Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" Iaşi
Facultatea de Matematică

Noi contribuţii la studiul hiperstructurilor algebrice

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific:
Profesor dr. Violeta Fotea

Doctorand:
Andromeda Cristina Sonea

Iunie 2021

Cuprins

Mulţumiri

Sunt recunoscătoare în primul rând lui Dumnezeu, pentru tot ce mi-a oferit până în prezent. De asemenea, doresc să îi mulţumesc mamei mele care a fost un sprijin necondiţionat şi bunicii mele pentru cuvintele de încurajare. Un om special în viaţa mea este tatăl meu, care mă veghează de Sus. El fiind cel care m-a învăţat să tratez lucrurile cu seriozitate. În aceşti ani, a apărut în viaţa mea, copilul meu minunat, Casian. De la el am învăţat tainele răbdării şi să fructific fiecare clipă.

Acum, îmi voi întoarce privirea către cadrele didactice. Un rol important îl are coordonatorul ştiinţific, doamna profesor Violeta Fotea, care mi-a oferit sfaturi extrem de utile din punct de vedere ştiinţific, dar şi social. De asemenea, doresc să mulţumesc comisiei de îndrumare şi doamnelor secretare pentru răbdarea de care au dat dovadă de fiecare dată. În această perioadă, doamna profesor Violeta Fotea, m-a învăţat importanţa colaborărilor şi participării la conferinţe, unde am avut ocazia să cunosc profesori minunaţi cu care ulterior am colaborat. Doresc sa menţionez pe doamna profesor Irina Cristea, de la care am învăţat foarte multe şi îi mulţumesc pentru tot ajutorul, domnnii profesori Bijan Davvaz, Piergiulio Corsini şi doamnei profesor Madeline Al-Tahan.

Toate acestea nu s-ar fi putut realiza fără domnul profesor de matematică din clasele $V - XII$, Pătraşcu Enache, care m-a făcut să înţeleg frumuseţea matematicii.

Introducere

Termenul algebric de hiperstructură desemnează o generalizare adecvată a structurilor algebrice clasice, precum grup, semigrup, inel. În structurile algebrice clasice, compunerea a două elemente este un element, iar în cadrul hiperstructurii algebrice, compunerea a două elemente reprezintă o mulţime. F. Marty, a observat că elementele unui grup factor sunt mulţimi, iar acesta a fost punctul de plecare în cadrul teoriei hipergrupurilor. El a introdus conceptul de *hipergrup* în anul 1934 cu ocazia celui de-al $VIII$-lea Congres al matematicienilor din ţările scandinave [54]. De-a lungul timpului, au apărut rezultate noi şi interesante, dar mai ales începând cu anii $'70$ această teorie s-a dezvoltat foarte mult în Europa, Statele Unite, Asia şi Australia. Câteva nume sonore din acest domeniu ar fi Dresher, Ore [30], Koskas [42], Krasner [70] care au adus contribuţii în partea de homomorfisme de hipergrupuri şi în teoria subhipergrupurilor. Hipergrupurile sunt studiate din punct de vedere teoretic, dar şi pentru aplicaţiile sale în probleme de matematică pură şi aplicată: geometrie, topologie, criptografie, teoria codurilor, grafuri, hipergrafuri, teoria automatelor, grad fuzzy, probabilităţi, etc. O parte dintre aceste exemple le regăsim în [2], [27], [46], [47], [56], [81],[82], [84], [85]. În anul 1940, Prenowitz introduce şi studiază noţiunea de *join space* [63] şi împreună cu Jantosciak [64] prezintă câteva tipuri de *Geometrie (Proiectivă, Descriptivă, Sferică)* în contextul hipergrupurilor. De asemenea în studiul *inimii unui hipergrup*, un mare aport au adus Freni [34] şi Leoreanu [50], iar Koskas [43] este cel care defineşte noţiunea de *parte completă*. În cadrul teoriei hipergrupurilor, se regăsesc relaţii de echivalenţă: β, γ, numite fundamentale, pentru că stabilesc o legătură naturală între hiperstructurile algebrice şi structurile algebrice clasice [28], [29]. Relaţia β a fost introdusă de Koskas [43] şi a fost studiată în principal de Corsini [13] şi Vougiouklis [82]. Utilizând relaţia β, Migliorato [58] defineşte noţiunea de hipergrup $n-$ complet. Recent, Freni [33] introduce relaţia γ ca o generalizare a relaţiei β şi demonstrează că în hipergrupuri, relaţia γ este tranzitivă.

O clasă importantă de hipergrupuri se referă la hipergrupurile canonice, iar Mittas [59], în anul 1970 este primul care le studiază. Hipergrupurile i.p.s. reprezintă o clasă particulară de hipergrupuri canonice. O atenţie deosebită asupra lor este dată de către Corsini. Acesta determinând forma hipergrupurilor i.p.s. până la ordinul 9 [11], [16], iar împreună cu Cristea calculează gradul lor fuzzy [17], [20], [22]. Comportamentul hipergrupurilor canonice este similar cu cel al grupurilor. Hipergrupurile quasi-canonice (numite "poligrupuri" de către Comer [6], [7]) au fost introduse în [4], ca o generalizare a hipergrupurilor canonice. O parte dintre proprietăţile algebrice şi combinatoriale, au fost descoperite de către Comer [8], [12].

În cadrul tezei prezentate, s-a pus accentul pe *gradul de comutativitate* şi *funcţia lui Euler*, aspecte ce se regăsesc în cadrul teoriei grupurilor. Din punct de vedere istoric, gradul de comutativitate a fost introdus de către Gustafson [37] şi reprezintă probabilitatea ca două elemente să comute. Contribuţii în această direcţie au adus Erdös [31] şi MacHale [55], care au stabilit că în cazul grupurilor neabeliene, gradul de comutativitate este mai mic decât $\frac{5}{8}$. O clasificare a grupurilor pentru care gradul de comutativitate este mai mare de $\frac{11}{32}$ este realizată de către Rusin, în anul 1979 [67], iar în anul 2001, Lescot clasifică grupurile finite cu gradul de comutativitate $d(G)$, $d(G) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ [53]. Mai recent, Castelaz [5] a determinat încadrări ale gradului de comutativitate, pentru grupuri cu o structură particulară finită. Tărnăuceanu [80] prezintă o generalizare naturală al conceptului de subgrup comutativ într-un grup finit. În teoria grupurilor, se cunoaşte o legătura strânsă între ecuaţia claselor şi gradul de comutativitate al unui grup, prin relaţia $d(G) = \frac{k(G)}{|G|}$, unde $k(G)$ reprezintă numărul claselor de conjugare.

În teoria grupurilor, funcţia lui Euler reprezintă ordinul grupului format din elementele inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, adică $\varphi(n) = |U(\mathbb{Z}_n)|$,

$n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Rezultate în această direcţie regăsim la Garcia [35], Hall [38]. Tărnăuceanu determină funcţia lui Euler pentru clase particulare de grupuri şi legături între $\varphi(G)$, $\varphi(|G|)$ şi $|Aut(G)|$.

Teza este structurată pe şase capitole şi face trecere prin clase particulare de hipergrupuri: reversibile, complete, poligrupuri şi canonice. **Primul capitol** al acestei teze, conţine prezentarea unor noţiuni şi rezultate din teoria hipergrupurilor, care ne vor fi necesare pe parcursul tezei. S-a definit conceptul de hipergrup, identitatea unui hipergrup cu menţiunea că spre deosebire de teoria grupurilor, unde există o singură identitate, în acest context putem avea hipergrupuri cu o unică identitate, mai multe identităţi sau fără vreo identitate. Prin urmare, în ceea ce priveşte inversul unui element, situaţia este similară. De asemenea, s-a definit relaţia β care face legătura între hipergrupuri şi grupuri. Prin intermediul acestei relaţii, se introduce inima unui hipergrup, concept extrem de util în teoria hipergrupurilor. În finalul capitolului, este prezentat gradul de comutativitate al unui grup, acesta fiind punctul de plecare pentru capitolele următoare. În **capitolul doi** se face trimitere la teoria hipergrupurilor reversibile, unde am studiat subhipergrupuri importante, precum: centralizatorul unui element, centrul unui hipergrup în contextul hipergrupurilor regulate reversibile, utilizând părţi complete. Centrul unui hipergrup regulat reversibil a fost introdus de către [49]. În plus, am determinat forma ecuaţiei claselor cu ajutorul părţilor complete:

$$|H| = \sum_{i=1}^{r} |\mathcal{C}(a_i)| = \sum_{i=1}^{r} |a_i \omega_H|.$$

Capitolul al treilea este cel mai amplu din teză şi tratează diferite aspecte. După cum am observat în capitolul doi, am determinat ecuaţia claselor în context de hipergrupuri reversibile. Acelaşi lucru ne-am propus să îl studiem în limbaj de hipergrupuri complete şi a fost posibil datorită teoremei de caracterizare a hipergrupurilor complete (Teorema 6). Un hipergrup $(H, \circ)$ este complet, dacă şi numai dacă este de tipul $H = \bigcup\limits_{g \in G} A_g$, unde G şi A_g satisfac condiţiile:

(1) G este un grup;

(2) Oricare ar fi $g_1 \neq g_2$ avem $A_{g_1} \cap A_{g_2} = \emptyset$;

(3) dacă $(a, b) \in A_{g_1} \times A_{g_2}$, atunci $a \circ b = A_{g_1 g_2}$.

Observăm că prin intermediul teoremei, se obţine o legătură strânsă cu teoria grupurilor. Aşadar, forma ecuaţiei claselor în acest context, este următoarea (Teorema 8):

$$|H| = |\omega_H| + \sum_{a \notin \omega_H} |[a]|.$$

În cadrul celei de-a doua şi de-a treia secţiuni, ne-a interesat să calculăm gradul de comutativitate al unui hipergrup complet şi să determinăm o legătură cu ecuaţia claselor, pentru că un astfel de principiu îl regăsim în teoria grupurilor (Teorema 9) : Dacă $(H, \circ)$ este un hipergrup finit asociat grupului G şi are loc $|C_H(x)| = |C_H(y)|$, pentru orice $y \in [x]$, atunci gradul de comutativitate al hipergrupului complet H este

$$d(H) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k(H)} |[x_i]| \cdot |C_H(x_i)|}{|H|^2},$$

unde $k(H)$ reprezintă numărul de clase de conjugare distincte $[x_i]$ ale elementelor din H astfel încât $H = \bigcup\limits_{i=1}^{k(H)} [x_i]$. Prin urmare, observăm că pentru a stabili o legătura între gradul de comutativitate şi ecuaţia claselor din teoria hipergrupurilor complete este nevoie de o condiţie suplimentară ($|C_H(x)| = |C_H(y)|$, pentru orice $y \in [x]$), ceea ce în teoria grupurilor, nu se întâmplă. În secţiunea a patra, am încercat să dăm un răspuns la următoarea întrebare: ”Putem caracteriza hipergrupurile complete comutative prin intermediul gradului de comutativitate?”, aşa cum în cadrul teoriei grupurilor există un răspuns afimativ pentru grupurile abeliene. Ideea a fost aceea de a determina valoarea maximă a funcţiei $d(H)$ (Teorema 10)

$$d(H) = (d(G) - 1)\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1.$$

În secţiunea cinci, am studiat un alt aspect important şi anume asocierea relaţiilor binare cu hipergrupurile. Până în prezent, au fost studiate multe legături între hiperstructuri şi relaţiile binare, de către Rosenberg

[66], Corsini [8], [12], Leoreanu [19], Jantosciak [45], Cristea [23]. Scopul acestei secţiuni a fost acela de a asocia relaţia de conjugare (Definiţia 8) cu hipergrupurile de tip Rosenberg [66]. De asemenea, în secţiunile şase şi şapte, se introduce Funcţia lui Euler în teoria hipergrupurilor complete. Corsini [9] caracterizează hipergrupurile complete şi Cristea [20], [21] studiază gradul fuzzy pentru ele. În acest context, comportamentul periodicităţii unui element este acelaşi cu ordinul unui element dintr-un grup [18], [61]. Utilizând Teorema de Caracterizare (Teorema 6) pentru hipergrupurile complete şi definiţia pentru periodicitatea unui element (Definiţia 20), se determină o legătură cu teoria grupurilor:

$$\varphi(H) = \sum_{o(g)=\exp(G)} |A_g|,$$

unde $o(g)$ reprezintă ordinul elementului g în grupul G. De asemenea, pentru cazul în care $G = \mathbb{Z}_n$, s-a stabilit o conexiune între funcţia lui Euler asociată hipergrupului complet şi subhipergrupurilor sale (Teorema 13)

$$\sum_{\substack{d|n \\ d \neq \{1,n\}}} \varphi\left(\mathcal{K}_d\right) = |H| - |\omega_H| - \varphi\left(H\right),$$

unde ω_H şi $\varphi\left(H\right)$ reprezintă inima, respectiv funcţia lui Euler asociată hipergrupului complet H. În finalul capitolului, s-a acordat o atenţie deosebită asupra grupurilor HX asociate grupului diedral D_n. Studiul hipergrupurilor HX a fost realizat de către Honghai şi Hong-xing [40], [41]. Zahedi [83] analizează proprietăţile HX grupurilor, iar mai târziu, Corsini determină grupurile HX asociate cu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [14], [15]. **Capitolul al patrulea** este dedicat teoriei poligrupurilor. În acest context, se studiază gradul de comutativitate pentru poligrupul P_G (Definiţia 42) şi asupra extinderii de poligrupuri prin poligrupuri (Definiţia 70). Probabilitatea ca un element dintr-un subgrup să comute cu un element dintr-un grup, a fost studiată de către Efrain [32] şi poartă numele de gradul de comutativitate relativ. Pornind de la acest concept, se generalizează gradul de comutativitate relativ în contextul poligrupurilor finite. Spre deosebire de teoriile prezentate anterior, se introduce matricea comutativă asociată unui poligrup (Definiţia 45) şi matricea comutativă relativă asociată unui subpoligrup pentru un poligrup finit (Definiţia 54). De asemenea, se observă că există rezultate în teoria grupurilor care nu au loc în teoria poligrupurilor. În ceea ce priveşte **capitolul al cincilea**, atenţia cade asupra unei noi clase de hipergrupuri şi anume, hipergrupurile canonice. Particularitatea acestor hipergrupuri constă în faptul că sunt comutative. Prin urmare, studiul gradului de comutativitate nu mai este relevant. Pentru început, se arată că principiul din teoria poligrupurilor, cel al extinderii, se poate scrie şi în limbaj de hipergrupuri canonice (Teorema 24). În plus, se aplică funcţia lui Euler pentru un hipergrup canonic particular C_n şi asupra extinderii. Se determină legături între funcţia lui Euler asociată unui hipergrup şi cea asociată extinderii (Corolar 2, Teorema 26). De asemenea, dacă ne raportăm la clasa hipergrupurilor i.p.s., ce reprezintă o clasă particulară de hipergrupuri canonice, atunci se arată că extinderea hipergrupurilor i.p.s. este tot un hipergrup i.p.s. şi poate fi privită ca o modalitate de construcţie, ceea ce este foarte util.

Finalul tezei, **capitolul şase**, conţine concluziile şi câteva probleme deschise pentru cercetarea viitoare.

CAPITOLUL 1

Teoria hipergrupurilor reversibile

În acest capitol, se prezintă rezultate obţinute de către autorii Fotea, Corsini, Sonea, Heidari [51], unde se introduce relaţia de conjugare în cadrul teoriei hipergrupurilor reversibile. De asemenea, se studiază anumite subhipergrupuri fundamentale, ca centralizatorul unui element, centrul unui hipergrup, utilizând părţi complete. Centrul unui hipergrup regulat reversibil a fost introdus de către Leoreanu [49], dar aici se propune o definiţie echivalentă şi se obţin rezultate noi. Inima unui hipergrup regulat reversibil a fost studiată de către Leoreanu în [50], iar centrul şi centralizatorul unui element în poligrupuri de către Davvaz, [25].

1. Părţi complete

În cele ce urmează, se consideră $(H, \cdot)$ un hipergrup regulat reversibil. Pentru început, în [26] (Teoremele 4.2.7 şi 4.2.11) este demonstrat că $\mathcal{C}(a) = \beta(a)$. Acest lucru poate fi arătat independent astfel.

LEMA 1. *Fie H un hipergrup. Atunci $\mathcal{C}(a) = \beta(a)$, pentru orice a ce aparţine lui H.*

Conform lemei anterioare, avem $\mathcal{C}(ab) = \beta(x)$, pentru orice $x \in ab$. Din lema de mai sus, se obţine următorul rezultat.

COROLAR 2. *Fie a, b, c, d elemente ale lui H.*

i) *Dacă $\mathcal{C}(a) \cap \mathcal{C}(b) \neq \emptyset$ atunci $\mathcal{C}(a) = \mathcal{C}(b)$;*
ii) *Dacă $\mathcal{C}(a) \cap \mathcal{C}(bcd) \neq \emptyset$ atunci $a \in \mathcal{C}(bcd)$;*
iii) *Dacă $\mathcal{C}(ab) \cap \mathcal{C}(cd) \neq \emptyset$ atunci $\mathcal{C}(ab) = \mathcal{C}(cd)$;*
iv) *Dacă $\mathcal{C}(\prod_{i=1}^{n} a_i) \cap \mathcal{C}(\prod_{i=j}^{m} b_j) \neq \emptyset$ atunci $\mathcal{C}(\prod_{i=1}^{n} a_i) = \mathcal{C}(\prod_{i=j}^{m} b_j)$.*

OBSERVAŢIE 3. $\{\mathcal{C}(a) \mid a \in H\} = \{\mathcal{C}(a_i)\}_{i=1}^{r}$ *este o partiţie a lui* H.

În cele ce urmează, definim următoarea relaţie în H:

$a \sim b$ dacă şi numai dacă există $c \in H$ astfel încât $\mathcal{C}(ca) = \mathcal{C}(bc)$.

TEOREMĂ 1. *Relaţia "* $\sim$ *" este o relaţie de echivalenţă.*

Se notează cu $[a]$, clasa de conjugare a unui element a din H. Are loc

$$[a] = \{b \in H \mid \text{ există } c \in H : \mathcal{C}(ca) = \mathcal{C}(bc)\},$$

sau echivalent prin Corolar 2, *ii*)

$$[a] = \{b \in H \mid \text{ există } c \in H : b \in \mathcal{C}(cac'), \text{unde } c' \in i(c)\},$$

de unde

$$[a] = \bigcup_{c \in H, c' \in i(c)} \mathcal{C}(cac').$$

TEOREMĂ 2. *Dacă* $u \in cac'$, *unde* $c' \in i(c)$, *atunci* $\mathcal{C}(cac') = \mathcal{C}(u)$.

Demonstraţie Rezultă din Lema 1. ∎

2. Ecuaţia claselor

DEFINIŢIE 4. *Fie* $(H, \cdot)$ *un hipergrup regulat reversibil. Următoarea mulţime*

$$Z(H) = \{a \in H \mid \forall b \in H,\ \mathcal{C}(ab) = \mathcal{C}(ba)\}$$

se numeşte centrul lui H.

TEOREMĂ 3. $Z(H)$ *este o parte completă şi un subhipergrup normal în hipergrupul regulat şi reversibil* H.

OBSERVAŢIE 5. *Dacă* $Z(H) = H$, *atunci grupul cât* H/β *este comutativ. Acest lucru nu înseamnă că* H *este comutativ, aşa cum se poate vedea în următorul exemplu.*

Următorul exemplu satisface observaţia anterioară.

EXEMPLU 6. *Se consideră* $H = (\{1,2\}, \circ)$, *unde* $\circ$ *se defineşte astfel*

$\circ$	1	2
1	1	2
2	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

Se observă că H *este cel mai mic hipergrup necomutativ pentru care* $Z(H) = H$.

OBSERVAŢIE 7. *Conform Corolarului 2, pentru orice* $a \in H$, *clasa de conjugare a elementului* a *este*

$$[a] = \bigcup_{c \in H, c' \in i(c)} \mathcal{C}(cac').$$

TEOREMĂ 4. *Fie* $c, d \in H$, $c' \in i(c), d' \in i(d)$. $\mathcal{C}(cac') = \mathcal{C}(dad')$ *dacă şi numai dacă* $cC_H(a) = dC_H(a)$.

TEOREMĂ 5. *Dacă* H *este un hipergrup finit regulat reversibil, atunci are loc*

$$|H| = |\{[a] \mid a \in H\}|.$$

Pentru $a \in Z(H)$, *avem*

$$[a] = \mathcal{C}(a) = a\omega_H.$$

Dacă $a \in H - Z(H)$, *atunci*

$$[a] = \bigcup_{c \in H, c' \in i(c), u \in cac'} \mathcal{C}(u).$$

Prin urmare, se obţine din nou o partiţie $\{\mathcal{C}(a_i)\}_{i=1}^{r}$ a lui H.

În concluzie, **ecuaţia claselor** în cadrul teoriei hipergrupurilor regulate reversibile devine:

$$|H| = \sum_{i=1}^{r} |\mathcal{C}(a_i)| = \sum_{i=1}^{r} |a_i\omega_H|. \tag{2.1}$$

CAPITOLUL 2

Teoria hipergrupurilor complete

În teoria grupurilor, s-a prezentat *gradul de comutativitate al unui grup*, iar acesta reprezintă punctul de plecare al studiului făcut în teoria hipergrupurilor complete. Am ales această teorie, pentru că prin intermediul Teoremei de caracterizare 6, găsim o legătură puternică cu teoria grupurilor. Prin urmare, putem observa asemănări, dar şi diferenţe cu rezultatele din teoria grupurilor. În cadrul capitolului, am determinat o corespondenţă între ecuaţia claselor şi gradul de comutativitate al unui hipergrup complet. Aceste rezultate se regăsesc în articolul publicat de către Mathematics, scris de Sonea şi Cristea [74]. De asemenea, am găsit o legătură între relaţiile introduse de către Jantosciak [45] şi relaţia de conjugare. În plus, am asociat unui hipergrup de tip Rosenberg [66], relaţia de conjugare introdusă la începutul capitolului. Toate aceste rezultate se află în lucrarea scrisă de Fotea, Corsini, Sonea şi Heidari [51]. Un alt aspect care ne-a interesat, a fost acela de a introduce faimoasa funcţie a lui Euler în acest context, pentru a determina similitudini cu funcţia lui Euler din cadrul teoriei grupurilor [78]. Rezultatele apar în lucrarea scrisă de către Sonea [75]. În finalul capitolului sunt prezentate rezultate ce fac trimitere la Grupurile HX asociate grupului diedral D_n. Acestea se află în articolul publicat de Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, Sonea [72].

1. Ecuaţia claselor

În cadrul acestei secţiuni, vom defini noţiunea de element conjugat, clasa de conjugare a unui element. Scopul fiind de a enunţa *ecuaţia claselor.* Punctul de plecare îl va constitui modalitatea de reprezentare a unui hipergrup complet. Vom enunţa Teorema de caracterizare a unui hipergrup complet.

TEOREMĂ 6. [21] *Un hipergrup* $(H, \circ)$ *este complet, dacă şi numai dacă este de tipul* $H = \bigcup_{g \in G} A_g$, *unde* G *şi* A_g *satisfac condiţiile:*

(1) G *este un grup;*
(2) *Oricare ar fi* $g_1 \neq g_2$ *implică* $A_{g_1} \cap A_{g_2} = \emptyset$;
(3) *dacă* $(a, b) \in A_{g_1} \times A_{g_2}$, *atunci* $a \circ b = A_{g_1 g_2}$.

TEOREMĂ 7. [9] *Fie* $(H, \circ)$ *un hipergrup complet. Atunci:*
(1) ω_H *este mulţimea identităţilor bilaterale ale lui* H.
(2) H *este regulat şi reversibil.*

Conform Teoremei 6, este cunoscut faptul că $\omega_H = A_e$, unde e reprezintă elementul neutru al grupului G.

În cele ce urmează se introduce noţiunea de ”conjugare” în teoria hipergrupurilor complete şi cu ajutorul ei se determină ecuaţia claselor.

DEFINIŢIE 8. *Fie* $(H, \circ)$ *un hipergrup complet. Spunem că elementele* a *şi* b *sunt conjugate şi notăm acest lucru prin* $a \sim_H b$, *dacă există* $c \in H$ *astfel încât are loc:*

$$\mathcal{C}(c \circ a) \cap \mathcal{C}(b \circ c) \neq \emptyset.$$

OBSERVAŢIE 9. [9], [57] *Cum* $(H, \circ)$ *este un hipergrup complet, rezultă că*

$$\mathcal{C}(a \circ b) = a \circ b,$$

pentru orice a, b *ce aparţin lui* H.

Prin urmare, Definiţia 8 se poate scrie astfel.

DEFINIŢIE 10. *Fie* $(H, \circ)$ *un hipergrup complet. Spunem că elementele* a *şi* b *sunt conjugate şi notăm acest lucru prin* $a \sim_H b$, *dacă există* $c \in H$ *astfel încât are loc:*

$$c \circ a \cap b \circ c \neq \emptyset.$$

PROPOZIŢIE 11. *Relaţia* $a \sim_H b$, *definită anterior, este o relaţie de echivalenţă.*

COROLAR 12. *Se notează clasa de conjugare a unui element din H, astfel.*

$$[a] = \{b \in H| \ \exists \ c \in H : \mathcal{C}\,(c \circ a) \cap \mathcal{C}\,(b \circ c) \neq \emptyset\}\,.$$

PROPOZIŢIE 13. *Dacă $(H, \circ)$ este un hipergrup complet, atunci $a \sim_H b$ dacă şi numai dacă $g_1 \sim_G g_2$, unde $a \in A_{g_1}$ şi $b \in A_{g_2}$.*

PROPOZIŢIE 14. *Dacă $(H, \circ)$ este un hipergrup complet şi $a \in H$, atunci*

$$|[a]| = \sum_{g_i \sim_G g} |A_{g_i}|\,, \tag{1.1}$$

unde $a \in A_g$ cu $g \in G$.

După cele afirmate anterior, se enunţă teorema cu privire la ecuaţia claselor.

TEOREMĂ 8. *În orice hipergrup complet $(H, \circ)$ are loc următoarea egalitate*

$$|H| = |\omega_H| + \sum_{a \notin \omega_H} |[a]|\,, \tag{1.2}$$

ce poartă numele de ecuaţia claselor.

O consecinţă imediată a rezultatului prezentat în Propoziţia 13 constă în caracterizarea hipergrupului complet H, cu un grup abelian.

PROPOZIŢIE 15. *Dacă $(H, \circ)$ este un hipergrup complet şi G este un grup abelian ce se regăseşte în reprezentarea hipergrupului, atunci are loc $[a] = A_g$, unde $a \in A_g$.*

2. Gradul de comutativitate

În studiul hipergrupurilor complete, am observat că apare noţiunea de grup. Scopul acestei secţiuni este acela de a defini noţiunea *gradul de comutativitate* al unui hipergrup complet şi de a determina legătura cu gradul de comutativitate al unui grup [5], [80].

Fie $(H, \circ)$ un hipergrup complet cu $|H| = m$ şi grupul G ce face parte din reprezentarea lui H, cu $|G| = n$, unde n, $m \in \mathbb{N}$, n, $m \geq 2$. Definim gradul de comutativitate în mod similar ca în teoria grupurilor, mai precis, probabilitatea ca două elemente din hipergrup să comute. Altfel spus, avem următorul raport:

$$d(H) = \frac{\left|\{(a,b) \in H^2 \middle| \ a \circ b = b \circ a\}\right|}{|H|^2}.$$

Legătura dintre gradul de comutativitate al unui hipergrup complet şi gradul de comutativitate al grupului ce caracterizează hipergrupul complet H este dată de următoarea relaţie

$$\begin{aligned} d(H) &= \frac{d(G)|G|^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i^2 + 2m_1(m - m_1) - n - 2(n-1) + c(i,j)}{m^2} \\ &= d(G)\left(\frac{n}{m}\right)^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i^2 + +2m_1(m - m_1) - 3n + 2 + c(i,j)}{m^2}. \end{aligned}$$

În cele ce urmează, vom exprima gradul de comutativitate al unui hipergrup complet $d(H)$, în funcţie de clasele de conjugare ale elementelor din H. În teoria grupurilor, se cunoaşte faptul că gradul de comutativitate al unui grup G se poate determina cu ajutorul numărului claselor de conjugare astfel $d(G) = \frac{k(G)}{|G|}$, unde $k(G)$ reprezintă numărul de clase de conjugare disjuncte ale elementelor din G, [5]

În cadrul teoriei hipergrupurilor complete vom explica de ce şi cum această formulă se schimbă.

TEOREMĂ 9. *Dacă* $(H, \circ)$ *este un hipergrup finit reprezentat de grupul* G *şi are loc* $|C_H(x)| = |C_H(y)|$, *pentru orice* $y \in [x]$, *atunci gradul de comutativitate al hipergrupului complet* H *este*

$$d(H) = \frac{\sum_{i=1}^{k(H)} |[x_i]| \cdot |C_H(x_i)|}{|H|^2}, \tag{2.1}$$

unde $k(H)$ *reprezintă numărul de clase de conjugare distincte* $[x_i]$ *ale elementelor din* H *şi astfel* $H = \bigcup_{i=1}^{k(H)} [x_i]$.

3. Maximul funcţiei $d(H)$

În cadrul teoriei grupurilor, există un rezultat extrem de important care caracterizează grupurile abeliene cu ajutorul gradului de comutativitate. Mai precis, există o constantă $c = \frac{5}{8}$ în care, dacă $d(G) > c$, atunci G este un grup abelian. Ideea acestei secţiuni este de a încerca să aflăm o astfel de constantă în cadrul teoriei hipergrupurilor complete sau de a arăta că nu există un rezultat similar în acest context. De aceea, vom determina valoarea maximă a gradului de comutativitate pentru un hipergrup complet.

TEOREMĂ 10. *Dacă* $(H, \circ)$ *este un hipergrup complet cu* $|H| = m$ *şi reprezentarea dată de grupul* G *cu* $|G| = n$*, unde* m*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $m, n \geq 2$*, atunci*

$$d(H) = (d(G) - 1)\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1$$

reprezintă valoarea maximă pentru $d(H)$.

În cele ce urmează, se va considera grupul diciclic D_p ce caracterizează hipergrupul complet H şi se va realiza un tabel cu valorile maxime pe care le poate lua $d(H)$ în anumite situaţtii. Fie grupul diciclic,

$$D_p =< a, b;\ a^{2p} = b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1},\ a^p = b^2 >,$$

$p \in \mathbb{N}^*$. Gradul de comutativitate al grupului diciclic este $d(D_p) = \frac{p+3}{4p}$, [5]. Vom calcula valoarea maximă pe care o poate lua un hipergrup complet, având grupul diciclic drept suport, unde $p \in \{3, 10, 20, 30\}$, iar $m = |H|$ îl vom considera cu valori din 50 în 50. Scopul fiind de a observa mai clar comportamentul expresiei $d(H)$ şi pentru valori mai mari ale lui m.

m	dH_{D_3}	$dH_{D_{10}}$	$dH_{D_{20}}$	$dH_{D_{30}}$
10	0.8200	$-$	$-$	$-$
60	0.9950	$0,9250$	$0,6833$	$0,2750$
110	0.9985	$0,9777$	$0,9058$	$0,7843$
160	0.9993	$0,9895$	$0,9555$	$0,8980$
210	0.9996	$0,9939$	$0,9741$	$0,9408$
260	0.9997	$0,9960$	$0,9831$	$0,9614$
310	0.9998	$0,9972$	$0,9881$	$0,9728$
360	$0,9999$	$0,9979$	$0,9912$	$0,9799$
410	$0,9999$	$0,9984$	$0,9932$	$0,9845$
460	$0,9999$	$0,9987$	$0,9946$	$0,9877$

Se observă că pentru un grup fixat G cu $|G| = n$, $d(H)$ creşte şi tinde spre 1. Conform tabelului de mai sus, se propune următoarea conjecutură.

CONJECTURĂ 16. *Dacă* $(H, \circ)$ *este un hipergrup complet, cu gradul de comutativitate* $d(H)$, *atunci nu există o constantă cu ajutorul căreia să putem caracteriza hipergrupurile complete finite comutative.*

4. Hipergrupuri Rosenberg asociate relaţiei de conjugare $''\sim_H''$

În această secţiune, se acordă o atenţie deosebită relaţiilor de echivalenţă introduse de către Jantosciak [45]: operaţională, de inseparabilitate şi esenţială. Acesta le-a numit fundamentale, dar nu au aceeaşi proprietate ca celelalte relaţii fundamentale: β, γ, care conduc prin factorizare la o structură clasică. În cazul relaţiilor date de Jantosciak, factorizând un hipergrup la relaţia esenţială, se obţine un hipergrup redus, [23], [48]. Ideea secţiunii este de a aplica relaţiile enunţate de Jantosciak în cadrul hipergrupurilor complete, studiate anterior şi de a determina o corespondenţă cu relaţia de conjugare. De asemenea, vom asocia unui hipergrup complet, hipergrupul de tip Rosenberg [66] înzestrat cu relaţia de conjugare şi vom determina legături cu relaţiile menţionate. Rezultatele se regăsesc în articolul scris de Fotea, Corsini, Sonea şi Heidari [51].

Fie R o relaţie binară pe mulţimea H, $R \subset H \times H$ şi pentru orice $(x, y) \in H^2$, are loc

$$x \circ y = \{z \in H |\, (x, z) \in R \text{ sau } (y, z) \in R\}.$$

Prin H_R se va înţelege $H_R = (H, \circ)$ care poate fi hipergrupoid, semi-hipergrup, hipergrup şi join space, în funcţie de relaţia R.

Clar, se observă

$$\begin{aligned} x \circ x &= \{y \in H |\ (x, y) \in R\}; \\ x \circ y &= x \circ x \cup y \circ y. \end{aligned}$$

Asupra hipergrupoidului $(H, \circ)$ au fost introduse trei relaţii de echivalenţă de către Jantosciak , vezi [45].

Relaţia operaţională, notată " $\sim_o$ " definită astfel

$$x \sim_o y \Leftrightarrow a \circ x = a \circ y;\ x \circ a = y \circ a;\ \forall\ a \in H.$$

Relaţia de inseparabilitate, notată " $\sim_i$ " în modul următor

$$x \sim_i y \Leftrightarrow \text{ pentru } a,\, b \in H,\, x \in a \circ b \Leftrightarrow y \in a \circ b.$$

Relaţia esenţial distinctă, notată " $\sim_e$ "

$$x \sim_e y \Leftrightarrow x \sim_o y \text{ şi } x \sim_i y.$$

Prin $\hat{x}_o$, $\hat{x}_i$, respectiv $\hat{x}_e$ vom înţelege clasa de echivalenţă a lui x în raport cu operaţiile " $\sim_o$ ", " $\sim_i$ ", respectiv " $\sim_e$ ". Scopul este acela de a determina o legătură între aceste relaţii de echivalenţă şi relaţia de conjugare în cadrul hipergrupurilor complete, definită în Capitolul 2. Prin urmare, vom ilustra o serie de rezultate.

Propoziţie 17. *Dacă $(H, \circ)$ este un hipergrup complet, iar G este grupul din teorema de reprezentare a lui H, atunci :*

$$\hat{x}_o = \hat{x}_i = \hat{x}_e = A_g^x,\ \textit{unde } g \in G \textit{ şi } x \in A_g. \tag{4.1}$$

În cele ce urmează, vom asocia hipergrupului complet H, hipergrupul Rosenberg în raport cu relaţia de conjugare " $\sim_H$ ", renotată prin ρ .

Fie $(H_\rho, \circ_\rho)$ hipergrupul Rosenberg, cu hiperoperaţia " $\circ_\rho$ " definită astfel

$$x \circ_\rho y = \{z \in H |\ (x, z) \in \rho \text{ sau } (y, z) \in \rho\}. \tag{4.2}$$

Aşadar,

$$x \sim_{o_\rho} y \Leftrightarrow a \circ_\rho x = a \circ_\rho y;\ x \circ_\rho a = y \circ_\rho a;$$

oricare ar fi $a \in H_\rho$. Cum H_ρ este un hipergrup comutativ, vom trata doar una dintre situaţii, deoarece sunt echivalente.

PROPOZIŢIE 18. *Fie $(H_\rho, \circ_\rho)$ hipergrupul asociat hipergrupului complet H. Are loc*

$$x \sim_{o_\rho} y \text{ dacă şi numai dacă } (x, y) \in \rho.$$

PROPOZIŢIE 19. *Fie $(H_\rho, \circ_\rho)$ hipergrupul asociat hipergrupului complet H. Are loc*

$$x \sim_i y, \text{ dacă şi numai dacă } (x, y) \in \rho.$$

5. Funcţia lui Euler asociată hipergrupurilor complete

Această secţiune tratează un nou subiect, care se regăseşte în teoria grupurilor, teoria numerelor, dar care nu apare până acum în teoria hipergrupurilor. Se introduce funcţia lui Euler, scopul fiind acela de a studia asemănări şi deosebiri cu rezultatele deja cunoscute din teoria grupurilor.

Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $a \in G$. Funcţia lui Euler este reprezentată astfel [78]

$$\varphi(G) = |\{a \in G|\ o(a) = \exp(G)\}|,$$

unde $o(a)$ reprezintă ordinul elementului a în grupul finit G, iar exponentul unui grup este cel mai mic multiplu comun al tuturor ordinelor elementelor din grup.

În cele ce urmează, se defineşte funcţia lui Euler în cadrul teoriei hipergrupurilor şi se observă în ce condiţii proprietăţile prezentate anterior au loc în acest context. Acest subiect va fi tratat în capitolele următoare pentru clasa hipergrupurilor canonice şi hipergrupurilor i.p.s.. Rezultatele din cadrul acestei secţiuni, se regăsesc în articolul Sonea [75]. În cadrul teoriei hipergrupurilor, nu apare noţiunea de ordin al unui element şi prin urmare, se utilizează noţiunea de periodicitate, care se regăseşte în cadrul teoriei hipergrupurilor ciclice [13].

Fie $(H, \cdot)$ un hipergrup.

DEFINIŢIE 20. [13] *Un element x al unui hipergrup H se numeşte periodic, dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^k \subseteq \omega_H$.*

Notăm

$$p(x) = \min\{k \in \mathbb{N} |\ x^k \subseteq \omega_H\} \tag{5.1}$$

şi numim k perioada elementului x.

Prin urmare, într-un mod similar teoriei grupurilor, se defineşte funcţia lui Euler în următorul mod

$$\varphi(H) = |\{x \in H |\ p(x) = \exp(H)\}|, \tag{5.2}$$

unde $\exp(H)$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al tuturor periodicităţilor elementelor din hipergrup:

$$exp(H) = [p_1, p_2, ..., p_k],\ p(a_i) = p_i,\ a_i \in H,\ i = \overline{1, k}.$$

Hipergrupurile complete au fost introduse de către Corsini [9] şi reprezintă acele hipergrupuri regulate şi reversibile, pentru care $C(x \circ y) = x \circ y$, oricare ar fi $x, y \in H$.

PROPOZIŢIE 21. *Fie $(H, \circ)$ un hipergrup complet şi G, grupul ce se regăseşte în teorema de reprezentare pentru hipergrupul H, atunci are loc*

$$p(x) = o(g),\ x \in A_g.$$

Prin urmare, în cadrul teoriei hipergrupurilor complete, funcţia lui Euler are următoarea formă:

$$\begin{aligned} \varphi(H) &= |\{x \in H |\ p(x) = \exp(H)\}| \\ &= \left| \left\{ x \in \bigcup_{g \in G} A_g \mid o(g) = \exp(G), x \in A_g \right\} \right|. \end{aligned} \tag{5.3}$$

În concluzie,

$$\varphi(H) = \sum_{o(g) = \exp(G)} |A_g|. \tag{5.4}$$

OBSERVAŢIE 22. *$\varphi(H) \geq \varphi(G)$, unde G este grupul din teorema de reprezentare a hipergrupului complet.*

PROPOZIŢIE 23. *Dacă* $(H_1, \circ_1)$, $(H_2, \circ_2)$ *sunt hipergrupuri complete, atunci* $(H_1 \times H_2, \otimes)$ *este de asemenea un hipergrup complet, unde*

$$\begin{aligned} " \otimes " &: (H_1 \times H_2) \times (H_1 \times H_2) \to \mathcal{P}^* (H_1 \times H_2) \\ (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) &= \left\{ (a, b) \in (H_1 \times H_2)^2 \mid a \in a_1 \circ_1 a_2,\ b \in b_1 \circ_2 b_2 \right\}. \end{aligned}$$

PROPOZIŢIE 24. *Fie* H_1, H_2 *hipergrupuri complete. Atunci are loc:*

$$\omega_{H_1 \times H_2} = \omega_{H_1} \times \omega_{H_2}.$$

TEOREMĂ 11. *Dacă* $(H_1, \circ_1)$, $(H_2, \circ_2)$ *sunt două hipergrupuri complete, iar* $(G_1, \cdot_1)$ *şi* $(G_2, \cdot_2)$ *grupurile finite din teorema de reprezentare cu ordinele prime între ele, atunci funcţia* φ *este multiplicativă:*

$$\varphi (H_1 \times H_2) = \varphi (H_1) \varphi (H_2).$$

În cele ce urmează, scopul este acela de a calcula valoarea funcţiei lui Euler pentru un hipergrup complet dat, cu ajutorul subhipergupurilor sale. Pentru aceasta, se enunţă următoarea propoziţie.

TEOREMĂ 12. *Fie* $(H, \circ)$ *un hipergrup complet şi* G *grupul ce caracterizează hipergrupul* H*. Atunci* K *este subgrup al grupului* G*, dacă şi numai dacă* $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{k \in K} A_k$ *este subhipergrup al hipergrupului complet* H*.*

DEFINIŢIE 25. *Fie* $(H, \circ)$ *un hipergrup şi* K*, subhipergrup al lui* H*. Spunem că* K *este un subhipergrup închis, dacă au loc condiţiile: pentru orice* $a, b \in K$ *şi oricare* $x \in H$*, are loc*

$$\begin{aligned} a &\in b \circ x \Rightarrow x \in K \\ a &\in x \circ b \Rightarrow x \in K. \end{aligned} \tag{5.5}$$

PROPOZIŢIE 26. *Dacă* $(H, \circ)$ *un hipergrup complet şi* $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{k \in K} A_k$ *subhipergrup al lui* H*, atunci* $\mathcal{K}$ *este un subhipergrup închis al hipergrupului* H*.*

6. Exemplu $G = (\mathbb{Z}_n, +)$

În această secţiune, ne propunem să determinăm legătura dintre $\varphi (H)$ şi $\varphi (\mathcal{K})$, unde $\mathcal{K}$ este subhipergrup al hipergrupului complet H şi este definit ca în Teorema 12.

Subgrupurile grupului ciclic $(\mathbb{Z}_n,+)$ sunt de forma $H_d =< \overline{\left(\frac{n}{d}\right)} >$ cu $|H_d| = d$, $d \in \mathbb{N}^*$ şi $d|n$. Conform Teoremei 12, subhipergrupurile hipergrupului complet H vor avea următoarea formă

$$\mathcal{K}_d = \bigcup_{\alpha=0}^{d-1} A_{\left(\alpha\cdot\overline{\left(\frac{n}{d}\right)}\right)}. \tag{6.1}$$

Următorul rezultat stabileşte legătura dintre funcţia lui Euler asociată hipergrupului complet şi funcţia lui Euler asociată subhipergrupurilor sale.

Propoziţie 27. *Fie $(H,\circ)$ un hipergrup complet şi subhipergrupurile $\{\mathcal{K}_d\}_{d|n}$, $d \neq \{1,n\}$ definite în relaţia (6.1). Atunci*

$$\varphi\left(\mathcal{K}_d\right) = \sum_{(\alpha,d)=1} \left| A_{\left(\alpha\cdot\overline{\left(\frac{n}{d}\right)}\right)} \right|.$$

Teoremă 13. *Dacă $(H,\circ)$ este un hipergrup complet finit, iar G este grupul claselor de resturi modulo n, atunci*

$$\sum_{\substack{d|n \\ d\neq\{1,n\}}} \varphi\left(\mathcal{K}_d\right) = |H| - |\omega_H| - \varphi\left(H\right). \tag{6.2}$$

Observaţie 28. *Dacă n este număr prim, atunci*

$$\sum_{\substack{d|n \\ d\neq\{1,n\}}} \varphi\left(\mathcal{K}_d\right) = 0,$$

ceea ce implică $\varphi\left(H\right) = |H| - |\omega_H|$.

7. Grupurile HX asociate grupului diedral D_n

În această secţiune, vom prezenta rezultate din articolul publicat în Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, scris de Sonea [72]. Studiul hipergrupurilor HX a fost realizat de către matematicieni chinezi, precum Honghai şi Hongxing [40], [41]. Ulterior, noţiunea a fost utilizată de către italianul Piergiulio Corsini, care a determinat grupurile

HX asociate cu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ [10], [14], [15]. Acesta fiind punctul de plecare al articolului ce urmează a fi prezentat.

DEFINIŢIE 29. [14] *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup şi* $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}^*(G) \backslash \{\varnothing\}$, *unde* $\mathcal{P}^*(G)$ *reprezintă mulţimea tuturor submulţimilor nevide ale lui* G. $(\mathcal{G}, *)$ *este un* HX*-grup, dacă este grup în raport cu operaţia* " $*$ ". *Pentru orice* $A, B \in \mathcal{G}$,

$$A \star B = \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\}. \tag{7.1}$$

Grupul $\mathcal{G}$ *are drept suport grupul* G.

DEFINIŢIE 30. [14] *Fie* $\mathcal{G}$ *un* HX*-grup, cu suportul* G. *Dacă* e *şi* E *reprezintă identitatea grupului* G, *respectiv identitatea grupului* $\mathcal{G}$, *atunci grupul* $\mathcal{G}$ *se numeşte regulat, dacă* $e \in E$.

PROPOZIŢIE 31. [15] *Fie* $\mathcal{G}$ *un* HX*-grup cu suportul* G. *Dacă* E *este identitatea grupului* $\mathcal{G}$, *atunci avem:*

$$|A| = |E|;$$
$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow |A \cap B| = |E|,$$

oricare ar fi $A, B \in \mathcal{G}$.

DEFINIŢIE 32. [15] *Fie* $(\mathcal{G}, \star)$ *un* HX*-grup cu suportul* $(G, \cdot)$ *şi* E *identitatea grupului* $\mathcal{G}$. *Numim hipergrupoid chinez,* $< G^*, \oplus >$, *unde*

$$G^* = \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \text{ şi pentru orice } (x, y) \in G^* \times G^*,\ x \oplus y = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B \\ \{A,B\} \subset \mathcal{G}}} A \star B.$$

PROPOZIŢIE 33. [14] *Dacă* $\mathcal{G}$ *este un* HX*-grup astfel încât are loc condiţia:*

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A = B, \tag{7.2}$$

oricare ar fi $A, B \in \mathcal{G}$, *atunci* $< G^*, \oplus >$ *este un hipergrup.*

Gradul fuzzy al unui hipergrup [24], [81] Fie $(H_0, \circ)$ un hipergrupoid, $(x, y) \in H^2$ şi $z \in x \circ y$ avem relaţiile:

$$(7.3) \quad A_1(z) = \sum_{z \in x \circ y} \frac{1}{|x \circ y|}; \; Q_1(z) = \{(x, y) \in H^2 | \; z \in x \circ y\};$$

$$(7.4) \quad q_1(z) = |Q_1(z)|; \; \mu_1(z) = \frac{A_1(z)}{q_1(z)}.$$

Se defineşte hiperoperaţia " $\circ_1$ " astfel: Pentru oricare ar fi $(x, y) \in H^2$,

$$x \circ_1 y = \{z | \min\{\mu_1(x), \mu_1(y)\} \leq \mu_1(z) \leq \max\{\mu_1(x), \mu_1(y)\}\}$$

şi se notează prin H_1 hipergrupul $(H_0, \circ_1)$. Se procedează în mod asemănător pornind de la H_1 şi se defineşte A_2, q_2, μ_2 similar cu A_1, q_1, μ_1. Se obţine un alt hipergrup $(H_2, \circ_2)$ şi procedeul continuă.

Gradul fuzzy al hipergrupoidului H_0, notat $\partial(H_0)$ reprezintă cel mai mic număr k, cu proprietatea că H_k este izomorf cu H_{k+1}.

În cele ce urmează vom discuta despre grupurile HX asociate grupului diedral D_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar, se defineşte grupul diedral D_n, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $D_n =< \rho, \sigma >$, grup generat de ρ şi σ ce satisfac următoarele proprietăţi:

$$\begin{aligned} \rho^n &= \sigma^2 = Id \overset{not}{=} e; \\ \rho^k \sigma &= \sigma^{n-k} \rho, \; \forall \; k \leq n, \; k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Grupurile HX asociate grupului diedral, D_n, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. se determină în modul următor. Fie $n = p_1 p_2$, $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ şi notăm submulţimile:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{e, \rho^{p_2}, \rho^{2p_2}, ..., \rho^{(p_1-1)p_2}\};\\
A_1 &= \{\rho, \rho^{p_2+1}, \rho^{2p_2+1}, ..., \rho^{(p_1-1)p_2+1}\};\\
&...\\
A_k &= \{\rho^k, \rho^{p_2+k}, \rho^{2p_2+k}, ..., \rho^{(p_1-1)p_2+k}\};\ k = p_2 - 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 &= \{\sigma, \rho^{p_2}\sigma, \rho^{2p_2}\sigma, ..., \rho^{(p_1-1)p_2}\sigma\};\\
B_1 &= \{\rho\sigma, \rho^{p_2+1}\sigma, \rho^{2p_2+1}\sigma, ..., \rho^{(p_1-1)p_2+1}\sigma\};\\
&...\\
B_k &= \{\rho^k\sigma, \rho^{p_2+k}\sigma, \rho^{2p_2+k}\sigma, ..., \rho^{(p_1-1)p_2+k}\sigma\};\ k = p_2 - 1.
\end{aligned}$$

Se observă că au loc următoarele relaţii:

$$\begin{aligned}
A_i \star A_j &= A_{i+j},\ i + j < p_2;\\
A_i \star A_j &= A_{i+j-p_2},\ i + j \geq p_2;\\
A_i \star B_j &= B_{i+j},\ i + j < p_2;\\
A_i \star B_j &= B_{i+j-p_2},\ i + j \geq p_2;\\
B_i \star A_j &= B_{i-j},\ i \geq j;\\
B_i \star A_j &= B_{p_2+(i-j)}),\ i < j;\\
B_i \star B_j &= A_{i-j},\ i \geq j;\\
B_i \star B_j &= A_{p_2+(i-j)}),\ i < j.
\end{aligned}$$

Se notează $\mathcal{G}_{p_2}^{p_1} = \{A_i | \, |A_i| = p_1, 0 \leq i \leq 2p_2 - 1\}$, unde s-a considerat

$$B_0 = A_{p_2},\ B_1 = A_{p_2+1}, ...,\ B_{p_2-1} = A_{2p_2-1}.$$

Afirmăm că $(\mathcal{G}_{p_2}^{p_1}, \star)$ formează un grup şi este un HX-grup asociat grupului diedral (D_n, o). Pentru $n = p_1p_2$, unde p_1, p_2 sunt divizori naturali, există un HX-grup $\mathcal{G}_{p_2}^{p_1}$ în $\mathcal{P}^\star(D_n)$ cu $2p_2$ elemente, reprezentate de mulţimile: $A_0, ..., A_{p_2-1}, A_{p_2}, ..., A_{2p_2-1}$ cu proprietatea $|A_j| = p_1$, unde

$0 \leq j \leq 2p_2 - 1$. Se considerua $H_{p_2}^{p_1} = \bigcup\limits_{i=0}^{2p_2-1} A_i$ şi se construieşte hipergrupoidul Chinez $(H_{p_2}^{p_1}, \oplus)$, unde

$$H_{p_2}^{p_1} = \bigcup_{A \in \mathcal{G}_{p_2}^{p_1}} A,$$

$$x \oplus y = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B \\ \{A,B\} \subset \mathcal{G}_{p_2}^{p_1}}} A \star B,$$

oricare ar fi $(x, y) \in H_{p_2}^{p_1} = (D_n)^2$. Se demonstrează că $(H, \oplus)$ este hipergrup, iar acest lucru se arată utilizând Propoziţia 33. În plus, oricare ar fi $x \in H_{p_2}^{p_1}$ se obţine $\mu_1(x) = \frac{1}{p_1}$. Aşadar, $H_{p_2}^{p_1}$ este un hipergrup total, prin urmare gradul fuzzy $\partial(H_{p_2}^{p_1}) = 1$.

TEOREMĂ 14. *Dacă $\mathcal{G}_{p_2}^{p_1}$ reprezintă HX grupul ce are drept suport grupul diedral D_n, unde $n = p_1p_2$, atunci*

$$d(\mathcal{G}_{p_2}^{p_1}) = \begin{cases} \frac{p_2+6}{4p_2}, & p_2 \text{ par;} \\ \\ \frac{p_2+3}{4p_2}, & p_2 \text{ impar} \end{cases}$$

unde $n = p_1p_2$.

OBSERVAŢIE 34. [5] *Gradul de comutativitate al grupului diedral D_n, are o structură asemănătoare cu gradul de comutativitate al HX grupului asociat grupului D_n*

$$d(D_n) = \begin{cases} \frac{n+6}{4n}, & n \text{ par;} \\ \\ \frac{n+3}{4n}, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

CAPITOLUL 3

Teoria poligrupurilor

Teoria poligrupurilor reprezintă o clasă particulară de hipergrupuri care se aseamănă destul de mult cu teoria grupurilor. Datorită acestui fapt, vom regăsi similitudini între cele două teorii, dar şi deosebiri. În acest capitol, vom introduce gradul de comutativitate, dar şi gradul relativ de comutativitate. În plus, vom analiza nilpotenticitatea extinderii de poligrupuri prin poligrupuri. Rezultatele se regăsesc în articolul publicat în Analele Ştiinţifice ale Universităţii Ovidius Constanţa-Seria Matematică şi este scris de Sonea [**73**] şi în articolul scris de Al Tahan, Davvaz şi Sonea [**1**].

DEFINIŢIE 35. [**7**] *Un poligrup este un sistem* $\varphi =< P, \cdot, e, ^{-1} >$*, unde* $e \in P$*,* $^{-1}$ *este o operaţie unară pe* P *şi* "$\cdot$" $: P \times P \to \mathcal{P}^*(P)$ *. Următoarele axiome au loc pentru orice* x*,* y*,* $z \in P$ *:*

i) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
ii) $e \cdot x = x \cdot e = x$;
iii) $x \in y \cdot z$, implică $y \in x \cdot z^{-1}$ şi $z \in y^{-1}x$.

DEFINIŢIE 36. [**45**] *Spunem că un poligrup* $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ *este nilpotent, dacă*

$$l_n(P) \subseteq \omega_P$$

sau echivalent cu

$$l_n(P) \cdot \omega_P = \omega_P,$$

pentru un număr întreg n*, unde* $l_0(P) = P$ *şi*

$$l_{k+1}(P) = \langle \{h \in P |\ x \cdot y \cap h \cdot y \cdot x \neq \varnothing, \text{ astfel încât } x \in l_k(P) \text{ şi } y \in P\} \rangle .$$

Cel mai mic număr întreg c pentru care $l_c(P)\cdot\, \omega_P = \omega_P$ *se numeşte clasa de nilpotenţă sau mai simplu clasa lui* P.

Fie $< P, \circ, e, ^{-1} >$ un poligrup şi $K \subseteq P$. Spunem că K este subpoligrup al poligrupului P, dacă pentru orice $a, b \in K$, are loc $a \circ b \subseteq K$ şi $a^{-1} \in K$.

Fie $< P, \circ, e, ^{-1} >$ un poligrup şi K subpoligrup al poligrupului P. Spunem că K este un subpoligrup normal în P, dacă pentru orice $a \in P$, avem $a^{-1} \circ K \circ a \subseteq K$.

1. Gradul de comutativitate

În cadrul acetei secţiuni, vom studia gradul de comutativitate pentru poligrupurile P_G şi extinderii de poligrupuri prin poligrupuri. De asemenea, vom determina anumite încadrări pentru poligrupurile menţionate. În plus, vom analiza nilpotenticitatea extinderii, determinând o legătură între inimile poligrupurilor, respectiv inima extinderii. Rezultatele se regăsesc în lucrările scrise de Al Tahan, Davvaz şi Sonea [1], respectiv Sonea [73].

Definiţie 37. *Fie poligrupul* $< P, \cdot, e, ^{-1} >$. *Gradul de comutativitate al poligrupului* P *se notează prin* $d(P)$ *şi este definit astfel:*

$$d(P) = \frac{|\{(a,b) \in P^2 |\ a \cdot b = b \cdot a\}|}{|P|^2}.$$

Propoziţie 38. *Fie* $< P_1, \cdot, e_1, ^{-1} >$ *şi* $< P_2, *, e_2, ^{-1} >$ *două poligrupuri. Atunci, are loc relaţia*

$$d\left(P_1 \times P_2\right) = d(P_1)d(P_2).$$

În cele ce urmează, vom discuta despre un poligrup care se formează cu ajutorul unui grup. Scopul este acela de a determina legătura dintre gradul de comutativitate al grupului şi gradul de comutativitate al poligrupului care se formează.

DEFINIŢIE 39. [25] *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup şi* $P_G = G \cup \{a\}$, *unde* $a \notin G$. *Definim pe* P_G, *hiperoperaţia* " $\circ$ " *după cum urmează:*

$$\begin{aligned}
(1) &: \quad a \circ a = e; \\
(2) &: \quad e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in P_G; \\
(3) &: \quad a \circ x = x \circ a = x, \forall x \in P_G \backslash \{e, a\}; \\
(4) &: \quad x \circ y = x \cdot y, \forall (x, y) \in G^2, \ y \neq x^{-1}; \\
(5) &: \quad x \circ x^{-1} = \{e, a\}, \ \forall x \in P_G \backslash \{e, a\}.
\end{aligned}$$

PROPOZIŢIE 40. [25] *Dacă* G *este grup, atunci* $< P_G, \circ, e, ^{-1} >$ *este un poligrup.*

COROLAR 41. [25] *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup.* P_G *este nilpotent dacă şi numai dacă* G *este un grup nilpotent.*

PROPOZIŢIE 42. *Dacă* $(G, \cdot)$ *este un grup finit, cu* $|G| = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci*

$$d(P_G) = \frac{n^2 d(G) + 2n + 1}{(n+1)^2}.$$

Observaţii 1. $d(P_G) \geq d(G)$, pentru orice grup G;

2. Dacă G este grup abelian, atunci P_G poligrup comutativ.

3. Conform exemplului prezentat anterior, se observă că există poligrup al cărui grad de comutativitate este mai mare de $\frac{5}{8}$, dar nu este comutativ. În cele ce urmează, vom determina o mărginire în cazul funcţiei $d(P_G)$ prin următorul rezultat.

PROPOZIŢIE 43. *Dacă* G *este un grup, cu* $|G| = n$, *atunci*

$$d(G) \leq d(P_G) \leq \frac{d(G) + 3}{4}.$$

PROPOZIŢIE 44. P_G *este un poligrup comutativ, dacă şi numai dacă* $d(P_G) > \frac{29}{32}$.

În cele ce urmează, vom asocia unui poligrup, o matrice, în care vom nota cu 1 elementele care comută şi 0 în rest.

DEFINIŢIE 45. *Fie* $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *o mulţime finită astfel încât* $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ *este un poligrup. Atunci, matricea comutativă asociată lui* P *este definită după cum urmează.*

$\cdot$	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
a_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
a_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	a_{1n}	a_{2n}	$\ldots$	a_{nn}

Pentru orice $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{dacă } a_i \cdot a_j = a_j \cdot a_i, \\ 0 & \textit{altfel.} \end{cases}$

OBSERVAŢIE 46. *Dacă* $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ *este un poligrup, atunci matricea comutativă asociată lui* P *este simetrică şi toate elementele de pe diagonala principală sunt egale cu unu.*

COROLAR 47. *Fie* $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *şi* $< P_i, \cdot_i, e_i, ^{-1} >$ *poligrupuri finite. Atunci,*

$$d(P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k) = d(P_1)d(P_2)\ldots d(P_k).$$

PROPOZIŢIE 48. *Dacă* $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ *este un poligrup finit de ordin* n *şi*

$$Z(P) = \{x \in P : x \cdot p = p \cdot x \ \forall \ x \in P\}$$

de ordin l *atunci* $d(P) \geq \frac{l}{n}(2 - \frac{l}{n})$.

PROPOZIŢIE 49. *Fie* $< P_1, \cdot_1, e_1, ^{-1} >$, $< P_2, \cdot_2, e_2, ^{-1} >$ *poligrupuri finite şi considerăm* $\phi : P_1 \to P_2$ *un homomorfism injectiv "bun". Dacă* $S \subseteq P_1$ *este un subpoligrup al lui* P_1, *atunci* $d(\phi(S)) = d(S)$.

COROLAR 50. *Dacă* $< P_1, \cdot_1, e_1, ^{-1} >$, $< P_2, \cdot_2, e_2, ^{-1} >$ *sunt poligrupuri finite izomorfe, atunci* $d(P_1) = d(P_2)$.

2. Gradul de comutativitate relativ

Plecând de la gradul de comutativitate al unui subgrup asociat unui grup finit [32], în această secţiune definim şi studiem gradul de comutativitate al unui subpoligrup, într-un poligrup finit, reprezentând probabilitatea ca un element din subpoligrup să comute cu un element din poligrup. În plus, utilizăm exemple ilustrative în care vom prezenta anumite aspecte care au loc în teoria grupurilor, dar nu au loc în teoria poligrupurilor. În final, vom prezenta un studiu mai amănunţit asupra gradului de comutativitate relativ, pentru subpoligrupuri ale unor poligrupuri speciale.

Definiţie 51. *Fie* $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ *un poligrup finit şi* S *subpoligrup al lui* P. *Definim gradul de comutativitate relativ al lui* S *în* P, $d(P)$, *ca fiind:*

$$d(S, P) = \frac{|C_P(S)|}{|S||P|},$$

unde, $C_P(S) = \{(s, p) \in S \times P : s \cdot p = p \cdot s\}$.

Observaţie 52. *Fie* $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ *un poligrup finit. Avem*

(1) $d(\{e\}, P) = 1$.
(2) $d(P, P) = d(P)$.
(3) *Dacă* $S \subseteq Z(P)$ *atunci* $d(S, P) = 1$.

Propoziţie 53. *Fie* $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ *un poligrup finit şi* S *subpoligrup al lui* P. *Dacă* $S \nsubseteq Z(P)$, *atunci* $\frac{2m+n-2}{mn} \leq d(S, P) < 1$, *unde* $|S| = m$ *şi* $|P| = n$.

În cele ce urmează vom defini matricea comutativă relativă a unui subpoligrup asociat unui poligrup finit şi vom prezenta exemple pe care le vom utiliza pentru a calcula gradul de comutativitate relativ.

Definiţie 54. *Fie* $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *o mulţime finită astfel încât* $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ *este un poligrup şi* $S = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subseteq P$ *subpoligrup al* *lui P. Matricea comutativă relativă a lui S în P se defineşte astfel*

$\cdot$	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
b_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
b_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_m	a_{1m}	a_{2m}	$\ldots$	a_{mn}

unde pentru orice $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{dacă } b_i \cdot a_j = a_j \cdot b_i, \\ 0 & \textit{altfel.} \end{cases}$$

PROPOZIŢIE 55. *Dacă $< P_1, \cdot_1, e_1, ^{-1} >$, $< P_2, \cdot_2, e_2, ^{-1} >$ sunt poligrupuri finite şi N_1, N_2 subpoligrupuri ale lui P_1, P_2 respectiv, atunci $d(N_1 \times N_2, P_1 \times P_2) = d(N_1, P_1)d(N_2, P_2)$.*

COROLAR 56. *Fie $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $< P_i, \cdot_i, e_i, ^{-1} >$ poligrupuri finite şi N_i subpoligrupuri ale lui P_i, pentru oricare $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Se obţine*

$$d(N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k, P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k) = d(N_1, P_1)d(N_2, P_2) \ldots d(N_k, P_k).$$

PROPOZIŢIE 57. *Dacă $< P_1, \cdot_1, e_1, ^{-1} >$, $< P_2, \cdot_2, e_2, ^{-1} >$ poligrupuri izomorfe şi N subpoligrup al lui P_1, atunci $d(N, P_1) = d(\phi(N), P_2)$.*

În cele ce urmează, vom studia gradul de comutativitate relativ al subpoligrupurilor asociate poligrupului $< P_G, \circ, e, ^{-1} >$.

LEMA 58. *Dacă $(G, \cdot)$ este un grup şi S subgrup în G, atunci P_S este subpoligrup al poligrupului P_G.*

LEMA 59. *Dacă $(G, \cdot)$ este un grup şi $N \neq \{e\}$ este subpoligrup al poligrupului P_G, atunci există un subgrup S al grupului G, astfel încât $P_S = N$.*

TEOREMĂ 15. *Dacă $(G, \cdot)$ este un grup şi $N \neq \emptyset \subseteq P_G$, atunci N este subpoligrup al poligrupului P_G, dacă şi numai dacă $N = \{e\}$ sau $N = P_S$, pentru orice subgrup S al lui G.*

TEOREMĂ 16. *Dacă* $(G,\cdot)$ *este un grup finit de ordin* n *şi* S *subgrup în* G, *cu ordinul* k, *atunci*

$$d(P_S, P_G) = \frac{nkd(S,G) + n + k + 1}{(n+1)(k+1)}.$$

COROLAR 60. *Fie* $(G,\cdot)$ *un grup finit de ordin* n *şi* S *subgrup în* G *de ordin* k. *Atunci* $P_S \subseteq Z(P_G)$ *dacă şi numai dacă* $S \subseteq Z(G)$.

Formula referitoare la gradul de comutativitate relativ determinată în Teorema 16 poate fi utilizată pentru a deduce formula pentru gradul de comutativitate prezentată în Propoziţia 42.

COROLAR 61. *Fie* $(G,\cdot)$ *un grup finit de ordin* n. *Atunci,*

$$d(P_G) = \frac{n^2 d(G) + 2n + 1}{(n+1)^2}.$$

EXEMPLU 62. *Fie* S_4 *grupul simetric şi* A_4 *grupul altern. Avem* $d(A_4, S_4) = \frac{1}{4}$, *ceea ce implică* $d(P_{A_4}, P_{S_4}) = \frac{24(12)(\frac{1}{4})+24+12+1}{(24+1)(12+1)} = \frac{109}{325}$.

LEMA 63. *Dacă* $(G,\cdot)$ *este un grup finit de ordin* n *şi* S *subgrup în* G *de ordin* k, *atunci* $d(S,G) \leq d(P_S, P_G)$. *În plus, dacă* $S \nsubseteq Z(G)$, *atunci* $d(S,G) < d(P_S, P_G)$.

LEMA 64. *Fie* $(G,\cdot)$ *un grup finit neabelian de ordin* n *şi* S *subgrup în* G *de ordin* k *astfel încât* $S \nsubseteq Z(G)$. *Obţinem*

$$d(S,G) \leq d(P_S, P_G) < \frac{d(S,G)+1}{2}.$$

COROLAR 65. *Dacă* $(G,\cdot)$ *este un grup finit neabelian de ordin* n, *atunci*

$$d(G) \leq d(P_G) < \frac{d(G)+1}{2}.$$

COROLAR 66. *Fie* $(G,\cdot)$ *un grup finit neabelian de ordin* n. *Avem*

$$d(P_G) < \begin{cases} \frac{7}{8} & \text{dacă } S \text{ este abelian şi } S \nsubseteq Z(G) \\ \frac{13}{16} & \text{dacă } S \text{ nu este abelian.} \end{cases}$$

COROLAR 67. *Dacă* $(G, \cdot)$ *este un grup neabelian finit de ordin* n*, atunci* $d(P_G) < \frac{13}{16}$.

OBSERVAŢIE 68. *Determinăm o mărginire inferioară mai eficientă ("*$\frac{13}{16}$*") pentru gradul de comutativitate al poligrupului* P_G *din Propoziţia 44 ("*$\frac{29}{32}$*").*

COROLAR 69. *Dacă* $(G, \cdot)$ *este un grup finit de ordin* n*, atunci* P_G *este comutativ dacă şi numai dacă* $d(P_G) \geq \frac{13}{16}$.

3. Extinderea poligrupurilor prin poligrupuri

Comer [12] este cel care introduce noţiunea de extindere a poligrupurilor prin poligrupuri. Scopul acestei secţiuni este acela de a determina gradul de comutativitate al extinderii de poligrupuri $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ şi de găsi o legătură cu gradele de comutativitate ale celor două poligrupuri $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

DEFINIŢIE 70. *Fie* $\mathcal{A} = < A, \circ_1, e,^{-1} >$ *şi* $\mathcal{B} = < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *două poligrupuri ale căror elemente sunt renotate astfel încât* $A \cap B = \{e\}$. *Sistemul nou format,* $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ *se defineşte astfel:*

$$\mathcal{A}[\mathcal{B}] = < M, \star, e,^{I} >,$$

unde

$$M = A \cup B, e^I = e, x^I = x^{-1}, e \star x = x \star e = x, \text{ pentru orice } x \in M;$$

iar pentru orice $x,\ y \in M \backslash \{e\}$*, operaţia "* $\star$ *" este definită în modul următor:*

$$x \star y = \begin{cases} x \circ_1 y & \text{dacă } x,\ y \in A \\ x & \text{dacă } x \in B,\ y \in A \\ y & \text{dacă } x \in A,\ y \in B \\ x \circ_2 y & \text{dacă } x, y \in B,\ y \neq x^{-1} \\ x \circ_2 y \cup A & \text{dacă } x, y \in B,\ y = x^{-1} \end{cases}$$

În acest caz, $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ *este un poligrup şi se numeşte extinderea lui* $\mathcal{A}$ *prin* $\mathcal{B}$.

Gradul de comutativitate al poligrupului $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ se defineşte în modul următor:

$$d(\mathcal{A}[\mathcal{B}]) = \frac{\left|\{\,(x,y)\in M^2 |\ x\star y = y\star x\}\right|}{|M|^2}. \tag{3.1}$$

PROPOZIŢIE 71. *Dacă* $\mathcal{A} = < A, \circ_1, e,^{-1} >$ *şi* $\mathcal{B} = < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *sunt două poligrupuri, unde* $A = \{e, a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ *şi* $B = \{e, b_1, b_2, ..., b_{m-1}\}$, *cu* n, $m \in \mathbb{N}^*$, *atunci gradul de comutativitate al poligrupului* $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$, *este*

$$d(\mathcal{A}[\mathcal{B}]) = \frac{n^2 d(\mathcal{A}) + m^2 d(\mathcal{B}) + 2\,(n-1)\,(m-1) - 1}{(n+m-1)^2}. \tag{3.2}$$

OBSERVAŢIE 72. *Dacă* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$ *sunt poligrupuri comutative, atunci* $d(\mathcal{A}) = d(\mathcal{B}) = 1$ *şi înlocuind în formula* (3.2) *se obţine*

$$d(\mathcal{A}[\mathcal{B}]) = \frac{n^2 + m^2 + 2\,(n-1)\,(m-1) - 1}{(n+m-1)^2} = 1.$$

În concluzie, $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ *poligrup comutativ.*

OBSERVAŢIE 73. *Gradul de comutativitate al poligrupului* P_G *poate fi privit ca fiind gradul de comutativitate al extinderii de poligrupuri formate din* $\mathcal{A} = <G, \circ_1, e,^{-1}>$ *şi* $\mathcal{B} = <B, \circ_2, e,^{-1}>$, *unde* $B = \{e, a\}$, $a \notin G$, *iar operaţia ” · ” din* $\mathcal{B}$ *este definită în modul următor:*

$\circ_2$	e	a
e	e	a
a	a	$\{e, a\}$

.

Aplicând formula dată de Propoziţia 71 *pentru* $d(\mathcal{A}) = d(G)$, $m = 2$ *şi* $d(\mathcal{B}) = 1$, *obţinem*

$$d(\mathcal{A}[\mathcal{B}]) = \frac{n^2 d(G) + 2^2 + 2\,(n-1) - 1}{(n+2-1)^2} = \frac{n^2 d(G) + 2n + 1}{(n+1)^2} = d(P_G).$$

În cele ce urmează ne propunem să determinăm o mărginire pentru extensia de poligrupuri $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$.

PROPOZIŢIE 74. $min\{d(\mathcal{A}), d(\mathcal{B})\} \leq d(\mathcal{A}[\mathcal{B}]) \leq \frac{1+\max\{d(\mathcal{A}), d(\mathcal{B})\}}{2}$.

În cele ce urmează vom prezenta rezultate cu privire la gradul de comutativitate relativ al subpoligrupurilor asociate extinderii de poligrupuri.

LEMA 75. *Fie* $< A, \circ_1, e,^{-1} >, < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *două poligrupuri ale căror elemente sunt rearanjate astfel încât* $A \cap B = \{e\}$. *Dacă* S *este subpoligrup al lui* A, *atunci* S *este subpoligrup al extinderii de poligrupuri* $A[B] =< M, \star, e,^I >$.

LEMA 76. *Fie* $< A, \circ_1, e,^{-1} >, < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *două poligrupuri ale căror elemente sunt rearanjate astfel încât* $A \cap B = \{e\}$. *Dacă* S *este subpoligrup al lui* B, *atunci* $S \cup A = A[S]$ *este subpoligrup al extinderii de poligrupuri* $A[B] =< M, \star, e,^I >$.

LEMA 77. *Fie* $< A, \circ_1, e,^{-1} >, < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *două poligrupuri ale căror elemente sunt rearanjate astfel încât* $A \cap B = \{e\}$. *Dacă* K *este subpoligrup al extinderii de poligrupuri* $A[B] =< M, \star, e,^I >$, *atunci* K *este subpoligrup al lui* A *sau există subpoligrup* S *al lui* B, *astfel încât* $K = S \cup A$.

TEOREMĂ 17. *Fie* $< A, \circ_1, e,^{-1} >, < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *două poligrupuri ale căror elemente sunt rearanjate astfel încât* $A \cap B = \{e\}$. K *este subpoligrup al extinderii de poligrupuri* $A[B] =< M, \star, e,^I >$ *dacă şi numai dacă* K *este subpoligrup în* A *sau există subpoligrup* S *al lui* B, *astfel încât* $K = S \cup A$.

LEMA 78. *Fie* $< A, \circ_1, e,^{-1} >, < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *două poligrupuri de ordin* n, *respectiv* m *cu proprietatea ca elementele să fie rearanjate astfel încât* $A \cap B = \{e\}$. *Dacă* S *este subpoligrup al lui* A *de ordin* k, *atunci*

$$d(S, A[B]) = \frac{knd(S, A) + k(m-1)}{k(n+m-1)}.$$

COROLAR 79. *Fie* $< A, \circ_1, e,^{-1} >, < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *două poligrupuri de ordin* n, *respectiv* m *cu proprietatea ca elementele să fie rearanjate astfel încât* $A \cap B = \{e\}$. *Avem*

$$d(A, A[B]) = \frac{n^2 d(A) + n(m-1)}{n(n+m-1)}.$$

PROPOZIŢIE 80. *Fie* $< A, \circ_1, e,^{-1} >, < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *două poligrupuri de ordin* n, *respectiv* m *cu proprietatea ca elementele să fie rearanjate astfel încât* $A \cap B = \{e\}$. *Dacă* S *este subpoligrup în* A, *atunci are loc* $d(S, A) \leq d(S, A[B])$.

LEMA 81. *Fie* $< A, \circ_1, e,^{-1} >, < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *două poligrupuri de ordin* n*, respectiv* m *cu proprietatea ca elementele să fie rearanjate astfel încât* $A \cap B = \{e\}$*. Dacă* $K = S \cup A$ *şi* S *subpoligrup în* B *de ordin* s*, atunci*

$$d(K, A[B]) = \frac{n^2 d(A) + n(m-1) + (s-1)(n-1) + smd(S,B) - m}{(s+n-1)(n+m-1)}.$$

COROLAR 82. *Dacă* $< A, \circ_1, e,^{-1} >, < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *sunt două poligrupuri de ordin* n*, respectiv* m *cu proprietatea ca elementele să fie rearanjate astfel încât* $A \cap B = \{e\}$*, atunci*

$$d(A[B]) = \frac{n^2 d(A) + m^2 d(B) + 2(n-1)(m-1) - 1}{(n+m-1)^2}.$$

TEOREMĂ 18. *Fie* $< A, \circ_1, e,^{-1} >, < B, \circ_2, e,^{-1} >$ *două poligrupuri cu proprietatea ca elementele să fie rearanjate, astfel încât* $A \cap B = \{e\}$*. Dacă* K *este subpoligrup al extinderii de poligrupuri* $A[B] =< M, \star, e,^I >$*, atunci*

i) Pentru K *subpoligrup al poligrupului* A*, de ordin* k*, avem*

$$d(K, A[B]) = \frac{knd(K,A) + k(m-1)}{k(n+m-1)};$$

ii) Pentru $K = A[S]$*, unde* S *este subpoligrup al poligrupului* B*, cu* $|S| = s$*, avem*

$$d(K, A[B]) = \frac{n^2 d(A) + n(m-1) + (s-1)(n-1) + smd(S,B) - m}{(s+n-1)(n+m-1)}.$$

În cazul gradului relativ de comutativitate al unui subgrup S într-un grup finit G, unde $S \not\subseteq Z(G)$, rezultă $d(S,G) \leq \frac{3}{4}$. Raportat la poligrupurile finite, acest lucru nu este valabil.

4. Nilpotenticitatea extinderii poligrupurilor prin poligrupuri

În această secţiune, ne propunem să arătăm că dacă $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt două poligrupuri nilpotente, atuncti extinderea $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ este de asemenea un poligrup nilpotent. Pentru a demonstra acest lucru, vom reaminti următoarele noţiuni [**25**], [**44**].

Propoziţie 83. *Dacă* $\mathcal{A}[\mathcal{B}] =< M, \star, e,^{I} >$ *este extinderea poligrupurilor* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$, *unde* $M = A \cup B$, $A \cap B = \{e\}$, *atunci are loc următoarea relaţie*

$$\omega_{\mathcal{A}} \cup \omega_{\mathcal{B}} \subseteq \omega_{\mathcal{A}[\mathcal{B}]}. \tag{4.1}$$

Propoziţie 84. *Fie* $\mathcal{A} = < A, \cdot, e,^{-1} >$, $\mathcal{B} = < B, \cdot, e,^{-1} >$ *două poligrupuri. Dacă* $\mathcal{A}[\mathcal{B}] =< M, \star, e,^{I} >$ *este extinderea poligrupurilor* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$, *unde* $M = A \cup B$, $A \cap B = \{e\}$, *atunci*

$$l_k\left(\mathcal{A}[\mathcal{B}]\right) = l_k\left(\mathcal{A}\right) \cup l_k\left(\mathcal{B}\right). \tag{4.2}$$

Propoziţie 85. *Dacă* $\mathcal{A}$ *şi* $\mathcal{B}$ *sunt poligrupuri nilpotente, atunci extinderea de poligrupuri* $\mathcal{A}[\mathcal{B}]$ *este de asemenea un poligrup nilpotent.*

CAPITOLUL 4

Teoria hipergrupurilor canonice

Acest capitol este dedicat hipergrupurilor canonice. Spre deosebire de tot ce am prezentat anterior, aceste hipergrupuri sunt comutative, prin urmare studiul gradului de comutativitate nu mai este relevant. În cadrul capitolului, vom introduce conceptul de ”extindere” ce se regăseşte în teoria poligrupurilor. De asemenea, vom studia funcţia lui Euler asociată hipergrupului canonic C_n introdus de Corsini [16], respectiv vom calcula funcţia lui Euler pentru extinderea hipergrupurilor canonice prin hipergrupuri canonice. Asemănător se va proceda pentru hipergrupurile i.p.s., ce reprezintă o clasă particulară de hipergrupuri canonice. Rezultatele ce vor fi prezentate se regăsesc în articolul scris de Sonea şi Davvaz [76].

DEFINIŢIE 86. [71] *Spunem că hipergrupul* $(H, \circ)$ *este un hipergrup canonic, dacă satisface condiţiile:* 1) *H este comutativ;* 2) *H are o identitate scalară, adică* $e \circ x = x \circ e = x$, *pentru orice element din hipergrup;* 3) *Orice element admite un unic invers, adică* $|i(x)| = 1$, *oricare ar fi* x, *unde prin* $i(x)$ *înţelegem mulţimea elementelor inversabile corespunzătoare elementului* x. 4) *H este reversibil: dacă* $y \in a \circ x$, *există* $a' \in i(a)$ *astfel încât* $x \in a' \circ y$ *şi dacă* $x \in y \circ a$, *există* $a' \in i(a)$ *astfel încât* $y \in x \circ a'$.

Rezultatul ce caracterizează hipergrupurile canonice este următorul.

PROPOZIŢIE 87. [16] *Spunem că un hipergrup H este canonic, dacă*

este un join space înzestrat cu o identitate scalară.

1. Funcţia lui Euler asociată hipergrupului canonic $(C_n, \circ)$

În teoria hipergrupurilor canonice, întâlnim un hipergrup introdus de către Corsini [16] şi se defineşte după cum urmează.

Fie hipergrupul canonic $(C_n, \circ)$, $C_n = \{e_0, e_1, ..., e_{k(n)}\}$, unde

$$k(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, \ n \in 2\mathbb{N}; \\ \frac{n-1}{2}, \ n \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

Pentru $(s,t) : s \leq k(n)$, $t \leq k(n)$, considerăm

$$e_s \circ e_t = \{e_v, e_p\},$$

unde $v = \min\{s+t, n-(s+t)\}$, $p = |s-t|$. În lucrarea [52], regăsim rezultate cu referire la subhipergrupurile hipergrupului canonic, C_n.

TEOREMĂ 19. [52] *Dacă $r \in \{0, 1, ..., k(n)\}$, astfel încât $(r, n) = 1$, atunci*

$$C_n =< e_r > .$$

COROLAR 88. [52] *Dacă $n = p$ este un număr prim, atunci C_n are doar subhipergrupuri improprii.*

TEOREMĂ 20. [52] *Hipergrupurile C_n, pentru $n = 2p$, p număr natural prim, $p \neq 2$, satisfac teorema lui Lagrange.*

OBSERVAŢIE 89. *În demonstrarea rezultatului din Teorema 20, se arată că singurele subhipergrupuri proprii ale hipergrupului canonic C_n sunt de forma:*

$$S_1 = \{e_0, e_p\},\ S_2 = \left\{e_{2i} |\ i \in \left\{0, 1, 2, ..., \frac{p-1}{2}\right\}\right\}. \tag{1.1}$$

Forma subhipergrupurilor în situaţia în care $n = 2p$, p număr natural prim ne ajută în calculul funcţiei lui Euler pentru acest caz.

TEOREMĂ 21. *Dacă $(C_n, \circ)$ este hipergrupul canonic definit anterior, unde $n = 2p$, p număr natural prim, atunci*

$$\varphi(C_n) = |\omega_{C_n}|,$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

OBSERVAŢIE 90. *Condiţia ca p să fie un număr prim nu este necesară în demonstrarea elementelor cu indice impar că nu aparţin inimii hipergrupului canonic* C_n.

Prin urmare, putem formula următorul rezultat.

TEOREMĂ 22. **i**) *Dacă* $n = 2p$, $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$, *p număr impar, atunci* $\varphi(C_n) = |\omega_{C_n}|$.
ii) *Dacă* $n = 2p$, $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$, *p număr par,* $\varphi(C_n) = |C_n| - |\omega_{C_n}|$.

TEOREMĂ 23. *Dacă* $n = 2p+1$, $p \geq 1$, *atunci* $\varphi(C_n) = |C_n| = |\omega_{C_n}|$.

OBSERVAŢIE 91. *În situaţia în care,* $n = 2p$, *p număr prim impar se observă că toate elementele ce nu se regăsesc în inima hipergrupului canonic* C_n *au aceeaşi perioadă.*

2. Extinderea hipergrupurilor canonice

În cele ce urmează, vom dori să extindem conceptul de extindere, prezentat în teoria poligrupurilor (Capitolul 3), în cadrul teoriei hipergrupurilor canonice finite. În plus, ne interesează legătura dintre funcţia lui Euler asociata extinderii de hipergrupuri canonice cu funcţia lui Euler pentru fiecare hipergrup în parte.

Fie $\mathcal{H}_1 = < H_1, \cdot, e, ^{-1} >$ şi $\mathcal{H}_2 = < H_2, \cdot, e, ^{-1} >$ două hipergrupuri canonice ale căror elemente vor fi renotate, astfel încât $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, unde e este identitatea hipergrupului canonic $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$. Pentru uşurinţa scrierii, vom nota hiperoperaţiile dintre hipergrupurile $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$ la fel.

DEFINIŢIE 92. *Un sistem* $\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]$ *se numeşte extensia hipergrupului canonic* $\mathcal{H}_1$ *prin hipergrupul canonic* $\mathcal{H}_2$, *dacă:*

$$\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2] = < M, *, e, ^I >,$$

unde

$M = H_1 \cup H_2$, $e^I = e$, $x^I = x^{-1}, e * x = x * e = x$, *pentru orice* $x \in M$;

şi pentru orice x, $y \in M \backslash \{e\}$, *avem*

$$x * y = \begin{cases} x \cdot y & \textit{dacă } x,\ y \in H_1 \\ x & \textit{dacă } x \in H_2,\ y \in H_1 \\ y & \textit{dacă } x \in H_1,\ y \in H_2 \\ x \cdot y & \textit{dacă } x, y \in H_2,\ y \neq x^{-1} \\ x \cdot y \cup H_1 & \textit{dacă } x, y \in H_2,\ y = x^{-1} \end{cases}$$

TEOREMĂ 24. *Dacă* $\mathcal{H}_1 = < H_1, \cdot, e, ^{-1} >$ *şi* $\mathcal{H}_2 = < H_2, \cdot, e, ^{-1} >$ *sunt două hipergrupuri canonice, atunci* $\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]$ *este un hipergrup canonic.*

TEOREMĂ 25. *Dacă* $\mathcal{H}_1 = < H_1, \cdot, e, ^{-1} >$ *şi* $\mathcal{H}_2 = < H_2, \cdot, e, ^{-1} >$ *sunt hipergrupuri canonice, atunci* $\omega_{\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]} = H_1 \cup \omega_{\mathcal{H}_2}$.

OBSERVAŢIE 93. *Conform Teoremei 25, observăm că toate elementele din hipergrupul canonic* $\mathcal{H}_1$ *au periodicitatea egală cu unu.*

Prin urmare, vom analiza legătura dintre periodicitatea elementelor din hipergrupul canonic $\mathcal{H}_2$ şi periodicitatea elementelor din extindere.

PROPOZIŢIE 94. *Periodicitatea elementelor din hipergrupul canonic* $\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]$ *coincide cu periodicitatea elementelor din hipergrupul canonic* $\mathcal{H}_2$

$$p(x)_{\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]} = p(x)_{\mathcal{H}_2}, \textit{ oricare ar fi } x \in \mathcal{H}_2.$$

TEOREMĂ 26. *Fie* $\mathcal{H}_1 = < H_1, \cdot, e, ^{-1} >$ *şi* $\mathcal{H}_2 = < H_2, \cdot, e, ^{-1} >$ *sunt două hipergrupuri canonice, cu proprietatea că* $\omega_{\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]} \neq H_1 \cup H_2$. *Atunci* $\varphi(\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]) = \varphi(\mathcal{H}_2)$.

OBSERVAŢIE 95. *Dacă toate elementele din hipergrupul canonic* $\mathcal{H}_2$ *au periodicitatea egală cu unu, atunci avem* $\omega_{\mathcal{H}_2} = H_2$ *şi prin urmare,* $\omega_{\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]} = H_1 \cup H_2$.

COROLAR 96. *Dacă hipergrupurile canonice* $\mathcal{H}_1$ *şi* $\mathcal{H}_2$ *au proprietatea că toate elementele au periodicitatea egală cu unu, atunci* $\varphi(\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]) = |H_1| + |H_2| - 1$.

3. Extinderea hipergrupurilor i.p.s.

În această secţiune, vom introduce o nouă clasă de hipergrupuri canonice care poartă numele de hipergrupuri i.p.s., unde i.p.s. semnifică identitate parţială scalară. Hipergrupurile i.p.s. au fost studiate de către

Corsini, acesta determinând forma exactă a hipergrupurilor până la ordinul 9 [16], [17], iar o atenţie deosebită asupra hipergrupurilor i.p.s. a fost dată de către Cristea, [21] .

Fie $(H, \circ)$ un hipergrup.

Definiţie 97. [9] *Spunem că* $x \in H$ *este scalar, dacă au loc egalităţile* $|x \circ y| = |y \circ x| = 1$, *pentru orice* $y \in H$.

Definiţie 98. [9] *Spunem că* $e \in H$ *este identitate parţială la stânga/ dreapta, dacă există* $x \in H$ *astfel încât* $x \in e \circ x/\ x \in x \circ e$.

Definiţie 99. [17] *Spunem că* u *este identitate parţială a lui* x, *dacă* $x \in u \circ x \cup x \circ u$.

Definiţie 100. [17] *Spunem că* $u \in H$ *este identitate parţial scalară a lui* x, *dacă* $x \in x \circ u \Rightarrow x = x \circ u$, $x \in u \circ x \Rightarrow x = u \circ x$.

Notăm cu $I_p(x)$ mulţimea identităţilor parţiale corespunzătoare lui x, $I_{ps}(x)$ mulţimea identităţilor parţial scalare ale lui x şi $Sc(H)$ reprezintă mulţimea scalarilor lui H. Se observă că are loc $I_{ps}(x) = I_p(x) \cap Sc(H)$.

Definiţie 101. [16] *Un hipergrup* $(H, \circ)$ *se numeşte i.p.s. hipergrup, dacă este canonic şi în plus este satisfăcută relaţia:*

$$\forall\ a, x \in H : x \in a \circ x \Rightarrow x = a \circ x.$$

Propoziţie 102. [48] *Dacă* $(H, \circ)$ *este un hipergrup i.p.s., atunci au loc :*

1. $\forall\ x \in H$, $x \circ x^{-1}$ *subhipergrup în* H;

2. $\forall\ x \in H$, $x \neq 0 : x$ *scalar în* H *sau* $\exists\ u \in Sc(H) \setminus \{0\}$ *astfel încât* $u \in x \circ x^{-1}$. *În plus,* $|Sc(H)| \geq 2$.

3. *Dacă* x *este scalar în* H, *atunci* $0 \in I_p(x)$. *Altfel, are loc incluziunea* $I_{ps}(x) \subseteq Sc(H) \cap x \circ x^{-1}$ *şi prin urmare,* $|I_{ps}(x)| \geq 2$.

Propoziţie 103. [48] *Fie* $(H, \circ)$ *un hipergrup i.p.s.. Pentru orice scalar* $u \in H$ *şi orice element* $x \in H$, *există şi este unic* $y \in H$ *astfel încât* $u \in x \circ y$.

În capitolul anterior, s-a observat că extinderea hipergrupurilor canonice prin hipergrupuri canonice reprezintă un hipergrup canonic. Hipergrupurile i.p.s se află în strânsă legătură cu hipergrupurile canonice, aşadar ne propunem să arătăm un rezultat similar în acest context.

TEOREMĂ 27. *Dacă* $\mathcal{H}_1 = < H_1, \cdot, e,^{-1} >$ *şi* $\mathcal{H}_2 = < H_2, \cdot, e,^{-1} >$ *sunt hipergrupuri i.p.s., atunci* $\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]$ *este un hipergrup i.p.s.*

În cele ce urmează se va ilustra un exemplu prin care se determină un izomorfism între un hipergrup i.p.s. obţinut prin extindere şi un hipergrup i.p.s. determinat de Corsini [17].

EXEMPLU 104. *Fie* $\mathcal{H}_1 = \left(H_1, \cdot, 0,^{-1}\right)$ *şi* $\mathcal{H}_2 = \left(H_2, \cdot, 0,^{-1}\right)$ *hipergrupuri i.p.s., unde* $H_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ *şi* $H_2 = \{0, 4, 5, 6\}$. *Hipergrupurile i.p.s.* $\mathcal{H}_1$ *şi* $\mathcal{H}_2$ *sunt reprezentate după cum urmează*

$\mathcal{H}_1$:

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1		2	0	3
2			1	3
3				$\{0,1,2\}$

$\mathcal{H}_2$:

$\cdot$	0	4	5	6
0	0	4	5	6
4		$\{0,5\}$	4	6
5			0	6
6				$\{0,4,5\}$

.

Aşadar extinderea hipergrupului i.p.s. $\mathcal{H}_1$ *prin extinderea hipergrupului i.p.s.* $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]$ *are următoarea formă:*

$\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]$:

$*$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1		2	0	3	4	5	6
2			1	3	4	5	6
3				$\{0,1,2\}$	4	5	6
4					$\{0,5\} \cup H_1$	4	6
5						$\{0\} \cup H_1$	6
6							$\{0,4,5\} \cup H_1$

Vom demonstra că hipergrupul $\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]$ *este izomorf cu un hipergrup i.p.s de ordin* 7*, determinat de Corsini* [17]*, mai exact* $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *cu următoarea structură.*

H :

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1		2	0	3	4	5	6
2			1	3	4	5	6
3				$\{0,1,2\}$	4	5	6
4					$\{0,1,2,3\}$	5	6
5						$\{0,1,2,3,4\}$	6
6							H_6

,

unde $H_6 = H \backslash \{6\}$*. Fie* $f : \mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2] \to H$*, definită punctual astfel:*

$$\begin{aligned} f(x) &= x,\ x \in H_1; \\ f(4) &= 5,\ f(5) = 4,\ f(6) = 6. \end{aligned}$$

Conform structurii celor două tabele, se observă $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$*, pentru orice* $x, y \in H_1$*. Dacă* $x \in H_1$ *şi* $y \in H_2$*, atunci se obţine* $f(x * y) = f(y) = f(x) \cdot f(y)$*. Studiem mai în detaliu ce se întâmplă atunci când* $x, y \in H_2$*.*

$$\begin{aligned} f(4*4) &= f(\underbrace{\{0,1,2,3,5\}}_{A}) = \bigcup_{x \in A} f(x) = \{0,1,2,3,4\}, \\ f(4)\cdot f(4) &= 5 \cdot 5 = \{0,1,2,3,4\}. \\ f(4*5) &= f(4) = 5;\ f(4)\cdot f(5) = 5 \cdot 4 = 5. \\ f(4*6) &= f(6) = 6;\ f(4)\cdot f(6) = 5 \cdot 6 = 6; \\ f(5*5) &= f(\underbrace{\{0,1,2,3\}}_{x \in B}) = \bigcup_{x \in B} f(x) = \{0,1,2,3\}, \\ f(5)\cdot f(5) &= 4 \cdot 4 = \{0,1,2,3\}. \\ f(5*6) &= f(6) = 6,\ f(5)\cdot f(6) = 4 \cdot 6 = 6. \\ f(6*6) &= f(H_6) = \bigcup_{x \in H_6} f(x) = \{0,1,2,3,4,5\}; \\ f(6)\cdot f(6) &= 6 \cdot 6 = H_6 = \{0,1,2,3,4,5\}. \end{aligned}$$

Prin urmare, putem afirma că $f(x * y) = f(x) * f(y)$, *pentru orice* x, $y \in \mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2]$, $f(0) = 0$, *atunci avem un morfism "bun". În plus, se observă că funcţia este bijectivă, deci putem afirma că hipergrupurile* $(\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2], *)$ *şi* $(H, \cdot)$ *sunt izomorfe. Cum* $(H, \cdot)$ *este un i.p.s hipergrup, implică* $(\mathcal{H}_1[\mathcal{H}_2], *)$ *este un i.p.s. hipergrup.*

Prin intermediul extinderii de hipergrupuri i.p.s. prin hipergrupuri i.p.s., putem construi destul de facil, hipergrupuri i.p.s. de un anumit ordin fixat, ceea ce ne ajută pentru cercetările care vor fi făcute în acest context.

OBSERVAŢIE 105. *Rezultatele referitoare la funcţia lui Euler în cadrul extinderii hipergrupurilor canonice prin hipergrupuri canonice, rămân valabile şi în contextul extinderii hipergrupurilor i.p.s. prin hipergrupuri i.p.s..*

CAPITOLUL 5

Concluzii şi cercetări viitoare

Teza cuprinde noi contribuţii în cadrul teoriei hipergrupurilor. Principalele clase de hipergrupuri care au fost tratate în lucrare sunt: hipergrupurile reversibile, hipergrupurile complete, poligrupurile şi hipergrupurile canonice. Pentru început, am determinat forma ecuaţiei claselor în limbaj de hipergrupuri reversibile şi hipergrupuri complete. Acest lucru a fost foarte util, pentru că am găsit o legătură între gradul de comutativitate al unui hipergrup complet şi ecuaţia claselor (Teorema 9). Datorită Teoremei de Caracterizare pentru un hipergrup complet, am determinat similitudini, dar şi diferenţe cu rezultatele cunoscute din teoria grupurilor. De asemenea, în teoria poligrupurilor am calculat gradul de comutativitate, dar şi gradul de comutativitate relativ al subpoligrupurilor asociate unui poligrup. Un concept particular poligrupurilor reprezintă extinderea poligrupurilor prin poligrupuri (Definiţia 70). În teză am arătat că acest principiu poate fi privit în context de hipergrupuri canonice şi ar putea reprezenta o modalitate de construcţie (Teorema 24). Un alt aspect important prezentat în teză, face referire la introducerea funcţiei lui Euler în cadrul teoriei hipergrupurilor complete şi teoriei hipergrupurilor canonice. În fiecare dintre teoriile menţionate, am tratat situaţii diferite. În teoria hipergrupurilor complete, am determinat legături cu funcţia lui Euler din teoria grupurilor şi am găsit o relaţie între funcţia lui Euler asociată unui hipergrup complet şi funcţia lui Euler asociată subhipergrupurilor hipergrupului complet (Teorema 13). Pentru hipergrupurile canonice, am calculat funcţia lui Euler asociată hipergrupului C_n (Teoremele 21, 23) şi extinderii de hipergrupuri (Teorema 26). Multe probleme din acest domeniu sunt deschise. Vom prezenta o parte dintre ele, ce reprezintă cercetarea viitoare.

Problema 1 Fie $(H, \circ)$ un hipergrup complet şi $\mathcal{K}$ subhipergrup al hipergrupului H. Să se afle legătura între gradul de comutativitate al hipergrupului H, ce a fost determinat în teză şi gradul de comutativitate relativ al subhipergrupului $\mathcal{K}$. Concept pe care l-am introdus în cadrul teoriei poligrupurilor.

Problema 2 Demonstrarea conjecturii enunţate în Capitolul 2 (Conjectura 16), care afirmă că nu există o constantă cu ajutorul căreia să putem caracteriza hipergrupurile complete comutative prin intermediul gradului de comutativitate, aşa cum se întâmplă în cadrul teoriei grupurilor.

Problema 3 Fie $(H, \circ)$ un hipergrup şi funcţia lui Euler asociată hipergrupului. Să se determine corespondenţa dintre $\varphi(H)$ şi $\varphi(|H|)$.

Problema 4 În cadrul teoriei grupurilor, se cunoaşte faptul că funcţia lui Euler asociată unui grup, este egală cu funcţia lui Euler asociată cardinalului grupului: $\varphi(G) = \varphi(|G|)$, unde G este un grup. Prin urmare, îmi propun să caracterizez hipergrupurile ciclice [**61**] cu ajutorul funcţiei lui Euler.

Problema 5 Caracterizarea poligrupurilor nilpotente în funcţie de gradul de comutativitate al poligrupului.

Problema 6 În teoria poligrupului, am asociat unui poligrup, matricea comutativă. Să se găsească o corespondeţă între valorile proprii sau rangul matricei şi gradul de comutativitate al poligrupului.

Problema 7 În cadrul teoriei grupurilor, Pierce şi Schröder au introdus conceptul de latice. Regăsim multe lucrări în această direcţie [**3**], [**36**], [**62**], [**69**], [**77**]. În cadrul teoriei hipergrupurilor, sunt puţine articole care tratează această temă, spre exemplu [**39**], [**79**] . Prin urmare, scopul este acela de a determina structuri laticeale asociate hipergrupurilor.

Bibliografie

[1] M. Al Tahan, B. Davvaz, **A. Sonea**−*Relative commutativity degree of a subpolygroup of a finite polygroup*, trimis spre publicare.

[2] Z. Bavel, J. Gryzmala, K. Hong−*On the conectivity of the product of automata*, Fundamental Informatics, 7(2), $225-265$, 1984.

[3] G.Birkhoff− *Lattice Theory, First edition*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. v+155, 1940

[4] P. Bonansinga−*Quasicanonical hypergroups. (Italian)*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur., 27, $9-17$, 1981.

[5] A. Castelaz−*Commutativity degree of finite groups*, A Thesis Submitted to the Graduade Faculty of Wake Forest University, in Partial Fulfillment of the Requirements for the degree of Masters of Arts in the Departament of Mathematics, May 2010, North Ca-rolina.

[6] S.D.Comer− *Extension of polygroups by polygroups and their representation using colour schemes*, Universal Algebra and Lattice Theory. in: Lecture notes in Meth, vol, 1004, $91-103$, 1982.

[7] S.D.Comer− *Polygroups derived from cogroups*, J. Algebra, 89, $397-405$, 1984.

[8] P. Corsini− *Binary relations and hypergrupoids*, Italian J. Pure Appl. Math 7, $11-18$, 2000.

[9] P. Corsini− *Introducere în teoria hipergrupurilor*, Ed. Universităţii Alexandru Ioan Cuza, Iaşi, 1998.

[10] P. Corsini − *Hypergroups associated with HX-groups, Analele Universităţii Ovidius Constanţa*, Vol.25(2), $49-64$, 2017.

[11] P. Corsini− *(I.P.S)Ipergruppi di ordine* 6, Annales Scientifiques De L'Universite De Clermont- Ferrand 2, Serie Mathematiques

[12] P. Corsini− *On the hypergroups associated with binary relations*, Multiple Valued Logic 5, $407-419$, 2000

[13] P. Corsini− *Prolegomena of hypergroup theory*, Aviani Editore, 1993.

[14] P. Corsini− *HX-groups and Hypergroups, Analele Universităţii Ovidius Constanţa*, Vol.24(3), $101-121$, 2016.

[15] P. Corsini− *HX-Hypergroups associated with the direct product of some* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,Journal of Algebraic Structures and Their Applications, 1(3), $1-15$, 2016.

[16] P. Corsini– *Sugli ipergruppi canonici finili con identila parziali scalari*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, serie II, XXXVI, 1987.

[17] P. Corsini, I. Cristea– *Fuzzy grade of i.p.s hypergroups of order* 7, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2004.

[18] P. Corsini, V. Leoreanu– *Applications of hyperstructures theory*, Kluwer Academic Publishers Boston/Dordrechtt/ London, 2003.

[19] P. Corsini, V.Leoreanu– *Hypergroups and binary relations*, Algebra Universalis, Editura Universităţii Alexandru Ioan Cuza, Iaşi, 43(2000), $321-330$ 1998.

[20] I. Cristea– *Complete hypergroups, 1-hypergroups and fuzzy sets*, An. St. Univ. Ovidius Constanţa, vol.10(2), $25-38$, 2002.

[21] I. Cristea– *Contributions to the study of the connections between algebraic hyperstructures and fuzzy sets*, PhD Thesis, "Ovidius" University Constanţa, Faculty of Mathematics and Informatics, 2007

[22] I. Cristea– *Fuzzy grade of the complete hypergroups*, Setvalued Mathematics and Applications, 2006.

[23] I. Cristea, M. Stefănescu– *Binary relations and reduced hypergroups*, Discrete Mathematics 308, $3537-3544$, 2008.

[24] Irina Cristea, M. Ştefănescu– *On the fuzzy grade of hypergroups*, Journal Fuzzy Sets and Systems, 2008

[25] Bijan Davvaz– *Polygroup Theory and Related Systems*, World Scientific Publishing, 2012

[26] B. Davvaz– *Semihypergroup theory*, Elsevier/Academic Press, London, 2016.

[27] B. Davvaz, I. Cristea– *Fuzzy Algebraic Hyperstructures- An introduction*, Studies in Fuzziness and Soft Computing 321. Cham: Springer, 2015.

[28] M. De Salvo, G. Faro– *On the n^*-complete hypergroups*, Discrete Mathematics, 209/209, $177-188$, 1997.

[29] M. De Salvo, D. Freni, G. Faro– *Hypercyclic subhypergroups of finite fully simple semihypergroups*, Journal Multiple Valued Logic and Soft Computing, 29, 595–617, 2017.

[30] M. Dresher, O. Ore– *Theory of multigroups*, American Journal of Mathematics, 60, $705-733$, 1938.

[31] P. Erdős, P. Turán– *On Some Problems of a Statistical Group Theory* , Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 19 $(3-4)$, pp.$413-435$, (1968).

[32] A. Erfanian, R. Rezaei, P. Lescot– *On the relative commutativity degree of a subgroup of a finite group* Communications in Algebra, 35(12), $4183-4197$, 2007.

[33] D. Freni– *A new characterization of the derived hypergroup via strongly regular equivalences*, Comm. Algebra, 30, 8, $3977-3989$, 2002.

[34] D. Freni– *Une note sur le coeur d'un hypergroupe et sur la cloture transitive β^* di β*, Riv. di Mat. Pura e Appl. n. 8, 1991.

[35] P.G. Garcia, S. Light– *A generalization of Euler's function*, Fibbonaci Quart, 21, 26-28, 1983

[36] G. Gräetzer– *Lattice Theory: Foundation*, Birkhauser, January 2011.

[37] W.H. Gustafson– *What is the probability that two group elements commute?*, Am. Math. Mon, 80(9), 1031 – 1034, 1974.

[38] P. Hall – *The Eulerian functions of a group*, Quart. J. Math. 7, 134 – 151, 1936.

[39] D. Heidari, B. Davvaz – *On ordered hyperstructures*, U.P.B Sci. Bull. Series A, Vol. 73, Iss. 2, 2011 .

[40] Li Hongxing, Duan Qinzi and Wang Peizhuang – *Hypergroup (I), Busefal*, Vol.23 1985

[41] Li Hongxing, Duan Qinzi and Wang Peizhuang – *Hypergroup (II), Busefal*, Vol.25 1986

[42] M. Koskas– *Groupes et hypergroupes homomorphes a un demi-hypergroupe*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 257, 1963.

[43] M. Koskas– *Grupoides, Demi-hypergroupes et hypergroupes*, Journal Math Pures Applied 49, 155 – 192, 1970.

[44] M. Jafarpour, H. Aghabozorci, B. Davvaz – *On nilpotent and solvable polygroups*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Vol.39, No. 3, 487 – 499, 2013.

[45] J. Jantosciak– *Homomorphism, equivalence and reductions in hypergroups*, Riv. Mat. Pura Appl. 9, 23 – 47, 1991

[46] J. Jun– *Algebraic geometry over hyperrings*, Adv. Math., 323, 142 – 192, 2018.

[47] J. Jun– *Hyperstructres of affine algebraic group schemes*, Journal Number Theory, 167, 336 – 352, 2016.

[48] M. Kankaras, I. Cristea– *Fuzzy reduced hypergroups*, Mathematics, 8, 263, 2020.

[49] V. Leoreanu– *Centralisateur d'un element dans un hypergroupe reversible*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Tomo XLIII, 413 – 418, 1994

[50] V. Leoreanu– *On the heart of join spaces and of regular hypergroups*, Riv. Mat Pura e Appl., no. 17, 133 – 142, 1995.

[51] V. Fotea, P. Corsini, **A.Sonea**, D.Heidari– *Complete parts and subhypergroups in reversible regular hypergroups*, acceptat pentru publicare în Analele Universităţii Constanţa, Seria Matematică, 2021.

[52] V. Leoreanu, P. Corsini – *Sur le theoreme de Lagrange dans les hypergroups*, Buletinul Ştiinţific al Universităţii Politehnice Timişoara, Seria Mat. Fiz., 41(55), nr. 2, 1 – 22, 1996.

[53] P Lescot –*Central extensions and commutativity degree* Comm. Algebra, 29(10), 4451 – 4460, 2001.

[54] F. Marty– *Sur une generalization de la notion de group*, In 8*th* Congress Math. Scandenaves, 45 – 49, 1934

[55] D. MacHale– *How commutative can a non-commutative group be?*, The Mathematical Gazette, Vol. 58, No. 405, pp. 199 – 202, (1974).

[56] C. Massourous, J. Mittas– *Languages-automata and hypercompositional structure*, Algebraic Hyperstructures and Applications, Proceeding 4th International Congress Xanthi, Greece, World Scientific 137 – 147, 1991.

[57] R. Migliorato– *On the complete hypergroups*, Riv. di Mat. Pura e Appl. Univ. Udine, n. 12, 1993.

[58] R. Migliorato– *Semi-ipergruppi e ipergruppi n-completi*, Atti Sem. Mat. Fis, Univ. Modena, $XXXIV$, 1985.

[59] J. Mittas– *Hypergroupes canoniques*,(French) Math. Balkanica 2, 165 – 179, 1972.

[60] T. Nakano – *Rings and partly ordered systems*, Math. Zeitschrift, 99, 355 – 376, 1967.

[61] M. Novák, Š. Krěhlíc, I. Cristea– *Cyclicity in EL-Hypergroups*, Symmetry, 2018.

[62] P. P. Pálfy – *Groups and Lattices*, Departament of Algebra and Number Theory, Eötvös University, Budapesta.

[63] W. Prenowitz–*Projective geometries as multigroups*, Amer. J. Math., 65, 235–256, 1943.

[64] W. Prenowitz, J. Jantosciak–*Join Geometries*,Springer-Verlag, UTM., 1979.

[65] J. Rotman– *An Introduction to the Theory of Groups*, Fourth Edition, Springer, 1999.

[66] I.G Rosenberg– *Hypergroups Theory and join spaces determined by relations*, Italian J. Pure Appl. Math 16, 201-210,2004

[67] D.J.Rusin–*"What is the probability that two elements of a finite group commute?"*, Pacific J.Plath, 82(1), 1979, 237 – 247.

[68] W.R.Scott– *Group Theory*, Dover Publications,INC, New York, 1987.

[69] R. Schmidt– *Subgroup Lattices of Groups*, de Gruyter Expositions in Mathematics, 14, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1994.

[70] H. Shojaei, R. Ameri– *Some results on categories of Krasner Hypermodules*, Journal of Fundamental and Applied Sciences, 8(3S), 2298-2306, 2016.

[71] H. Shojaei, R. Ameri– *Various kinds of quotient of a canonical hypergroup*, Sigma Journal Engineering and Natural Science, 9(1), 133 – 141, 2018.

[72] **A. Sonea**– *HX-groups associated with the dihedral group D_n*, Multiple Valued Logic and Soft Computing, 3, 11 – 26, 2019.

[73] **A. Sonea**– *New aspects in polygroup theory*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii Ovidius Constanţa, Seria Matematică, 28, 241 – 254, 2020.

[74] **A. Sonea**, I. Cristea– *The class equation and the commutativity degree for complete hypergroups*, Mathematics, 8(12), 2253, 2020.

[75] **A. Sonea**– *The Euler's totient function in complete hypergroup theory*, trimis spre publicare.

[76] **A. Sonea**, B. Davvaz– *The Euler's totient function in canonical hypergroup theory*, trimis spre publicare.

[77] M. Suzuki– *On the lattice of subgroups of finite groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 70, 345 – 371, 1951.

[78] M. Tărnăuceanu − *A generalization of the Euler's totient function*, Assian European Journal of Mathetmatics, 2013

[79] M. Tărnăuceanu− *On the poset of subhypergroups of a hypergroup*, Italian Journal Open Problems Comp. Math, 3(2), 505 − 508, 2010.

[80] M. Tărnăuceanu − *Subgroup commutativity degrees of finite groups*, Journal of Algebra, 337, 363 − 368, 2011.

[81] I. Tofan, A.C.Volf−*On some conections between hyperstructures and fuzzy sets*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 7, 63 − 68, 2000

[82] T. Vougiouklis− *On some representations of hypergroups*, Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 95, série Mathématiques , no 26, 21 − 29, 1990.

[83] Z. Zhenliang− *The properties of HX-groups*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.2, 1997

[84] M. Zahedi, M. Bolurian, A. Hasankhani− *On polygroups and fuzzy subpolygroups*, Journal Fuzzy Mathematics, 3, 1 − 15, 1995.

[85] J. Zhan, B. Davvaz, K.P. Shum− *A new view of fuzzy hypermodules*, Acta Math.Sin. (Engl. Ser.), 23(8), 1345 − 1356 2007.