 3.7 din [8] în cazul eficienţei direcţionale Pareto în raport cu două mulţimi de direcţii.

Teorema 2.2.2 *Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie între spaţiile Asplund X şi Y, K cu interior nevid, $L \subset S_X$ şi $M \subset S_Y$ două mulţimi închise cu $\mathrm{cone}M$ convexă şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}F$. Presupunem că F este de tip Lipschitz în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$, Ω şi $(\overline{x} + \mathrm{cone}L)$ sunt aliate în $\overline{x}$, $K \cap \mathrm{cone}M$ este (SNC) în 0_Y, $\mathrm{int}K \cap \mathrm{cone}M \neq \emptyset$ şi $(\overline{x}, \overline{y})$ este punct de minim direcţional Pareto local slab pentru F pe Ω în raport cu mulţimile de direcţii L şi M.*
Atunci există $y^* \in (K \cap \mathrm{cone}M)^+ \setminus \{0_{Y^*}\}$ astfel încât

$$0_{X^*} \in D^*F(\overline{x}, \overline{y})(y^*) + N(\Omega, \overline{x}) + N(\mathrm{cone}L, 0_X).$$

În continuare dăm un exemplu simplu pentru a justifica validitatea acestui rezultat.

Exemplul 2.2.3 Fie $F : [0, \infty) \rightrightarrows [0, \infty)$, $F(x) = [x, x + 1]$, $L = M = \{1\}$, $K = [0, \infty)$, $\Omega = [0, 1]$ şi $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, 0)$. Este uşor de verificat că toate ipotezele teoremei anterioare sunt împlinite pentru aceste alegeri şi, în final, verificarea concluziei se reduce la găsirea unui element $y^* \in (K \cap \mathrm{cone}\, M)^+ \setminus \{0\} = (0, \infty)$ astfel încât

$$(0, -y^*) \in N(\mathrm{Gr}\, F, (0, 0)).$$

Or, datorită faptului că $\mathrm{Gr}\, F$ este convex, asta revine mai departe la a găsi un $y^* \in (0, \infty)$ astfel încât

$$y^* \cdot y \geq 0$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$ şi orice $y \in [x, x + 1]$, ceea ce este evident adevărat.

Observaţia 2.2.4 *Observăm că în cazul $M = S_Y$, rezultatul de mai sus este asemănător Teoremei 3.7 din [8], acolo fiind tratat cazul minimalităţii tari. Mai mult, dacă F este o funcţie şi atât L cât şi M sunt sferele unitate din X, respectiv Y, adică dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ este punct de minim Pareto local clasic pentru $F := f$, atunci rezultatul nostru revine la condiţia de optimalitate standard ca $0_{X^*} \in \partial(v^* \circ f)(\overline{x}) + N(\Omega, \overline{x})$ pentru un multiplicator nenul şi pozitiv $v^* \in K^+ \setminus \{0_{Y^*}\}$.*

2.3 Stabilitate pentru deschiderea direcțională și consecințe

Amintim din [20] o noţiune de continuitate Aubin direcţională pentru o multifuncţie în raport cu două mulţimi de direcţii. Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie, $\emptyset \neq L \subset S_X$, $\emptyset \neq M \subset S_Y$, $\alpha > 0$ şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}F$.

Definiţia 2.3.1 *Spunem că F este $\alpha-$direcţional Aubin continuă în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu L şi M dacă există nişte vecinătăţi U pentru $\overline{x}$ şi V pentru $\overline{y}$ astfel încât pentru orice $x, u \in U$,*

$$e_M(F(x) \cap V, F(u)) \leq \alpha \cdot T_L(u, x).$$

Această noţiune este echivalentă cu două noţiuni de deschidere direcţională şi regularitate metrică direcţională a unei multifuncţii în raport cu două mulţimi de direcţii (a se vedea [20, Proposition 2.4]).
Introducem acum o noţiune de deschidere direcţională a lui F mai slabă decât cea menţionată anterior, în raport cu direcţiile L şi M, dar şi în raport cu conul K din spaţiul Y. Pe lângă α, mai considerăm o constantă pozitivă $\beta > 0$.

Definiţia 2.3.2 *Spunem că F este $(\alpha, \beta)-$direcţional deschisă în $(\overline{x}, \overline{y})$ în raport cu direcţiile (L, M) şi conul K dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon)$ are loc următoarea relaţie:*

$$B(\overline{y}, \alpha\rho) \cap (\overline{y} - \mathrm{cone}M) \subset F(B(\overline{x}, \rho) \cap (\overline{x} + \mathrm{cone}L)) + K \cap B(0_Y, \beta\rho).$$

În această secţiune urmărim două scopuri. Primul este de a demonstra că suma dintre o multifuncţie direcţional deschisă în raport cu (L, M) şi K şi o multifuncţie direcţional Aubin continuă în raport cu S_X şi M, în orice punct din graficele lor, este de asemenea o multifuncţie direcţional deschisă în orice punct din grafic în raport cu (L, M) şi K, cu alte constante. Această stabilitate o demonstrăm atât global cât şi într-o variantă locală. Al doilea scop este de a obţine condiţii de optimalitate pentru problema (P) în cazul în care $\Omega = X$.
Primul rezultat din această secţiune se referă la conservarea deschiderii direcţionale în raport cu (L, M) şi K la perturbări pseudo-Lipschitz direcţionale în cazul global. Pentru rezultate similare facem trimitere la lucrările [12], [22], [55] şi [60]. De fapt, rezultatul nostru este o versiune direcţională a Teoremei 4.1 din [22]. Principalele instrumente tehnice pe care le folosim în rezultatul anunţat sunt funcţia de timp minimal direcţională definită în (1.2) şi varianta adaptată a Principiului Variaţional al lui Ekeland formulată în Teorema 2.1.10.

Teorema 2.3.3 *Fie $F, G : X \rightrightarrows Y$ două multifuncţii cu* $\mathrm{Gr}F$ *şi* $\mathrm{Gr}G$ *local închise. Fie* $\emptyset \neq L \subset S_X$, $\emptyset \neq M \subset S_Y$ *două mulţimi închise de direcţii cu* $\mathrm{cone}L$ *şi* $\mathrm{cone}M$ *convexe. Presupunem că* $\mathrm{Dom}(F+G)$ *este nevid şi fie* α, β, γ *constante pozitive cu* $\beta < \alpha$. *Dacă* F *este* $(\alpha, \gamma)-$*direcţional deschisă în raport cu* (L, M) *şi* K *în orice punct din graficul său şi* G *este* $\beta-$*direcţional Aubin continuă în orice punct din graficul său în raport cu* S_X *şi* M, *atunci* $F+G$ *este* $\left(2^{-1}(\alpha-\beta), \gamma\right)-$*direcţional deschisă în raport cu* (L, M) *şi* K *în orice punct din graficul său.*

Pentru a obţine o versiune locală a acestei teoreme, demonstrăm întâi următorul rezultat intermediar.

Teorema 2.3.4 *Fie $F, G : X \rightrightarrows Y$ două multifuncţii cu* $\mathrm{Gr}F$ *şi* $\mathrm{Gr}G$ *local închise. Fie* $L \subset S_X$, $M \subset S_Y$ *două mulţimi nevide închise de direcţii cu* $\mathrm{cone}L$ *şi* $\mathrm{cone}M$ *convexe. Presupunem că* $\mathrm{Dom}(F+G)$ *este nevid şi* α, β, γ *sunt constante pozitive cu* $\beta < \alpha$. *Dacă* F *este* $(\alpha, \gamma)-$*direcţional deschisă în raport cu* (L, M) *şi* K *în jurul lui* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}F$ *şi* G *este* $\beta-$*direcţional Aubin continuă în jurul lui* $(\overline{x}, \overline{z}) \in \mathrm{Gr}G$ *în raport cu* S_X *şi* M, *atunci există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât pentru orice* $(x, y, z) \in B(\overline{x}, \varepsilon) \times B(\overline{y}, \varepsilon) \times B(\overline{z}, \varepsilon)$ *cu* $y \in F(x)$ *şi* $z \in G(x)$, *şi pentru orice* $\rho \in (0, \varepsilon)$, *avem*

$$B(y+z, 2^{-1}(\alpha-\beta)\rho) \cap (y+z-\mathrm{cone}M) \subset (F+G)(B(x,\rho) \cap (x+\mathrm{cone}L)) + K \cap B(0_Y, \gamma\rho).$$

Mai departe, pentru a obţine din rezultatul intermediar stabilitatea locală pentru suma multifuncţiilor F şi G, folosim următoarea noţiune de stabilitate la sumă a perechii (F, G) (a se vedea [22]).

Definiţia 2.3.5 *Fie* $F, G : X \rightrightarrows Y$ *două multifuncţii şi fie* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in X \times Y \times Y$. *Perechea* (F, G) *se numeşte local stabilă la sumă în jurul lui* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(\overline{x}, \delta)$ *şi orice* $w \in (F+G)(x) \cap B(\overline{y}+\overline{z}, \delta)$ *există* $y \in F(x) \cap B(\overline{y}, \varepsilon)$ *şi* $z \in G(x) \cap B(\overline{z}, \varepsilon)$ *astfel încât* $w = y + z$.

Corolarul 2.3.6 *Fie $F, G : X \rightrightarrows Y$ două multifuncţii cu* $\mathrm{Gr}F$ *şi* $\mathrm{Gr}G$ *local închise. Fie* $L \subset S_X$, $M \subset S_Y$ *două mulţimi nevide închise de direcţii cu* $\mathrm{cone}L$ *şi* $\mathrm{cone}M$ *convexe. Presupunem că* $\mathrm{Dom}(F+G)$ *este nevid şi* α, β, γ *sunt constante pozitive cu* $\beta < \alpha$. *Dacă* F *este* $(\alpha, \gamma)-$*direcţional deschisă în raport cu* (L, M) *şi* K *în jurul lui* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{Gr}F$ *şi* G *este* $\beta-$*direcţional Aubin continuă în jurul lui* $(\overline{x}, \overline{z}) \in \mathrm{Gr}G$ *în raport cu* S_X *şi* M, *şi perechea* (F, G) *este local stabilă la sumă în jurul lui* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, *atunci* $F+G$ *este* $(2^{-1}(\alpha-\beta), \gamma)-$*direcţional deschisă în raport cu* (L, M) *şi* K *în jurul lui* $(\overline{x}, \overline{y}+\overline{z})$.

Pentru al doilea scop al acestei secţiuni care se referă la obţinerea de condiţii de optimalitate pentru problema fără restricţii (P), folosim condiţiile suficiente pentru deschidere direcţională din Teorema 2.1.11. Condiţiile de optimalitate pe care le propunem în continuare sunt bazate pe incompatibilitatea dintre deschidere şi minimalitate, însă ipotezele nu se referă la un punct de minim pentru multifuncţia obiectiv F, ci la un şir de puncte minimale pentru un şir de perturbaţii ale lui F. Astfel, demonstrăm de fapt că limita unui astfel de şir de puncte minimale este un punct critic pentru F.

Teorema 2.3.7 *Fie X şi Y spaţii finit-dimensionale şi $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie perturbată de şirul de multifuncţii $G_n : X \rightrightarrows Y$, $n \in \mathbb{N}$. Fie $L \subset S_X$ o mulţime închisă nevidă cu* $\operatorname{cone} L$ *convexă şi fie $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ limita unui şir de puncte de minim direcţional Pareto locale $(x_n, y_n) \in \operatorname{Gr}(F + G_n)$ pentru $F + G_n$ în raport cu direcţiile din L. Presupunem că au loc următoarele:*

(i) *$K \subset Y$, $K \neq Y$, este un con convex solid închis şi $u \in S_Y \cap \operatorname{int} K$;*

(ii) $\operatorname{Gr} F$ *este închis şi pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,* $\operatorname{Gr} G_n$ *este local închis în jurul tuturor punctelor apropiate de $(\overline{x}, 0_Y)$;*

(iii) *F este de tip Lipschitz în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$ şi pentru orice n există $\beta_n > 0$ cu $\beta_n \to 0$ astfel încât G_n este β_n-direcţional Aubin continuă în raport cu S_X şi $\{u\}$ în jurul tuturor punctelor din graficul său apropiate de $(\overline{x}, 0_Y)$;*

(iv) *pentru orice n, perechea (F, G_n) este local stabilă la sumă în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}, 0_Y)$.*

Atunci, există $x^* \in X^*$, $y^* \in K^+$ cu $\langle x^*, l \rangle \geq 0$ pentru orice $l \in L$ şi $\langle y^*, u \rangle = 1$ astfel încât

$$x^* \in D^* F(\overline{x}, \overline{y})(y^*). \tag{2.6}$$

Observaţia 2.3.8 *Acest rezultat poate fi văzut ca o generalizare a Propoziţiei 3.7 din [8], în sensul că demonstrăm nu doar că o multifuncţie nu poate fi direcţional deschisă într-un punct de minim direcţional, ci nu poate fi deschisă în punctul limită al unui şir de minime direcţionale ale unor perturbări ale ei de tip Lipschitz.*

2.4 Condiții metrice slabe pe mulțimi și consecințe

În această secţiune propunem o inegalitate metrică cu scopul de a răspunde la următoarea chestiune: dacă avem o problemă de optimizare cu restricţii inegalitate şi apoi aceeaşi problemă la care mai adăugăm o inegalitate la restricţii, cum putem găsi o legătură între condiţiile de calificare necesare pentru a scrie condiţii de optimalitate pentru cele două probleme atât de legate între ele? Demonstrăm că această condiţie metrică pe care o introducem ca răspuns la întrebarea de mai sus este folositoare şi pentru alte tipuri de probleme de optimizare şi pentru unele rezultate de penalizare de tip Clarke. În final folosim această condiţie şi pentru a scrie nişte condiţii de optimalitate pentru conceptul de eficienţă direcţională studiat în această lucrare.

Începem prin a ilustra în cazul unei probleme de optimizare netedă chestiunea principală de care ne ocupăm în această secţiune. Fie X un spaţiu liniar normat şi fie $f, g : X \to \mathbb{R}$ două funcţii diferenţiabile. Considerăm problema de optimizare standard

$$\min f(x), \text{ subject to } g(x) \leq 0,$$

şi fie $\overline{x} \in X$ un minim local pentru această problemă, în sensul că există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(\overline{x})$ astfel încât pentru orice $x \in U$ avem $g(x) \leq 0$ şi $f(\overline{x}) \leq f(x)$. Condiţia de optimalitate de ordinul întâi se scrie astfel

$$\nabla f(\overline{x})(u) \geq 0, \ \forall u \in T_B(M_g, \overline{x}), \tag{2.7}$$

unde

$$M_g := \{x \in X \mid g(x) \leq 0\}$$

este mulţimea punctelor fezabile. Observăm că este important să descriem conul $T_B(M_g, \overline{x})$. Sigur, dacă restricţia nu este activă în punctul fezabil $\overline{x}$ (adică $g(\overline{x}) < 0$), atunci $T_B(M_g, \overline{x}) = X$ şi (2.7) devine $\nabla f(\overline{x}) = 0_{X^*}$ (Teorema Fermat).
În caz contrar, dacă restricţia este activă în $\overline{x}$, i.e., $g(\overline{x}) = 0$, trebuie să presupunem că $\nabla g(\overline{x}) \neq 0_{X^*}$ pentru a obţine că

$$T_B(M_g, \overline{x}) = T_U(M_g, \overline{x}) = \operatorname{cl} T_{DM}(M_g, \overline{x}) = \{u \in X \mid \nabla g(\overline{x})(u) \leq 0\}. \tag{2.8}$$

Pentru a arăta acest lucru, observăm întâi că

$$\operatorname{cl} T_{DM}(M_g, \overline{x}) \subset T_U(M_g, \overline{x}) \subset T_B(M_g, \overline{x}).$$

Fie acum $u \in T_B(M_g, \overline{x})$, însemnând că există $t_n \to 0^+, u_n \to u$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$g\left(\overline{x} + t_n u_n\right) \leq 0.$$

Întrucât g este diferenţiabilă, există $v_n \to 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$g\left(\overline{x} + t_n u_n\right) = g(\overline{x}) + t_n \nabla g(\overline{x})(u_n) + t_n v_n,$$

deci,

$$t_n\left(\nabla g(\overline{x})(u_n) + v_n\right) \leq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Astfel, trecând la limită în relaţia $\nabla g(\overline{x})(u_n) + v_n \leq 0$, obţinem că $\nabla g(\overline{x})(u) \leq 0$.
Luăm acum $u \in X$ astfel încât $\nabla g(\overline{x})(u) < 0$. Un astfel de element există pentru că $\nabla g(\overline{x}) \neq 0_{X^*}$. Luăm $t_n \to 0^+$ şi $u_n \to u$. Din nou, folosind diferenţiabilitatea lui g, există $v_n \to 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g\left(\overline{x} + t_n u_n\right) &= g(\overline{x}) + t_n \nabla g(\overline{x})(u_n) + t_n v_n \\ &= t_n\left(\nabla g(\overline{x})(u_n) + v_n\right). \end{aligned}$$

Întrucât $\nabla g(\overline{x})(u) < 0$ şi $u_n \to u$, pentru orice n destul de mare, $\nabla g(\overline{x})(u_n) + v_n < 0$, deci $g\left(\overline{x} + t_n u_n\right) < 0$. Asta înseamnă că $\overline{x} + t_n u_n \in M_g$ şi obţinem că $u \in T_{DM}(M_g, \overline{x})$.
Fie acum $v \in X$ astfel încât $\nabla g(\overline{x})(v) \leq 0$, $u \in X$ astfel încât $\nabla g(\overline{x})(u) < 0$ şi $\lambda \in (0, 1)$.
În mod clar

$$\nabla g(\overline{x})(\lambda u + (1 - \lambda)v) < 0,$$

de unde, din pasul anterior, $\lambda u + (1 - \lambda)v \in T_{DM}(M_g, \overline{x})$. Trecând la limită cu $\lambda \to 0$, obţinem că $v \in \operatorname{cl} T_{DM}(M_g, \overline{x})$, şi toate incluziunile sunt demonstrate.
Vrem să subliniem că ipoteza esenţială pentru a obţine (2.8) este ca $\nabla g(\overline{x}) \neq 0_{X^*}$.

Acum, pentru $g(\overline{x}) = 0$, condiţia (2.7) devine

$$\nabla f(\overline{x})(u) \geq 0, \text{ subject to } \nabla g(\overline{x})(u) \leq 0,$$

care poate fi interpretată ca faptul că 0_X este punct optimal pentru problema liniară

$$\min \nabla f(\overline{x})(u), \text{ subject to } \nabla g(\overline{x})(u) \leq 0.$$

Apoi, pentru că pentru probleme liniare nu este nevoie de condiţii de calificare pentru a aplica Teorema Karush-Kuhn-Tucker, există $\lambda \geq 0$ astfel ca

$$\nabla f(\overline{x}) + \lambda \nabla g(\overline{x}) = 0.$$

Pentru funcţia scalară g, condiţia $\nabla g(\overline{x}) \neq 0_{X^*}$ este echivalentă cu bine-cunoscuta condiţie de calificare Mangasarian-Fromowitz, condiţie pe care o amintim în cadru mai general în continuare.
Considerăm un sistem general de restricţii $h(x) \leq 0_{\mathbb{R}^n}$, unde $h : X \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie de clasă C^1 şi $h(x) \leq 0_{\mathbb{R}^n}$ înseamnă că $h_i(x) \leq 0$ pentru orice $i \in \overline{1,n}$. Condiţia Mangasarian-Fromowitz în $\overline{x}$ când h este activă în $\overline{x}$ este:

$$\exists u \in X : \nabla h(\overline{x})(u) < 0, \tag{MFCQ}$$

însemnând că $\nabla h_i(\overline{x})(u) < 0$ pentru orice $i \in \overline{1,n}$. Este de asemenea bine-cunoscut (a se vedea [6]) că (MFCQ) este echivalentă cu regularitatea metrică în jurul lui $(\overline{x}, 0_{\mathbb{R}^n})$ a multifuncţiei $\widetilde{h} : X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dată prin

$$\widetilde{h}\,(x) := h\,(x) + \mathbb{R}^n_+.$$

Observăm că $(\overline{x}, 0_{\mathbb{R}^n}) \in \operatorname{Gr} \widetilde{h}$. Notăm această condiţie de regularitate metrică prin (MRCQ). Condiţiile (MFCQ) şi (MRCQ) sunt echivalente (a se vedea [51]).
Amintim că o multifuncţie $F : X \rightrightarrows Y$ între două spaţii vectoriale normate se numeşte metric subregulată într-un punct $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ dacă există $r, \alpha > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(\overline{x}, r)$ are loc

$$d(x, F^{-1}(\overline{y})) \leq \alpha d(\overline{y}, F(x)).$$

Sunt multe lucrări în literatura de specialitate care accentuează faptul că subregularitatea metrică este suficientă pentru a valida multe rezultate în optimizare şi, în particular, poate înlocui regularitatea metrică în condiţii de calificare (a se vedea [35], [59] şi referinţele conţinute acolo). De exemplu, în contextul discutat aici, condiţia de calificare de subregularitate metrică (pe scurt, (MSCQ)) introdusă în [31] şi studiată pe larg în multe lucrări (a se vedea [30] şi referinţele de acolo) revine la a spune că multifuncţia $\widetilde{h}$ este metric subregulată în $(\overline{x}, 0_{\mathbb{R}^n})$; adică (MSCQ) se referă la subregularitatea metrică a multifuncţiei epigraf asociate cu sistemul de restricţii de tip inegalitate.

Continuăm prezentarea noastră prin adăugarea unei noi restricţii inegalitate. Astfel, presupunem că restricţiile sunt exprimate printr-o funcţie $g = (g_1, g_2) : X \to \mathbb{R}^2$. Fie

$\overline{x}$ un punct fezabil. În cazul în care ambele restricţii sunt active, adică $g(\overline{x}) = 0_{\mathbb{R}^2}$, condiţia Mangasarian-Fromowitz spune că există $u \in X$ astfel încât $\nabla g_1(\overline{x})(u) < 0$ şi $\nabla g_2(\overline{x})(u) < 0$. Această condiţie asigură că

$$\begin{aligned} T_B(M_g, \overline{x}) &= T_U(M_g, \overline{x}) = \operatorname{cl} T_{DM}(M_g, \overline{x}) \\ &= \{u \in X \mid \nabla g_1(\overline{x})(u) \leq 0, \nabla g_2(\overline{x})(u) \leq 0\}. \end{aligned}$$

În particular, asta înseamnă că

$$T_B(M_g, \overline{x}) = T_B(M_{g_1}, \overline{x}) \cap T_B(M_{g_2}, \overline{x})$$

şi, de fapt, asta este relaţia esenţială pentru a obţine, cu aceeaşi justificare ca în cazul unei singure restricţii, că există $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ astfel încât

$$\nabla f(\overline{x}) + \lambda_1 \nabla g_1(\overline{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\overline{x}) = 0.$$

Dacă adăugăm încă o restricţie, adică dacă vom avea $g = (g_1, g_2, g_3) : X \to \mathbb{R}^3$, atunci pentru o soluţie optimală $\overline{x}$, dacă noua restricţie este şi ea activă, condiţia Mangasarian-Fromowitz (există $u \in X$ astfel încât $\nabla g_i(\overline{x})(u) < 0$ pentru $i \in \overline{1,3}$) asigură, în mod similar, că

$$T_B(M_g, \overline{x}) = \bigcap_{i=1}^{3} T_B(M_{g_i}, \overline{x}),$$

şi apoi că există $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ astfel încât

$$\nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) = 0.$$

Prin urmare, conform celor de mai sus, de fiecare dată când adăugăm o restricţie activă în punctul fezabil $\overline{x}$, trebuie să impunem condiţia Mangasarian-Fromowitz pentru a obţine condiţiile necesare de optimalitate. Ideea noastră este că această condiţie Mangasarian-Fromowitz scrisă pentru întregul sistem de restricţii este mai tare decât aceeaşi condiţie scrisă pentru fiecare restricţie în parte şi ca atare, ne propunem să prezentăm o situaţie în care putem înlocui condiţia Mangasarian-Fromowitz generală cu cea scrisă pentru fiecare restricţie în parte, în prezenţa unei ipoteze suplimentare.
Considerăm din nou situaţia în care $g = (g_1, g_2) : X \to \mathbb{R}^2$. Presupunem că $g_1(\overline{x}) = 0$, $g_2(\overline{x}) = 0$, $\nabla g_1(\overline{x}) \neq 0$ şi $\nabla g_2(\overline{x}) \neq 0$. Analizând din nou argumentele de mai sus, observăm că

$$\begin{aligned} T_B(M_g, \overline{x}) &\subset T_B(M_{g_1}, \overline{x}) \cap T_B(M_{g_2}, \overline{x}) = T_U(M_{g_1}, \overline{x}) \cap T_B(M_{g_2}, \overline{x}) \\ &= T_B(M_{g_1}, \overline{x}) \cap T_U(M_{g_2}, \overline{x}) = T_U(M_{g_1}, \overline{x}) \cap T_U(M_{g_2}, \overline{x}). \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, (MFCQ) se foloseşte tocmai pentru a arăta că incluziunile inverse din relaţia de mai sus sunt adevărate. În următorul rezultat introducem în mod natural o condiţie metrică care implică incluziunile dorite. Vom vedea mai apoi că această condiţie este de fapt o condiţie de subtransversalitate pe mulţimi studiată în profunzime de mai mulţi autori.

Teorema 2.4.1 *Fie X un spaţiu vectorial normat şi $M_1, M_2 \subset X$ două mulţimi închise. Fie $\overline{x} \in M_1 \cap M_2$. Presupunem că are loc următoarea ipoteză de regularitate: există $s > 0, \mu > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(\overline{x}, s) \cap M_1$,*

$$d(x, M_1 \cap M_2) \leq \mu d(x, M_2). \tag{MC}$$

Atunci

$$\begin{array}{l} T_B(M_1, \overline{x}) \cap T_U(M_2, \overline{x}) \subset T_B(M_1 \cap M_2, \overline{x}) \\ T_U(M_1, \overline{x}) \cap T_B(M_2, \overline{x}) \subset T_B(M_1 \cap M_2, \overline{x}) \\ T_U(M_1, \overline{x}) \cap T_U(M_2, \overline{x}) = T_U(M_1 \cap M_2, \overline{x}). \end{array} \tag{CHIP}$$

Observaţia 2.4.2 *Observăm că dacă X este finit dimensional, condiţia (MC) implică şi următoarea afirmaţie, mai tare decât cea de mai sus: pentru orice $u \in T_B(M_1, \overline{x})$ şi $v \in T_U(M_2, \overline{x})$, există $w \in T_B(M_1 \cap M_2, \overline{x})$ astfel încât*

$$\|w - u\| \leq \mu \|v - u\|.$$

Inegalitatea metrică (MC) şi teorema de mai sus conduc la două consecinţe pentru sistemele cu restricţii multiple considerate la începutul acestei secţiuni.

Corolarul 2.4.3 *Fie $g = (g_1, g_2) : X \to \mathbb{R}^2$ diferenţiabilă şi considerăm $\overline{x} \in X$ astfel încât $g_1(\overline{x}) = g_2(\overline{x}) = 0$ şi $\nabla g_1(\overline{x}) \neq 0, \nabla g_2(\overline{x}) \neq 0$. Dacă există $s > 0, \mu > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(\overline{x}, s) \cap M_{g_1}$,*

$$d(x, M_{g_1} \cap M_{g_2}) \leq \mu d(x, M_{g_2}),$$

atunci

$$T_B(M_g, \overline{x}) = \{u \in X \mid \nabla g(\overline{x})(u) \leq 0\}.$$

Corolarul 2.4.4 *Fie $g = (g_1, g_2, g_3) : X \to \mathbb{R}^3$ diferenţiabilă şi considerăm $\overline{x} \in X$ astfel încât $g_i(\overline{x}) = 0$ şi $\nabla g_i(\overline{x}) \neq 0$ pentru $i \in \overline{1,3}$. Dacă există $s, t, \mu, \gamma > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(\overline{x}, s) \cap M_{g_1}$,*

$$d(x, M_{g_1} \cap M_{g_2}) \leq \mu d(x, M_{g_2}),$$

şi pentru orice $x \in B(\overline{x}, t) \cap M_{g_1} \cap M_{g_2}$,

$$d(x, M_{g_1} \cap M_{g_2} \cap M_{g_3}) \leq \gamma d(x, M_{g_3}),$$

atunci

$$T_B(M_g, \overline{x}) = \{u \in X \mid \nabla g(\overline{x})(u) \leq 0\}.$$

Ne continuăm prezentarea cu unele consecinţe ale condiţiei metrice discutate mai sus în câteva probleme de optimizare. Dăm de asemenea nişte condiţii asemănătoare care pot fi folosite în diverse contexte. Primul rezultat conţine condiţii necesare şi suficiente de optimalitate pentru conceptul de minim direcţional Pareto în raport cu o mulţime de direcţii, în cazul scalar.

Fie o funcţie scalară $f : X \to \mathbb{R}$; amintim că derivata direcţională superioară Hadamard pentru f în $\overline{x} \in X$ pe direcţia $u \in X$ este

$$d_+ f(\overline{x}, u) = \limsup_{u' \to u, t \to 0^+} t^{-1}(f(\overline{x} + tu') - f(\overline{x})),$$

iar derivata direcţională inferioară Hadamard pentru f în $\overline{x} \in X$ pe direcţia $u \in X$ este

$$d_- f(\overline{x}, u) = \liminf_{u' \to u, t \to 0^+} t^{-1}(f(\overline{x} + tu') - f(\overline{x})).$$

Propoziţia 2.4.5 *Fie $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie, $A \subset X$, $L \subset S_X$ mulţimi închise nevide şi $\overline{x} \in A$. Presupunem că există $s > 0, \mu > 0$ astfel încât*

$$\forall x \in B(\overline{x}, s) \cap A : d(x, A \cap (\overline{x} + \operatorname{cone} L)) \leq \mu d(x, \overline{x} + \operatorname{cone} L). \tag{2.9}$$

(i) Dacă $\overline{x}$ este minim direcţional Pareto local pentru f pe A în raport cu L, atunci $d_+ f(\overline{x}, u) \geq 0$ pentru orice $u \in T_B(A, \overline{x}) \cap L$.

(ii) Mai mult, dacă X este finit dimensional şi $d_- f(\overline{x}, u) > 0$ pentru orice $u \in T_B(A, \overline{x}) \cap L$, atunci există $\alpha > 0$ astfel încât $\overline{x}$ este minim direcţional Pareto local pentru $f(\cdot) - \alpha \|\cdot - \overline{x}\|$ pe A în raport cu L.

Amintim (a se vedea [18]) că o funcţie $f : X \to Y$ este metric subregulată în $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ în raport cu $A \subset X$ dacă $\overline{x} \in A$ şi există $s > 0$, $\mu > 0$ astfel încât pentru orice $u \in B(\overline{x}, s) \cap A$,

$$d(u, f^{-1}(f(\overline{x})) \cap A) \leq \mu \|f(\overline{x}) - f(u)\|.$$

Folosind aproximativ aceeaşi tehnică de mai sus pentru adăugarea unei noi restricţii la un sistem iniţial de restricţii, formulăm în continuare un rezultat auxiliar pentru scopul principal al acestei secţiuni care este obţinerea de condiţii de optimalitate pentru conceptul de minim direcţional în raport cu două mulţimi de direcţii.

Lema 2.4.6 *Fie X, Y spaţii Banach, $f : X \to Y$ o funcţie diferenţiabilă, $M \subset S_Y$ o mulţime închisă nevidă, şi $\overline{x} \in X$. Presupunem că are loc unul din următoarele seturi de ipoteze: (i) $\operatorname{cone} M$ este convexă şi există $u_0 \in X$ astfel încât $\nabla f(\overline{x})(u_0) \in -\operatorname{int}(\operatorname{cone} M)$;*

(ii) funcţia $g : X \times Y \to Y$ dată de $g(x, y) = f(x) - y$ este metric subregulaă în $(\overline{x}, f(\overline{x}), 0_Y)$ în raport cu $X \times (f(\overline{x}) - \operatorname{cone} M)$.

Atunci

$$T_B(f^{-1}(f(\overline{x}) - \operatorname{cone} M), \overline{x}) = \nabla f(\overline{x})^{-1}(-\operatorname{cone} M). \tag{2.10}$$

Folosind acest rezultat şi în mod esenţial funcţionala de scalarizare Gerstewitz (Tammer), obţinem în continuare condiţii de optimalitate pentru minimul direţional în raport cu două direcţii.

Teorema 2.4.7 *Fie X, Y spaţii Banach, $f : X \to Y$ o funcţie diferenţiabilă, $K \subset Y$ un con convex închis cu interior nevid, $A \subset X$, $L \subset S_X$ şi $M \subset S_Y$ mulţimi închise nevide, şi $\overline{x} \in A$. Presupunem că există $s, \mu, t, \gamma > 0$ astfel încât*

$$d(x, A \cap (\overline{x} + \operatorname{cone} L)) \leq \mu d(x, \overline{x} + \operatorname{cone} L),\ \forall x \in B(\overline{x}, s) \cap A,$$

şi

$$d(x, A \cap (\overline{x} + \text{cone}L) \cap f^{-1}(f(\overline{x}) - \text{cone}M)) \leq \gamma d(x, f^{-1}(f(\overline{x}) - \text{cone}M)),$$
$$\forall x \in B(\overline{x}, t) \cap A \cap (\overline{x} + \text{cone}\, L).$$

Presupunem de asemenea că (i) *sau* (ii) *din Lema 2.4.6 are loc şi* $\overline{x}$ *este minim direcţional Pareto local slab pentru* f *pe* A *în raport cu* L *şi* M*.*
Atunci

$$\nabla f(\overline{x})(u) \notin -\operatorname{int} K,\ \ \forall u \in T_B(A, \overline{x}) \cap \text{cone}L \cap \nabla f(\overline{x})^{-1}(-\text{cone}M).$$

În continuare prezentăm câteva rezultate de penalizare în care se vede utilitatea unor condiţii metrice de tipul (MC).

Teorema 2.4.8 (penalizarea unei intersecţii de mulţimi) *Fie* $f : X \to \mathbb{R}$ *o funcţie şi* $A, B \subset X$ *mulţimi închise nevide. Fie* $\overline{x} \in A \cap B$ *punct de minim local pentru* f *pe* $A \cap B$*. Presupunem că*
(i) există $\varepsilon > 0$ *şi* $\ell > 0$ *astfel încât* f *este* $\ell-$*Lipschitz pe* $B(\overline{x}, \varepsilon)$*;*
(ii) există $s > 0, \mu > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(\overline{x}, s) \cap A$*,*

$$d(x, A \cap B) \leq \mu d(x, B).$$

Atunci $\overline{x}$ *este punct de minim local pentru* $f + \ell\mu d(\cdot, B)$ *pe* A *şi punct de minim local (fără restricţii) pentru*

$$f + \ell\,(1 + \mu)\, d(\cdot, A) + \ell\mu d(\cdot, B). \tag{2.11}$$

Folosim acest rezultat de penalizare pentru a obţine condiţii necesare de optimalitate în spaţiul dual pentru minime direcţionale, în cazul scalar.

Corolarul 2.4.9 *Fie* X *un spaţiu Asplund,* $f : X \to \mathbb{R}$ *o funcţie,* $A \subset X$*,* $L \subset S_X$ *mulţimi închise nevide şi* $\overline{x} \in A$*. Presupunem că:*
(i) $\overline{x}$ *este minim direcţional Pareto local pentru* f *pe* A *în raport cu* L*;*
(ii) există $\varepsilon > 0$ *şi* $\ell > 0$ *astfel încât* f *este* $\ell-$*Lipschitz on* $B(\overline{x}, \varepsilon)$*;*
(iii) există $s > 0, \mu > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(\overline{x}, s) \cap A$*,*

$$d(x, A \cap (\overline{x} + \text{cone}\, L)) \leq \mu d(x, \overline{x} + \text{cone}\, L).$$

Atunci există $u^* \in N(A, \overline{x}), v^* \in N(\text{cone}\, L, 0)$ *cu* $\|u^*\| \leq \ell\,(1 + \mu)$ *şi* $\|v^*\| \leq \ell\mu$*, astfel încât*

$$-u^* - v^* \in \partial f(\overline{x}).$$

Ilustrăm acest rezultat prin următorul exemplu.

Exemplul 2.4.10 Fie $X := \mathbb{R}^2$, $A := [0,1]^2$, $L := S_{\mathbb{R}^2} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \geq 0\}$. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2y - x$. Evident, $(0, 0)$ este minim direcţional pentru f pe A în raport cu L. Mai mult, ipotezele Corolarului 2.4.9 sunt verificate cu $\ell = \sqrt{5}$, $\mu = 1$ şi orice $s > 0$, $\varepsilon > 0$. Atunci $\partial f(0, 0) = \{(-1, 2)\}$ şi există $u^* = (0, -1) \in$

$N(A,(0,0))$, $v^* = (1,-1) \in -L^+$ care verifică concluzia.
Pe de altă parte, dacă schimbăm mulţimea de direcţii

$$L := S_{\mathbb{R}^2} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 3^{-1} \cdot x \geq 0\right\},$$

nu se poate găsi u^*, v^* care să verifice concluzia, confirmând că de data aceasta $(0,0)$ nu este minim direcţional pentru f pe A în raport cu L, întrucât toate celelalte presupuneri sunt adevărate.

În rezultatul următor evidenţiem faptul că putem impune o condiţie metrică şi în cazul restricţiilor funcţionale pentru a obţine rezultate de penalizare. Fie Z un spaţiu vectorial normat, $g : X \to Z$ o funcţie continuă şi $Q \subset Z$ un con convex punctat închis . Ca mai sus, definim multifuncţia $\widetilde{g} : X \rightrightarrows Z$ prin $\widetilde{g}(x) := g(x) + Q$ şi considerăm $g^{-1}(-Q) = \widetilde{g}^{-1}(\{0_Z\})$ mulţimea punctelor fezabile.

Teorema 2.4.11 (penalizare pentru o restricţie funcţională) *Fie $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie şi fie $\overline{x} \in g^{-1}(-Q)$ minim local pentru f pe $g^{-1}(-Q)$. Presupunem că*
(i) există $\varepsilon > 0$ şi $\ell > 0$ astfel încât f este $\ell-$Lipschitz pe $B(\overline{x},\varepsilon)$;
(ii) există $s,\mu > 0$ astfel încât pentru orice $x \in g^{-1}(-Q + B(0_Z,s)) \cap B(\overline{x},s)$

$$d(x, g^{-1}(-Q)) \leq \mu d(0_Z, \widetilde{g}(x) \cap B(0_Z,s)).$$

Atunci $(\overline{x},0_Z)$ este minim local pentru funcţia
$(x,z) \mapsto f(x) + \ell\mu \|z\| + \ell(1+\mu)\, d((x,z), \operatorname{Gr}\widetilde{g})$.
Mai mult, dacăX,Z sunt spaţii Asplund, atunci

$$-\partial f(\overline{x}) \cap D(0_{X^*}, \ell(1+\mu)) \cap D^*\widetilde{g}(\overline{x},0_Z)(Q^+ \cap D(0_{Z^*},\ell\mu)) \neq \emptyset.$$

2.5 Compararea unor condiții de calificare

În această secţiune comparăm condiţia (MC) cu alte condiţii asemănatoare din literatură pe care le-am menţionat deja, anume (MRCQ), (MFCQ), (MSCQ), (CHIP) şi alte câteva pe care le vom aminti în continuare.
Prezentăm întâi echivalenţa unor condiţii metrice, echivalenţă până la o schimbare a constantelor.

Propoziţia 2.5.1 *Fie $M_1 \subset X$, $M_2 \subset X$ mulţimi închise şi fie $\overline{x} \in M_1 \cap M_2$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) există $s,\mu > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(\overline{x},s) \cap M_1$,

$$d(x, M_1 \cap M_2) \leq \mu d(x, M_2).$$

(ii) există $r,t,\mu > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(\overline{x},r) \cap M_1$,

$$d(x, M_1 \cap M_2) \leq \mu d(x, B(\overline{x},t) \cap M_2).$$

(iii) există $r, \nu > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(\overline{x}, r) \cap M_2$,

$$d(x, M_1 \cap M_2) \leq \nu d(x, M_1).$$

(iv) există $r, \nu > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(\overline{x}, r)$,

$$d(x, M_1 \cap M_2) \leq \nu \left(d(x, M_1) + d(x, M_2) \right). \tag{Str}$$

(v) funcţia $g : X \times X \to X$ *dată prin* $g(x, y) := x - y$ *este metric subregulată în* $(\overline{x}, \overline{x}, 0_X)$ *în raport cu* $M_1 \times M_2$.
(vi) funcţia $h : X \times X \to \mathbb{R}$ *dată prin* $h(x, y) := \|x - y\|$ *este metric subregulată în* $(\overline{x}, \overline{x}, 0)$ *în raport cu* $M_1 \times M_2$.

Observaţia 2.5.2 *Observăm că* (MC) *înseamnă tocmai faptul că* $\overline{x}$ *este minim local pe* M_1 *pentru funcţia*

$$x \mapsto \mu d_{M_2}(x) - d_{M_1 \cap M_2}(x).$$

Întrucât aceasta este o funcţie $(1+\mu)-$*Lipschitz, din principiul de penalizare al lui Clarke ([13, Proposition 2.4.3]),* $\overline{x}$ *este minim local fără restricţii pentru*

$$x \mapsto \mu d_{M_2}(x) - d_{M_1 \cap M_2}(x) + (1 + \mu)\, d_{M_1}(x),$$

ceea ce implică faptul că pentru x *aproape de* $\overline{x}$,

$$d_{M_1 \cap M_2}(x) \leq \mu d_{M_2}(x) + (1 + \mu)\, d_{M_1}(x) \leq (1 + \mu) \left(d_{M_1}(x) + d_{M_2}(x) \right).$$

Acesta poate fi alt argument pentru implicaţia (i) $\Rightarrow$ *(iv) din propoziţia anterioară.*

Considerăm acum o funcţie de clasă C^1, $g = (g_1, g_2) : X \to \mathbb{R}^2$, sistemul de restricţii asociat $g(x) \leq 0_{\mathbb{R}^2}$, şi fie $\overline{x}$ un punct fezabil în care ambele restricţii sunt active. Dăm acum o relaţie între condiţiile (MFCQ), (Str) şi (MSCQ).

Propoziţia 2.5.3 *În notaţia de mai sus avem următoarele implicaţii: :*
(i) (MFCQ) $\Leftrightarrow$ (MRCQ) $\Rightarrow$ (MSCQ);
(ii) (MSCQ) $\Rightarrow$ (Str);
(iii) [(MSCQ) *pentru* g_1 *şi* g_2] + (Str) $\Rightarrow$ (MSCQ) *pentru* (g_1, g_2).

Prezentăm mai departe câteva exemple ilustrative în care ne propunem să discutăm diverse situaţii din perspectiva proprietăţilor pe care le studiem aici, anume (MFCQ), (CHIP), (MSCQ), (Str).

Exemplul 2.5.4 Fie $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date prin

$$g_1(x, y) = x - y, \;\; g_2(x, y) = x^2 - x + y.$$

Considerăm mulţimile

$$M_1 = M_{g_1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \right\} \text{ şi } M_2 = M_{g_2} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x - x^2 \right\}.$$

Luăm $(\overline{x}, \overline{y}) = 0_{\mathbb{R}^2}$ şi observăm că $\nabla g_1 (\overline{x}, \overline{y}) = (1, -1) = -\nabla g_2 (\overline{x}, \overline{y})$ şi (MFCQ) are loc pentru g_1 şi g_2 în $(\overline{x}, \overline{y})$, însă nu are loc pentru (g_1, g_2). Avem

$$T_B(M_1, 0_{\mathbb{R}^2}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y\right\} \text{ şi } T_B(M_2, 0_{\mathbb{R}^2}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x\right\},$$

deci

$$T_B(M_1, 0_{\mathbb{R}^2}) \cap T_B(M_2, 0_{\mathbb{R}^2}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\}.$$

Pe de altă parte, $M_1 \cap M_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, deci $T_B(M_1 \cap M_2, 0_{\mathbb{R}^2}) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, şi astfel $T_B(M_1 \cap M_2, 0_{\mathbb{R}^2}) \ne T_B(M_1, 0_{\mathbb{R}^2}) \cap T_B(M_2, 0_{\mathbb{R}^2})$. Totuşi, nici relaţia (MC) nu are loc. Într-adevăr, relaţia (MC) ar implica existenţa unui $\mu > 0$ astfel încât pentru orice $x > 0$ mic,

$$x < x\sqrt{2} = d((x, x), M_1 \cap M_2) \le \mu d((x, x), M_2) \le \mu \left\|(x, x) - \left(x, x - x^2\right)\right\| = \mu x^2,$$

ceea ce este imposibil. Deci, (MC) nu are loc.

Mai mult, (MSCQ) pentru $g = (g_1, g_2)$ ar însemna existenţa unui $\alpha > 0$ astfel încât

$$\|(x, y)\| \le \alpha \left[\max\{x - y, 0\} + \max\left\{x^2 - x + y, 0\right\}\right]$$

pentru orice (x, y) aproape de $(0, 0)$. Dar, pentru $x = y$, asta ar însemna

$$\sqrt{2}\,|x| \le \alpha x^2$$

pentru orice x mic, iar asta nu este adevărat. Prin urmare (MSCQ) nu are loc.

Exemplul 2.5.5 Fie $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date prin

$$g_1(x, y) = x - y, \; g_2(x, y) = -x + y.$$

Considerăm mulţimile

$$M_1 = M_{g_1} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y\right\}$$
$$M_2 = M_{g_2} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x\right\}.$$

Luăm $(\overline{x}, \overline{y}) = 0_{\mathbb{R}^2}$ şi observăm că $\nabla g_1(\overline{x}) = (1, -1) = -\nabla g_2(\overline{x})$ şi (MFCQ) are loc pentru g_1 şi g_2 în $(\overline{x}, \overline{y})$, însă nu are loc pentru (g_1, g_2). Avem

$$T_B(M_1, 0_{\mathbb{R}^2}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y\right\} \text{ şi } T_B(M_2, 0_{\mathbb{R}^2}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x\right\},$$

de unde obţinem

$$T_B(M_1, 0_{\mathbb{R}^2}) \cap T_B(M_2, 0_{\mathbb{R}^2}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\}.$$

Pe de altă parte,

$$M_1 \cap M_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\},$$

deci

$$T_B(M_1 \cap M_2, 0_{\mathbb{R}^2}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\},$$

adică avem $T_B(M_1 \cap M_2, 0_{\mathbb{R}^2}) = T_B(M_1, 0_{\mathbb{R}^2}) \cap T_B(M_2, 0_{\mathbb{R}^2})$. Mai mult, nu este greu de văzut că relaţia (MC) are loc pentru s şi $\mu = 1$ destul de mici. Astfel şi condiţia (Str) are loc. De asemenea, un calcul simple arată că (MSCQ) are loc pentru $g = (g_1, g_2)$.

Dăm acum două exemple care arată că implicaţiile inverse în Propoziţia 2.5.3 (i), (ii) nu sunt în general adevărate.

Exemplul 2.5.6 Fie $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin

$$g_1(x) = g_2(x) = -x^2.$$

Luăm $\overline{x} = 0 \in \mathbb{R}$. Este clar că (MFCQ) nu are loc pentru g_1 şi g_2. Totuşi, (MSCQ) are loc pentru $g = (g_1, g_2)$ deoarece $\widetilde{g}_1^{-1}(0) \cap \widetilde{g}_2^{-1}(0) = \mathbb{R}$, şi astfel $d\left(x, \widetilde{g}_1^{-1}(0) \cap \widetilde{g}_2^{-1}(0)\right) = 0$ pentru orice x.

Exemplul 2.5.7 Considerăm acum $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin

$$g_1(x) = x^2,\ g_2(x) = -x^2.$$

Considerăm $\overline{x} = 0 \in \mathbb{R}$. Pentru acest sistem de restricţii (MSCQ) nu are loc pentru $g = (g_1, g_2)$, căci altfel ar trebui să găsim $\alpha > 0$ astfel încât

$$d\left(x, \widetilde{g}_1^{-1}(0) \cap \widetilde{g}_2^{-1}(0)\right) = |x| \leq \alpha x^2,$$

pentru orice x aproape de 0, ceea ce nu este posibil. Pe de altă parte, (Str) are loc în mod banal cu $\nu = 1$.

Condiţiile (MC) şi (MFCQ) sunt doar suficiente pentru a avea egalitatea între intersecţia conurilor tangente şi conul tangent la intersecţie, după cum aratăm în următorul exemplu.

Exemplul 2.5.8 Considerăm $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date prin

$$g_1(x,y) = \begin{cases} x^4 \sin^2 \frac{1}{x} - y, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, \text{if } x = 0, \end{cases}$$

respectiv

$$g_2(x,y) = \begin{cases} x^4 \sin^2 \frac{1}{x} + y, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Avem că $\nabla g_1(0,0) = (0,-1)$ şi $\nabla g_2(0,0) = (0,1)$, deci (MFCQ) are loc pentru g_1 şi pentru g_2, în timp ce nu are loc pentru (g_1, g_2). Avem că

$$\begin{aligned} T_B(M_{g_1}, (0,0)) \cap T_B(M_{g_2}, (0,0)) &= T_B(M_{g_1} \cap M_{g_2}, (0,0)) \\ &= \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Condiţia (CHIP) are loc.
Fie acum funcţia $f(x) = x^4 \sin^2 \frac{1}{x}$ pentru orice $x \neq 0$ şi considerăm, pentru $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, numărul

$$\overline{x}_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n+1}{2\pi n(n+1)},$$

şi perechea

$$(\overline{x}_n, f(\overline{x}_n)) \in M_{g_1}.$$

Întrucât

$$M_{g_1} \cap M_{g_2} = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{k\pi}, 0 \right) \mid k \text{ este număr întreg nenul} \right\},$$

obţinem că

$$\left| \overline{x}_n - \frac{1}{n\pi} \right| \leq d((\overline{x}_n, f(\overline{x}_n)), M_{g_1} \cap M_{g_2}), \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Pe de altă parte, deoarece $(\overline{x}_n, f(\overline{x}_n)) \in M_{g_1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, avem

$$d((\overline{x}_n, f(\overline{x}_n)), M_{g_2}) \leq 2f(\overline{x}_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

deci (MC) ar implica existenţa unei constante $\mu > 0$ astfel încât pentru orice n destul de mare,

$$\left| \overline{x}_n - \frac{1}{n\pi} \right| = \frac{1}{2\pi n(n+1)} \leq 2\mu \left(\frac{2n+1}{2\pi n(n+1)} \right)^4 \sin^2 \left(\frac{2\pi n(n+1)}{2n+1} \right),$$

adică

$$4\pi^3 \leq \mu \frac{(2n+1)^4}{n^3 (n+1)^3} \sin^2 \left(\frac{2\pi n(n+1)}{2n+1} \right).$$

Desigur, asta este imposibil întrucât termenul din partea dreaptă converge la 0 când $n \to \infty$. Asta înseamnă că nici condiţia (Str) nu are loc.

Relaţiile dintre toate condiţiile discutate mai sus sunt ilustrate în următoarea figură.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{(MFCQ)}} \arrow[d, Leftrightarrow] & & \boxed{\text{(MC)}} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Propoziţia 2.5.1}"] & \\
\boxed{\text{(MRCQ)}} \arrow[r, Rightarrow, "\text{evident}", "\substack{\not\Leftarrow \\ \text{Exemplu 2.5.6}}"'] & \boxed{\text{(MSCQ)}} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Propoziţia 2.5.3}", "\substack{\not\Leftarrow \\ \text{Exemplu 2.5.7}}"'] & \boxed{\text{(Str)}} \arrow[r, Rightarrow, "\text{Teorema 2.4.1}", "\substack{\not\Leftarrow \\ \text{Exemplu 2.5.8}}"'] & \boxed{\text{(CHIP)}}
\end{tikzcd}$$

Capitolul 3

Optimizare cu multifuncții cu ordine variabilă

După cum am văzut în capitolul anterior, minimalitatea pe spaţii vectoriale este de obicei înţeleasă în raport cu o relaţie de ordine parţială indusă de un con convex închis şi punctat. Optimizarea cu ordine variabilă (pe scurt, VOS (în engleză *variable order structures*)) se referă la cazul mai general când nu se lucrează doar cu un con, ci cu o multifuncţie cu valori conuri. Mai precis, în acest cadru studiem problema

$$(P) \ \min F(x), \ x \in \Omega,$$

unde $F : X \rightrightarrows Y$ este multifuncţia obiectiv, $\Omega \subset X$ este mulţimea restricţiilor şi X, Y sunt spaţii vectoriale normate; conceptele de minim sunt în raport cu o relaţie de ordine parţială indusă de o multifuncţie $K : X \rightrightarrows Y$ ce are ca valori conuri convexe închise punctate proprii. Printre noţiunile cunoscute de eficienţă se numără punctele de minim *nondominate*, elemente *robuste* şi minime de tip *Henig* (a se vedea [5], [11] şi [32]).
Ideea structurilor de ordine variabilă a apărut încă din 1974 prin lucrarea [57] alui Po Lung Yu, care a folosit termenul de *structuri dominate* şi a definit *elementele nondominate*. Problemele de optimizare cu ordine variabilă sunt folosite pentru a modela situaţii în care criteriile de preferinţă se pot schimba în timpul procesului de optimizare, ceea ce revine la un procedeu de comparare a două elemente în spaţiul de sosire depinzând de punct. Interesul pentru structuri cu ordine variabilă în optimizare a început de la o problemă aplicativă în domeniul ingineriei medicale în procesarea imaginilor obţinute prin tomografie computerizată, prin ultrasunete sau prin tomografii cu rezonanţă magnetică. Alte aplicaţii pentru VOS includ problema portofoliului şi teoria locaţiei (a se vedea [2], [25], [26] şi referinţele incluse acolo).

Acest capitol urmează îndeaproape prezentarea din lucrarea [24]. Consideră, probleme de optimizare cu ordine variabilă cu restricţii, în sensul definit în [19] şi dezvoltat în [21], urmărind două scopuri: unul este de a deduce condiţii de stabilitate pentru eficienţa unor astfel de probleme la perturbări ale multifuncţiei obiectiv şi ale mulţimii de restricţii, iar al doilea este de a studia unele posibilităţi de a recupera din VOS probleme de optimizare cu ordine fixă. Abordarea noastră constă în studiul a patru tipuri de dilatări ale unui con dat cu scopul de a obţine rezultate utile pentru scopurile lucrării menţionate mai sus şi în final, pentru a obţine nişte condiţii de optimalitate. Principalele contribuţii originale sunt Propoziţia 3.1.8, Propoziţia 3.2.4, Propoziţia 3.2.6, Propoziţia 3.2.10, Propoziţia 3.3.1, Propoziţia 3.3.2, Propoziţia 3.3.4 and Teorema 3.4.1.

3.1 Dilatări de conuri și separare a conurilor

În această secţiune tratăm patru variante de dilatări de conuri, cu proprietăţi şi unele relaţii între ele. Stabilim apoi, în cadru infinit dimensional, un rezultat de separare pentru conuri în sensul dat în [33]. Mai precis, având, într-un spaţiu vectorial normat X, două conuri C_1 şi C_2 cu intersecţia $\{0_X\}$, căutăm alt con C_3 care le separă, adică un con pentru care $C_3 \cap C_1 = \{0_X\}$ şi al cărui interior topologic îl include pe $C_2 \setminus \{0_X\}$. În rezultatul nostru conul C_3 este o dilatare a conului C_2.

Fie X un spaţiu vectorial normat şi $C \subset X$ un con convex închis. Spunem că C admite o bază dacă există o mulţime convexă B astfel încât $0_X \notin \operatorname{cl} B$ şi $C = \operatorname{cone} B$. Dacă B este şi mărginită, spunem că C este well-based şi în acest caz, deoarece C este presupusă închisă, putem considera că şi B este închisă (a se vedea [32, Definition 2.2.14] şi comentariile care o succed). Mai mult, este bine-cunoscut faptul că un con care admite o bază este punctat.

Considerăm şi comparăm patru tipuri de dilatări pentru C. Mai întâi remarcăm faptul evident că

$$C = \operatorname{cone}(C \cap S_X)$$

şi notăm prin S_C mulţimea $C \cap S_X$. Definim în continuare primele trei tipuri de dilatări.

Definiţia 3.1.1 *Fie $\varepsilon > 0$ şi $C \subset X$ un con convex închis şi punctat. Definim următoarele dilatări pentru C:*

(i) dilatarea de tipul 1 este

$$C^{(1)\varepsilon} = \operatorname{cone}(\{x \in S_X \mid d(x, C) \leq \varepsilon\});$$

(ii) dilatarea de tipul 2 este

$$C^{(2)\varepsilon} = \operatorname{cone}(\{x \in S_X \mid d(x, S_C) \leq \varepsilon\});$$

(iii) dacă C admite baza B, dilatarea de tipul 3 este

$$C^{(3)\varepsilon} = \operatorname{cone}(\{x \in X \mid d(x, B) \leq \varepsilon\}).$$

Observaţia 3.1.2 *Aceste tipuri de dilatări nu sunt noi; menţionăm câteva surse bibliografice în care sunt tratate.*
(i) Observăm că, de fapt, pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$C^{(1)\varepsilon} = \{x \in X \mid d(x, C) \leq \varepsilon \|x\|\}.$$

Este clar că

$$C \setminus \{0_X\} \subset \operatorname{int} C^{(1)\varepsilon}$$

întrucât, potrivit [15, Proposition 4], pentru orice $x \in C$,

$$D(x, (1+\varepsilon)^{-1}\varepsilon \|x\|) \subset C^{(1)\varepsilon}.$$

(ii) Dilatarea de tipul 2 a fost introdusă şi studiată în [9] în legătură cu unele probleme de optimizare direcţionale. Se ştie că ([9, Proposition 2.9])

$$C \setminus \{0_X\} \subset \operatorname{int} C^{(2)\varepsilon}, \text{ pentru orice } \varepsilon > 0.$$

(iii) Dilatarea de tipul 3 este bine-cunoscuta procedură de dilatare Henig (a se vedea [32, Lemma 3.2.51]). Pentru orice $\varepsilon \in (0, \delta)$, unde $\delta = d(0_X, B) > 0$, $C^{(3)\varepsilon}$ este un con convex închis şi

$$C \setminus \{0_X\} \subset \operatorname{int} C^{(3)\varepsilon}.$$

Pentru a defini dilatarea de tipul 4, avem nevoie de următoarea lemă (a se vedea [32, Section 2.2]).

Lema 3.1.3 *Fie $C \subset X$ un con convex închis. Atunci*

(i) C admite o bază dacă şi numai dacă există $x^* \in X^*$ astfel încât $x^*(x) > 0$ pentru orice $x \in C \setminus \{0_X\}$. În acest caz $C \cap \{x \in X \mid x^*(x) = 1\}$ este o bază pentru C;

(ii) C este well-based dacă şi numai dacă $x^* \in X^*$ şi $\alpha > 0$ astfel încât $x^*(x) \geq \alpha \|x\|$ pentru orice $x \in C$. În acest caz $C \cap \{x \in X \mid x^*(x) = 1\}$ este o bază mărginită pentru C.

Definiţia 3.1.4 *Fie $C \subset X$ un con convex închis well-based şi $\varepsilon > 0$. Fie $x^* \in X^*$ funcţionala din Lema 3.1.3 (ii) şi $A := \{u \in X \mid x^*(u) = 1\}$. Dilatarea de tipul 4 este*

$$C^{(4)\varepsilon} = \operatorname{cone}\left(\{x \in A \mid d(x, C \cap A) \leq \varepsilon\}\right).$$

Observaţia 3.1.5 *Deoarece A şi $C \cap A$ sunt convexe şi închise, aceleaşi proprietăţi le va avea şi mulţimea*

$$B_\varepsilon := \{x \in A \mid d(x, C \cap A) \leq \varepsilon\}.$$

Mai mult, evident $0_X \notin B_\varepsilon$ pentru că $0_X \notin A$. Mărginirea lui $C \cap A$ implică de asemenea mărginirea lui B_ε. Se poate arăta că niciun element $c \in -C \setminus \{0_X\}$ nu este în $C^{(4)\varepsilon}$, prin urmare $C^{(4)\varepsilon}$ este mereu un con convex închis punctat propriu şi well-based.

Observăm că $C^{(3)\varepsilon}$ este mereu convex, dar este definit doar dacă C admite o bază, în timp ce $C^{(1)\varepsilon}$ şi $C^{(2)\varepsilon}$ sunt mereu bine-definite, dar pot fi şi neconvexe. Analizăm acum unele relaţii între aceste patru tipuri de dilatări.

Propoziţia 3.1.6 *Fie $C \subset X$ un con convex închis şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci*

(i) $C^{(2)\varepsilon} \subset C^{(1)\varepsilon}$ şi există $\delta > 0$ astfel încât $C^{(1)\delta} \subset C^{(2)\varepsilon}$;

(ii) dacă C este well-based, atunci există $\delta > 0$ astfel încât $C^{(3)\delta} \subset C^{(1)\varepsilon}$ şi există $\eta > 0$ astfel încât $C^{(1)\eta} \subset C^{(3)\varepsilon}$;

(iii) dacă C este well-based, atunci există $\delta > 0$ astfel încât $C^{(4)\delta} \subset C^{(1)\varepsilon}$ şi există $\eta > 0$ astfel încât $C^{(1)\eta} \subset C^{(4)\varepsilon}$.

Rezultatele de separare, în general, sunt foarte utile în obţinerea condiţiilor de optimalitate. În particular, utilitatea rezultatului următor vine din faptul că permite trecerea de la lucrul cu un con cu interior vid la lucrul cu un con solid, şi astfel deschide posibilitatea de a lucra cu concepte de eficienţă slabă.

Teorema 3.1.7 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv, $P, Q \subset X$ conuri astfel încât P, Q sunt slab închise şi P este well-based. Dacă $P \cap Q = \{0_X\}$, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $P^{(1)\varepsilon} \cap Q = \{0_X\}$.*

Un rezultat asemănător are loc în prezenţa unor ipoteze suplimentare de convexitate.

Propoziţia 3.1.8 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi $P, Q \subset X$ conuri convexe închise astfel încât $P \cap Q = \{0\}$. Dacă P este well-based cu baza B, atunci există U o vecinătate slabă a originii astfel încât*

$$\operatorname{cone}(B + U) \cap Q = \{0_X\}.$$

În particular, există $\varepsilon_i > 0$ astfel încât $P^{(i)\varepsilon_i} \cap Q = \{0_X\}$, pentru orice $i \in \overline{1,4}$.

3.2 Stabilitate pentru eficienţă aproximativă

Cadrul pentru această secţiune este următorul: fie Y un spaţiu vectorial normat, $A \subset Y$ o mulţime nevidă şi $K : Y \rightrightarrows Y$ o multifuncţie pentru care $K(y)$ este un con convex închis punctat propriu pentru orice $y \in Y$. Cu ajutorul lui K putem defini trei relaţii de pseudo-ordine pe Y:

$$\begin{aligned} y_1 \leq_1 y_2 &\iff y_2 - y_1 \in K(y_2), \\ y_1 \leq_2 y_2 &\iff y_2 - y_1 \in K(y_1), \\ y_1 \leq_3 y_2 &\iff y_2 - y_1 \in K(y), \ \forall y \in A. \end{aligned}$$

Desigur, dacă multifuncţia K are valori solide, atunci putem considera relaţiile de pseudo-ordine strictă corespunzătoare pe Y, anume $<_1, <_2$ şi $<_3$. Acestea conduc la trei concepte diferite de minimalitate în sens slab (a se vedea [25] şi [34]), care de fapt reprezintă extinderi ale eficienţei din cazul cu ordine fixă la cazul structurilor cu ordine variabilă.

Definiţia 3.2.1 *Fie $\overline{x} \in A$.*

(i) Presupunem că $\operatorname{int} K(\overline{x}) \neq \emptyset$. Elementul $\overline{x}$ este punct minimal slab pentru A în raport cu K dacă $x \not<_1 \overline{x}$ pentru orice $x \in A$, i.e.,

$$\{x - \overline{x}\} \cap (-\operatorname{int} K(\overline{x})) = \emptyset, \ \forall x \in A.$$

(ii) Presupunem că $\operatorname{int} K(x) \neq \emptyset$ pentru orice $x \in A$. Elementul $\overline{x}$ este punct nondominat slab pentru A în raport cu K dacă $x \not<_2 \overline{x}$ pentru orice $x \in A$, i.e.,

$$\{x - \overline{x}\} \cap (-\operatorname{int} K(x)) = \emptyset, \ \forall x \in A.$$

(iii) Presupunem că $\operatorname{int} K(x) \neq \emptyset$ pentru orice $x \in A$. Elementul $\overline{x}$ este punct robust slab pentru A în raport cu K dacă $x \not<_3 \overline{x}$ pentru orice $x \in A$, i.e.,

$$\{x - \overline{x}\} \cap (-\operatorname{int} K(z)) = \emptyset, \ \forall x, z \in A.$$

Conceptele corespunzătoare de minimalitate aproximativă sunt după cum urmează.

Definiţia 3.2.2 *Fie $\overline{x} \in A$, $c \in Y \setminus \{0_Y\}$ şi $\varepsilon \geq 0$.*

(i) Presupunem că $\operatorname{int} K(\overline{x}) \neq \emptyset$. Elementul $\overline{x}$ este punct $\varepsilon c-$minimal slab pentru A în raport cu K dacă $x + \varepsilon c \nleq_1 \overline{x}$ pentru orice $x \in A$, i.e.,

$$\{x - \overline{x} + \varepsilon c\} \cap (-\operatorname{int} K(\overline{x})) = \emptyset, \ \forall x \in A.$$

(ii) Presupunem că $\operatorname{int} K(x) \neq \emptyset$ pentru orice $x \in A$. Elementul $\overline{x}$ este punct $\varepsilon c-$nondominat slab pentru A în raport cu K dacă $x \nleq_2 \overline{x} - \varepsilon c$ pentru orice $x \in A$, i.e.,

$$\{x - \overline{x} + \varepsilon c\} \cap (-\operatorname{int} K(x)) = \emptyset, \ \forall x \in A.$$

(iii) Presupunem că $\operatorname{int} K(x) \neq \emptyset$ pentru orice $x \in A$. Elementul $\overline{x}$ este punct $\varepsilon c-$robust slab pentru A în raport cu K dacă $x \nleq_3 \overline{x} - \varepsilon c$ pentru orice $x \in A$, i.e.,

$$\{x - \overline{x} + \varepsilon c\} \cap (-\operatorname{int} K(z)) = \emptyset, \ \forall x, z \in A.$$

Scopul acestei secţiuni este de a demonstra că, în anumite ipoteze, un şir de minime aproximative pentru un şir de mulţimi converge, într-un anume sens, la un punct de minim aproximativ pentru limita şirului de mulţimi. Cu alte cuvinte, conceptul de eficienţă aproximativă pentru mulţimi este stabil la perturbări ale mulţimii. Demonstrăm de asemenea că o astfel de stabilitate are loc şi pentru eficienţă aproximativă pentru multifuncţii.

Notăm prin $(\varepsilon, c) - \operatorname{WMin}(A, K)$ mulţimea punctelor $\varepsilon c-$minimale slabe pentru A în raport cu K, prin $(\varepsilon, c) - \operatorname{WNond}(A, K)$ mulţimea punctelor $\varepsilon c-$nondominate slabe pentru A în raport cu K şi prin $(\varepsilon, c) - \operatorname{WRob}(A, K)$ mulţimea punctelor $\varepsilon c-$robuste slabe pentru A în raport cu K. Pentru conceptele din Definiţia 3.2.1 folosim aceleaşi notaţii, fără a mai menţiona (ε, c). Pentru mai multe detalii despre proprietăţile conceptelor de minimalitate de mai sus şi diferenţele dintre ele, a se vedea, de exemplu, [25], [52] şi [53].

În continuare, formulăm rezultate de stabilitate pentru noţiunile de eficienţă aproximativă introduse în Definiţia 3.2.2 la perturbări ale mulţimii A cu şiruri de mulţimi convergente în sensul Painlevé-Kuratowski. Amintim următoarea definiţie.

Definiţia 3.2.3 *Fie A şi $(A_n)_n$ mulţimi nevide din Y. Spunem că A este limita Painlevé-Kuratowski a şirului (A_n) dacă*

$$A \subset \operatorname*{Liminf}_{n\to\infty} A_n \text{ şi } \operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} A_n \subset A,$$

unde

$$\operatorname*{Liminf}_{n\to\infty} A_n = \{x \in Y \mid \exists (x_n), x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N} : x_n \to x\}$$

şi

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} A_n = \{x \in Y \mid \exists (n_k), \exists (x_{n_k}), x_{n_k} \in A_{n_k}, \forall k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \to x\}.$$

Notăm $A_n \xrightarrow{P-K} A$. Scriem $A_n \xrightarrow{P-K_-} A$ dacă are loc incluziunea din partea stângă şi $A_n \xrightarrow{P-K_+} A$ dacă are loc incluziunea din partea dreaptă.

Dăm acum rezultatul nostru privind stabilitatea menţionată pentru conceptul de minim robust slab.

Propoziţia 3.2.4 *Fie* $\emptyset \neq A \subset Y$ *o mulţime închisă,* $(A_n) \subset Y$ *un şir de mulţimi închise nevide,* $\varepsilon > 0$ *şi considerăm mulţimea* $C := \operatorname{int}\left(\bigcap \{K(y_n) \mid y_n \in A_n,\ \text{cu } n \in \mathbb{N}^*\}\right) \neq \emptyset$. *Fie* $c \in C$ *şi presupunem că* $\operatorname{int} K(x) \neq \emptyset$ *pentru orice* $x \in A$, $A_n \xrightarrow{P-K} A$ *şi* $K(A_n) \xrightarrow{P-K_-} K(A)$. *Atunci, pentru orice* $\delta \in [0, \varepsilon)$,

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} (\delta, c) - \operatorname{WRob}(A_n, K) \subset (\varepsilon, c) - \operatorname{WRob}(A, K).$$

Observaţia 3.2.5 *Evident,* $(\varepsilon, c) - \operatorname{WRob}(A, K) \subset (\varepsilon, c) - \operatorname{WNond}(A, K)$ *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi* $c \in Y \setminus \{0\}$. *Astfel, în ipotezele propoziţiei anterioare, obţinem că*

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} (\varepsilon_1, c) - \operatorname{WRob}(A_n, K) \subset (\varepsilon_2, c) - \operatorname{WNond}(A, K),$$

pentru orice $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ *şi* $c \in C$.

În continuare obţinem un rezultat asemănător de stabilitate pentru eficienţa nondominată slabă.

Propoziţia 3.2.6 *Fie* $\emptyset \neq A \subset Y$ *o mulţime închisă,* $(A_n) \subset Y$ *un şir de mulţimi închise nevide,* $\varepsilon > 0$. *Presupunem că* $C := \operatorname{int}\left(\bigcap \{K(y_n) \mid y_n \in A_n,\ \text{cu } n \in \mathbb{N}^*\}\right) \neq \emptyset$, $A_n \xrightarrow{P-K} A$, K *este inferior semicontinuă în* $(x, y) \in \operatorname{Gr} K$ *pentru orice* $x \in A \cap \operatorname{Dom} K$ *şi fie* $c \in C$. *Atunci, pentru orice* $\delta \in [0, \varepsilon)$,

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} (\delta, c) - \operatorname{WNond}(A_n, K) \subset (\varepsilon, c) - \operatorname{WNond}(A, K).$$

Era de aşteptat să fie nevoie de o ipoteză mai tare pentru stabilitatea eficienţei nondominate decât pentru cea robustă. Condiţia de inferioară semicontinuitate a lui K în $(x, y) \in \operatorname{Gr} K$ pentru orice $x \in A \cap \operatorname{Dom} K$ implică faptul că avem $K(A_n) \xrightarrow{P-K_-} K(A)$ dacă $A_n \xrightarrow{P-K} A$, întrucât pentru orice $k \in K(a)$ cu $a \in A \cap \operatorname{Dom} K$ inferioara semicontinuitate dă un şir (k_n) convergent la k, cu $k_n \in K(a_n) \subset K(A_n)$, corespunzător unui şir $a_n \to a$, cu $a_n \in A_n$ pentru orice n, dat de ipoteza de convergenţă $A_n \xrightarrow{P-K} A$. Implicaţia inversă nu are loc, după cum se poate vedea din următorul exemplu simplu.

Exemplul 3.2.7 Fie $Y = \mathbb{R}^2$, $K_1 = \operatorname{cone}\operatorname{conv}\{(0,2); (1,2)\}$, $K_2 = \operatorname{cone}\operatorname{conv}\{(2,1); (2,0)\}$ şi $K : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ dată de

$$K(x) = \begin{cases} K_1, & \text{if } x \notin \mathbb{Q}^2 \\ K_2, & \text{if } x \in \mathbb{Q}^2. \end{cases}$$

K este inferior semicontinuă doar în punctele $(x, 0_{\mathbb{R}^2})$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$. Totuşi, alegând $A = [0,1] \times [0,1]$ şi $A_n = [-n^{-1}, 1 + n^{-1}] \times [-n^{-1}, 1 + n^{-1}]$, este uşor de văzut că $A_n \xrightarrow{P-K} A$ şi $K(A_n) \xrightarrow{P-K_-} K(A)$ deoarece $K(A_n) = \cup_{a_n \in A_n} K(a_n) = K_1 \cup K_2 = \cup_{a \in A} K(a) = K(A)$.

Observaţia 3.2.8 *(i) În ipotezele Propoziţiei 3.2.6, putem obţine de asemenea că pentru orice* $\delta \in [0, \varepsilon)$

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} (\delta, c) - \mathrm{WMin}\,(A_n, K) \subset (\varepsilon, c) - \mathrm{WMin}\,(A, K)\,.$$

(ii) În ipotezele propoziţiei anterioare, pentru $\delta = 0$ *şi* $\varepsilon > 0$ *obţinem*

$$\operatorname*{Limsup}_{n\to\infty} \mathrm{WNond}\,(A_n, K) \subset (\varepsilon, c) - \mathrm{WNond}\,(A, K)\,.$$

Ne ocupăm mai departe de cazul eficienţei pentru multifuncţii. Considerăm o multifuncţie $F : X \rightrightarrows Y$ între spaţiile vectoriale normate X şi Y, multifuncţia K între aceleaşi spaţii ca şi F, şi $A \subset X$ mulţimea restricţiilor. Avem astfel următoarea problemă:

$$\min F(x)\,,\ x \in A. \tag{P_A}$$

Următorul concept de soluţie aproximativă pentru problema (P_A) a fost definit în [54] şi reprezintă o generalizare a conceptului de eficienţă aproximativă din cazul ordinei fixe la structuri cu ordine variabilă.

Definiţia 3.2.9 *Fie* $\overline{x} \in A$, $c \in Y \setminus \{0_Y\}$ *şi* $\varepsilon \geq 0$. *Presupunem că* $\operatorname{int} K(x) \neq \emptyset$ *pentru orice* $x \in A$. *Elementul* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ *este punct* $\varepsilon c-$*nondominat slab pentru* F *pe* A *în raport cu* K *dacă*

$$(F(x) - \overline{y} + \varepsilon c) \cap (-\operatorname{int} K(x)) = \emptyset,\ \forall x \in A.$$

Notăm prin $(\varepsilon, c) - \mathrm{WNond}\,(A, K, F)$ mulţimea punctelor $\varepsilon c-$nondominate slabe pentru F pe A în raport cu K. Observăm că dacă $\varepsilon = 0$ obţinem conceptul clasic de minim aproximativ care a fost definit şi studiat în [19].

Mai departe prezentăm un rezultat de stabilitate pentru soluţia nondominată la perturbări ale multifuncţiei F şi ale mulţimii A.

Propoziţia 3.2.10 *Fie* $F : X \rightrightarrows Y$ *o multifuncţie cu grafic închis,* (F_n) *un şir de multifuncţii de la* X *la* Y *cu grafice închise,* $\emptyset \neq A \subset Y$ *o mulţime închisă,* $(A_n) \subset Y$ *un şir de mulţimi închise nevide.*
Presupunem că $C := \operatorname{int}\left(\bigcap \{K(y_n) \mid y_n \in A_n,\ \text{cu } n \in \mathbb{N}^*\}\right) \neq \emptyset$, *considerăm un* $c \in C$ *şi presupunem că:*

(i) există $\varepsilon > 0$ *şi* $(x_n, y_n) \to (\overline{x}, \overline{y})$ *astfel încât* $(x_n, y_n) \in (\varepsilon, c) - \mathrm{WNond}\,(A_n, K, F_n)$ *pentru orice* n *destul de mare;*

(ii) $A_n \xrightarrow{P-K_-} A$ *şi* $\operatorname{Gr} F_n \xrightarrow{P-K_-} \operatorname{Gr} F$;

(iii) pentru orice $(x, y) \in \operatorname{Gr} F$, *există* V *o vecinătate a lui* y *astfel încât pentru orice* $x_n^1 \to x$ *şi* $x_n^2 \to x$, *există* $(\lambda_n) \subset (0, \infty)$ *cu* $\lambda_n \|x_n^1 - x_n^2\| \to 0$ *şi*

$$F_n\left(x_n^1\right) \cap V \subset F_n\left(x_n^2\right) + \lambda_n \left\|x_n^1 - x_n^2\right\| D_Y,$$

pentru orice n *destul de mare;*

(iv) K *este inferior semicontinuă în* $(x, y) \in \operatorname{Gr} K$ *pentru orice* $x \in A \cap \operatorname{Dom} K$.

Atunci, pentru orice $\delta > \varepsilon$, $(\overline{x}, \overline{y}) \in (\delta, c) - \mathrm{WNond}\,(A, K, F)\,.$

Observaţia 3.2.11 *Rezultate asemănătoare pot fi date pentru soluţiile robuste şi minimale ale problemei* (P_A).
Rezultatele din această secţiune generalizează nişte rezultate din [14] şi [10] pe care le-am adaptat din cadrul optimizării cu ordine fixă la optimizare cu ordine variabilă.

3.3 Eficienţă în ordine variabilă văzută ca eficienţă în ordine fixă

Fie X, Y spaţii vectoriale normate şi fie $F, K : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii cu K având ca valori conuri convexe închise punctate proprii. Scopul acestei secţiuni este de a prezenta unele rezultate în care convertim punctele nondominate şi robuste ale lui F în raport cu o dilatare a lui K în puncte de minim Pareto, respectiv Pareto aproximativ, ale lui F în raport cu o limită a multifuncţiei K. Cu alte cuvinte, facem din eficienţă în cazul ordinei variabile eficienţă într-un cadru cu ordine fixă, printr-un procedeu de trecere la limită.

Folosim limitele inferioare şi superioare Painlevé-Kuratowski pentru multifuncţia F, care sunt definite după cum urmează, pentru $\overline{x} \in X$,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Liminf}_{x\to\overline{x}} F(x) &= \{y \in Y \mid \forall V \in \mathcal{V}(y), \exists U \in \mathcal{V}(\overline{x}), \forall u \in U, F(u) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{y \in Y \mid \forall x_n \to \overline{x}, \exists y_n \to y, y_n \in F(x_n), \forall n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\operatorname*{Limsup}_{x\to\overline{x}} F(x) &= \{y \in Y \mid \forall V \in \mathcal{V}(y), \forall U \in \mathcal{V}(\overline{x}), \exists u \in U, F(u) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{y \in Y \mid \exists x_n \to \overline{x}, \exists y_n \to y, y_n \in F(x_n), \forall n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Aceste mulţimi sunt mereu închise şi $\operatorname*{Liminf}_{x\to\overline{x}} F(x) \subset \operatorname{cl} F(\overline{x}) \subset \operatorname*{Limsup}_{x\to\overline{x}} F(x)$. Dacă $\operatorname*{Liminf}_{x\to\overline{x}} F(x)$ este nevidă, atunci $\overline{x} \in \operatorname{int} \operatorname{Dom} F$.

Dacă $F(\overline{x}) \subset \operatorname*{Liminf}_{x\to\overline{x}} F(x)$ atunci spunem că F este inferior semicontinuă în $\overline{x}$.

Propoziţia 3.3.1 *Fie* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ *şi presupunem că există* $U \in \mathcal{V}(\overline{x})$ *şi* $\varepsilon > 0$ *astfel încât pentru orice* $x, u \in U$,

$$(F(x) - \overline{y}) \cap (-K^{(1)\varepsilon}(u)) \subset \{0_Y\}.$$

Atunci există $U' \in \mathcal{V}(\overline{x})$ *astfel încât*

$$(F(U') - \overline{y}) \cap (-\operatorname*{Limsup}_{x\to\overline{x}} K(x)) \subset \{0_Y\}.$$

Relaţiile de pseudo-ordine discutate în secţiunea anterioară determină următoarele noţiuni de minimalitate pentru multifuncţii:

(i) $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ se numeşte punct robust local pentru F în raport cu K dacă există $U \in \mathcal{V}(\overline{x})$ astfel încât pentru orice $x, z \in U$,

$$(F(x) - \overline{y}) \cap (-K(z)) \subset \{0_Y\}$$

şi similar,

(ii) $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ se numeşte punct nondominat local pentru F în raport cu K dacă există $U \in \mathcal{V}(\overline{x})$ astfel încât pentru orice $x \in U$,

$$(F(x) - \overline{y}) \cap (-K(x)) \subset \{0_Y\}.$$

Astfel, relaţia din ipoteza rezultatului de mai sus spune că $(\overline{x}, \overline{y})$ este punct robust local pentru F în raport cu $K^{(1)\varepsilon}$, iar concluzia spune că acelaşi punct este minim Pareto local pentru F în raport cu $\operatorname*{Limsup}_{x \to \overline{x}} K(x)$ (con închis).

Următorul rezultat transformă un punct nondominat în ordine variabilă pentru F într-un punct de minim Pareto aproximativ pentru F în ordine fixă. Concluzia este de fapt ceva mai tare decât atât, iar forma ei particulară o face potrivită pentru rezultate de separare de conuri, şi prin asta, folositoare pentru a obţine condiţii de optimalitate.

Propoziţia 3.3.2 *Fie* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ *astfel încât există* $U \in \mathcal{V}(\overline{x})$ *şi* $\varepsilon > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in U$,

(i) $K^{(1)\varepsilon}(x)$ *este convexă şi* $K^{(1)\varepsilon}(x) \cap (-K(x)) = \{0_Y\}$;

(ii) $(F(x) - \overline{y}) \cap (-K^{(1)\varepsilon}(x)) \subset \{0_Y\}$.

Fie $C = \left(\bigcap_{x \in U} K(x) \right)$ *şi presupunem că există* $e \in C \setminus \{0_Y\}$. *Presupunem că există* $L > 0$ *astfel încât pentru orice* $x, z \in U$,

$$F(x) \subset F(z) - L \|x - z\| e + K(z).$$

Atunci, pentru orice $\delta > 0$, *există* $U_\delta \in \mathcal{V}(\overline{x})$ *astfel încât*

$$(F(U_\delta) - \overline{y} + \delta e) \cap (-\operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} K(x)) = \emptyset.$$

Observaţia 3.3.3 *În notaţia Propoziţiei 3.3.2, presupunem că pentru orice* $x \in U$ *conul* $K(x)$ *este well-based cu baza* $B(x)$, $\bigcup_{x \in U} B(x)$ *este mărginită şi* $0_Y \notin \operatorname{cl} \bigcup_{x \in U} B(x)$. *Atunci, ca în Lema 3.1.3 (ii), există* $y^* \in Y^*$ *şi* $\alpha > 0$ *astfel încât* $y^*(y) \geq \alpha \|y\|$ *pentru orice* $y \in \bigcup_{x \in U} K(x)$ *şi în acest caz* $E(x) = K(x) \cap \{y \in Y \mid y^*(y) = 1\}$ *este o bază mărginită pentru* $K(x)$ *pentru orice* $x \in U$. *Astfel, am construit cel de-al patrulea tip de dilatare pentru toate conurile* $K(x)$ *folosind aceste baze mărginite.*

În general, se poate arăta că $\operatorname*{Limsup}_{x \to \overline{x}} K(x)$ este con închis. În contrast, $\operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} K(x)$ este un con închis care este şi convex dacă valorile multifuncţiei K sunt conuri convexe. Mai mult, pentru că pentru orice vecinătate U a lui $\overline{x}$,

$$\bigcap_{x \in U} K(x) \subset \operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} K(x) \subset \operatorname{cl} K(\overline{x}),$$

$\operatorname*{Liminf}_{x\to\overline{x}} K(x)$ este şi con punctat dacă imaginea $K(\overline{x})$ este con închis şi punctat.

Propoziţia 3.3.4 *Presupunem că valorile multifuncţiei K într-o vecinătate U a lui $\overline{x}$ sunt conuri punctate şi well-based; notăm cu B multifuncţia care asociază fiecărui $x \in U$ baza închisă şi mărginită corespunzătoare a lui $K(x)$. Dacă $0_Y \notin \operatorname{cl} \bigcup_{x\in U} B(x)$ şi $\bigcup_{x\in U} B(x)$ este mărginită, atunci $D = \operatorname*{Liminf}_{x\to\overline{x}} B(x)$ este o bază mărginită pentru $\operatorname*{Liminf}_{x\to\overline{x}} K(x)$.*

Următorul rezultat este interesant prin faptul că dă inferioara semicontinuitate a multifuncţiei limită inferioară.

Propoziţia 3.3.5 *Fie $K : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie ale cărei valori sunt conuri, $\overline{x} \in X$ şi U o vecinătate deschisă a lui $\overline{x}$. Presupunem că există un con P cu interior nevid astfel încât*

$$P \subset \bigcap_{x\in U} K(x).$$

Dacă $P + K(x) \subset K(x)$ pentru orice $x \in U$ (în particular, dacă valorile lui K sunt convexe), atunci multifuncţia $G : X \rightrightarrows Y$,

$$G(x) = \operatorname*{Liminf}_{u\to x} K(u)$$

este inferior semicontinuă în orice punct $x \in U$.

3.4 Condiţii de optimalitate

Ultima secţiune a acestei lucrări este dedicată obţinerii de condiţii de optimalitate pentru eficienţă în cadru VOS pe spaţii duale.

Teorema 3.4.1 *Fie X un spaţiu Asplund şi Y un spaţiu Banach reflexiv, şi $F, K : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii cu $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. Presupunem că există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât*

(i) valorile lui K în vecinătatea U sunt conuri convexe închise punctate well-based;

(ii) $0_Y \notin \operatorname{cl} \bigcup_{x\in U} B(x)$ şi $\bigcup_{x\in U} B(x)$ este mărginită, unde prin B notăm multifuncţia care asociază fiecărui $x \in U$ baza închisă mărginită corespunzătoare a lui $K(x)$;

(iii) există $e \in C = \left(\bigcap_{x\in U} K(x)\right) \setminus \{0_Y\}$ şi $L > 0$ astfel încât pentru orice $x, z \in U$,

$$F(x) \subset F(z) - L\|x - z\| e + K(z);$$

(iv) $\operatorname{Gr} F$ este local închis şi $\operatorname{cone}(F(V) - \overline{y} + \rho e)$ este slab închis pentru orice $\rho > 0$ mic şi orice vecinătate închisă V destul de mică a lui $\overline{x}$.

Dacă există $\overline{\varepsilon} > 0$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ este punct nondominat local pentru F în raport cu dilatarea $K^{(4)\overline{\varepsilon}}$ descrisă în Observaţia 3.3.3, atunci, pentru orice $\delta > 0$, există $\varepsilon > 0$, $(x, y) \in \operatorname{Gr} F \cap D\left((\overline{x}, \overline{y}), \frac{\delta}{1+\delta}\right)$ şi $y^* \in \left(Q^{(4)\varepsilon}\right)^+$ cu $y^*(e) = \frac{1}{1+\delta}$, astfel încât

$$0 \in D^*F(x,y)\left(y^* + \sqrt{\frac{\delta}{1+\delta}} D_{Y^*}\right) + \sqrt{\frac{\delta}{1+\delta}} D_{X^*},$$

unde $Q = \operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} K(x)$.

Bibliografie

[1] J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, 2nd printing, Birkhäuser, Basel, Boston, 2009.

[2] D. Baatar, M.M. Wiecek, *Advancing equitability in multiobjective programming*, Computers & Mathematics with Applications, 52 (2006), 225–234.

[3] H.H. Bauschke, J.M. Borwein, W. Li, *Strong conical hull intersection property, bounded linear, regularity, Jameson's property (G), and error bounds in convex optimization*, Mathematical Programming Series A, 86 (1999), 135–160.

[4] H.H. Bauschke, J.M. Borwein, P. Tseng, *Bounded linear regularity, strong CHIP, and CHIP are distinct properties*, Journal of Convex Analysis, 7 (2000), 39–412.

[5] K. Bergstresser, A. Charnes, P.L. Yu, *Generalization of domination structures and nondominated solutions in multicriteria decision making*, Journal of Optimization Theory and Applications, 18 (1976), 3–13.

[6] J.F. Bonnans, A. Shapiro, *Perturbation analysis of optimization problems*, Springer, New York, 2000.

[7] O. Cârjă, *Unele Metode de Analiză Funcţională Neliniară*, Matrix Rom, Bucureşti, 2003 (in Romanian).

[8] T. Chelmuş, M. Durea, E.-A. Florea, *Directional Pareto efficiency: concepts and optimality conditions*, Journal of Optimization Theory and Applications, 182 (2019), 336–365.

[9] T. Chelmuş, M. Durea, *Exact penalization and optimality conditions for constrained directional Pareto efficiency*, Pure and Applied Functional Analysis, 5 (2020), 533–553.

[10] T. Chelmuş, M. Durea, *Stability of minimality and criticality in directional set-valued optimization problems*, Positivity, 25 (2021), 1175–1198.

[11] G.Y. Chen, *Existence of solutions for a vector variational inequality: an extension of the Hartmann-Stampacchia Theorem*, Journal of Optimization Theory and Applications, 74 (1992), 445–456.

[12] R. Cibulka, M. Durea, M. Panţiruc, R. Strugariu, *On the stability of the directional regularity*, Set-Valued and Variational Analysis, 28 (2020), 209–237.

[13] F.H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, New York, 1983.

[14] M. Durea, *On the existence and stability of approximate solutions of perturbed vector equilibrium problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 333 (2007), 1165–1179.

[15] M. Durea, *Some cone separation results and applications*, Revue d'Analyse Numerique et de Theorie de l'Approximation, 37 (2008), 37–46.

[16] M. Durea, R. Strugariu, *On some Fermat rules for set-valued optimization problems*, Optimization, 60 (2011), 575–591.

[17] M. Durea, R. Strugariu, *Optimality conditions in terms of Bouligand derivatives for Pareto efficiency in set-valued optimization*, Optimization Letters, 5 (2011), 141–151.

[18] M. Durea, R. Strugariu, *Calculus of tangent sets and derivatives of set-valued maps under metric subregularity conditions*, Journal of Global Optimization, 56 (2013), 587–603.

[19] M. Durea, R. Strugariu, C. Tammer, *On set-valued optimization problems with variable ordering structure*, Journal of Global Optimization, 61 (2015), 745–767.

[20] M. Durea, M. Panţiruc, R. Strugariu, *A new type of directional regularity for mappings and applications to optimization*, SIAM Journal on Optimization, 27 (2017), 1204–1229.

[21] M. Durea, E.-A. Florea, R. Strugariu, *Efficiencies and optimality conditions in vector optimization with variable ordering structure*, section 8 (pp. 158–209) in Variational Analysis and Set Optimization: Developments and Applications in Decision Making, C. Tammer, A. Khan, E. Köbis (Eds.), CRC Press (Taylor & Francis), 2019.

[22] M. Durea, R. Strugariu, *On the sensitivity of Pareto efficiency in set-valued optimization problems*, Journal of Global Optimization, 78 (2020), 581–596.

[23] M. Durea, D. Maxim, R. Strugariu, *Metric inequality conditions on sets and consequences in optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, 189 (2021), 744–771.

[24] M. Durea, E.-A. Florea, D.-E. Maxim, R. Strugariu, *Approximate efficiency in set-valued optimization with variable order*, Journal of Nonlinear and Variational Analysis, 6 (2022), 619–640.

[25] G. Eichfelder, *Optimal elements in vector optimization with a variable ordering structure*, Journal of Optimization Theory and Applications, 151 (2011), 217–240.

[26] B. Fischer, E. Haber, J. Modersitzki, *Mathematics meets medicine—an optimal alignment*, SIAG/OPT Views and News, 19 (2008), 1–7.

[27] E.-A. Florea, D. Maxim, *Directional openness for epigraphical mappings and optimality conditions for directional efficiency*, Optimization, 70 (2021), 321–344.

[28] N.A. Gadhi, L. Lafhim, *Necessary optimality conditions for set-valued optimization problems via the extremal principle*, Positivity, 13 (2009), 657–669.

[29] N.A. Gadhi, *Necessary optimality conditions for a nonsmooth semi-infinite programming problem*, Journal of Global Optimization, 74 (2019), 161–168.

[30] H. Gfrerer, B.S. Mordukhovich, *Complete characterizations of tilt stability in nonlinear programming under weakest qualification conditions*, SIAM Journal on Optimization, 25 (2015), 2081–2119.

[31] H. Gfrerer, J.J. Ye, *New constraint qualifications for mathematical programs with equilibrium constraints via variational analysis*, SIAM Journal on Optimization, 27 (2017), 842–865.

[32] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer, Berlin, 2003.

[33] M.I. Henig, *A cone separation theorem*, Journal of Optimization Theory and Applications, 36 (1982), 451–455.

[34] N.J. Huang, X.Q. Yang, W.K. Chan, *Vector complementarity problems with a variable ordering relation*, European Journal of Operational Research, 176 (2007), 15–26.

[35] A.D. Ioffe, J.V. Outrata, *On metric and calmness qualification conditions in subdifferential calculus*, Set-Valued and Variational Analysis, 16 (2008), 199–227.

[36] A.D. Ioffe, *Variational Analysis of Regular Mappings Theory and Applications*, Springer, Cham, 2017.

[37] A.Y. Kruger, N.H. Thao, *Quantitative characterizations of regularity properties of collections of sets*, Journal of Optimization Theory and Applications, 164 (2015), 41–67.

[38] A.Y. Kruger, D.R. Luke, N.H. Thao, *About subtransversality of collections of sets*, Set-Valued and Variational Analysis, 25 (2017), 701–729.

[39] A.Y. Kruger, D.R. Luke, N.H. Thao, *Set regularities and feasibility problems*, Mathematical Programming, 168 (2018), 279–311.

[40] S.J. Li, K.W. Meng, J.-P. Penot, *Calculus rules for derivatives of multimaps*, Set-Valued and Variational Analysis, 17 (2009), 21–39.

[41] S.J. Li, J.-P. Penot, X. Xue, *Codifferential calculus*, Set-Valued and Variational Analysis, 19 (2011), 505–536.

[42] D. Maxim, *Optimality conditions for directional efficiency in set-valued optimization*, accepted for publishing in Pacific Journal of Optimization.

[43] B.S. Mordukhovich, *Generalized Differential Calculus for Nonsmooth and Set-Valued Mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 183 (1994), 250–288.

[44] B.S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation*, Vol.I: Basic theory, Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (A Series of Comprehensive Studies in Mathematics), Vol. 330, Berlin, 2006.

[45] K.F. Ng, R. Zang, *Linear regularity and φ-regularity of nonconvex sets*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 328 (2007), 257–280.

[46] H.V. Ngai, M. Théra, *Metric inequality, subdifferential calculus and applications*, Set-Valued and Variational Analysis, 9 (2001), 187–216.

[47] J.-P. Penot, *Open mappings theorems and linearization stability*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 8 (1985), 21–35.

[48] J.-P. Penot, *Metric estimates for the calculus of multimappings*, Set-Valued and Variational Analysis, 5 (1997), 291–308.

[49] J.-P. Penot, *Compactness properties, openness criteria and coderivatives*, Set-Valued Analysis, 6 (1998), 363–380.

[50] J.-P. Penot, *Calculus without derivatives*, Springer, New York, 2013.

[51] S.M. Robinson, *Stability theory for systems of inequalities. II. Differentiable nonlinear systems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 13 (1976), 497–513.

[52] B. Soleimani, *Characterization of approximate solutions of vector optimization problems with a variable order structure*, Journal of Optimization Theory and Applications, 162 (2014), 605–632.

[53] B. Soleimani, C. Tammer, *Concepts for approximate solutions of vector optimization problems with variable order structures*, Vietnam Journal of Mathematics, 42 (2014), 543–566.

[54] B. Soleimani, C. Tammer, *Optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems with variable ordering structures,* Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 42 (2016), 5–23.

[55] N.H. Tron, D.N. Han, *Stability of generalized equations governed by composite multifunctions*, Pacific Journal of Optimization, 16 (2020), 641-662.

[56] C. Ursescu, *Tangency and openness of multifunctions in Banach spaces*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii ”Al. I. Cuza” Iaşi, 34 (1988), 221–226.

[57] P.L. Yu, *Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives*, Journal of Optimization Theory and Applications, 14 (1974), 319–377.

[58] C. Zălinescu, *Programare matematică în spaţii normate infinit dimensionale*, Editura Academiei, Bucureşti, 1998 (in Romanian).

[59] X.Y. Zheng, K.F. Ng, *Metric Subregularity and Constraint Qualifications for Convex Generalized Equations in Banach Spaces*, SIAM Journal on Optimization, 18 (2007), 437–460.

[60] W. Zu, *Set-valued perturbation stability of local metric regularity*, Pacific Journal of Optimization, 17 (2021), 175–188.