если на контуре треугольника T_1 выполняются условия шарнирного опирания

$$w_{\Gamma} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{3.23}$$

Для этого достаточно заметить, что эффект условий (3.23) равен минус единице. И тогда собственные функции определятся формулой

$$w_{kl} = \frac{12}{a}\left[\cos\frac{2k+1}{2a}(x-y)\cos\frac{2l+1}{2a}(x+y) - \cos\frac{2k+1}{2a}(x+y)\cos\frac{2l+1}{2a}(x-y)\right]. \tag{3.24}$$

Частоты собственных колебаний легко получить, подставив (3.24) в (3.22).

Институт Математики АН УССР
Киев, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Зоммерфельд А. — *Уравнения в частных производных в применении к задачам физики.*
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. — *Обобщенные функции и действия над ними*, ГИФМЛ, М. 1959.
3. Джон Ф. — *Плоские волны и сферические средние*, ИИЛ, М, 1958.

DEZVOLTAREA FUNCȚIEI LUI GREEN A ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP ELIPTIC DUPĂ SOLUȚIILE FUNDAMENTALE, ÎN UNELE DOMENII POLIGONALE

Rezumat

În lucrare se arată că dezvoltarea după soluții fundamentale este posibilă, dacă datele la limită pe frontiera poligonului ale cărui unghiuri sînt $\frac{\pi}{m_i}$ (m_i întreg) admit o reflexie. Este luat în considerare un șir de probleme asupra determinării valorilor proprii ale operatorului lui Laplace, în cazul unui domeniu triunghiular.

LE DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION DE GREEN D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE ELLIPTIQUE D'APRÈS LES SOLUTIONS FONDAMENTALES, SUR QUELQUES DOMAINES POLYGONAUX

Résumé

On démontre que le développement considéré est possible si les données à la frontière du polygone, dont les angles sont $\frac{\pi}{m_i}$ (m_i entiers) admettent une réflexion. On considère encore une suite de problèmes sur la détermination des valeurs propres de l'opérateur de Laplace, dans le cas d'un domaine triangulaire.

SUR L'ENSEMBLE DE MONOGÉNÉITÉ DES REPRÉSENTATIONS DIFFÉRENTIABLES DE E_n

PAR

PETRU CARAMAN

Introduction

L'ensemble

$$\mathfrak{M}_{z_0} = \bigcap_{\varepsilon>0} M_\varepsilon \tag{1}$$

– où $\cap$ signifie l'intersection d'ensembles et M_ε est l'adhérence de l'ensemble M_ε des valeurs du rapport incrémentaire

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{2}$$

lorsque $0 < |z| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — s'appelle l'ensemble de monogénéité de la fonction complexe $f(z)$ en z_0 (Fédoroff [4]). Kasner [8] a montré que l'ensemble de monogénéité d'une fonction complexe différentiable est un cercle, appelé par lui cercle dérivé et par d'autres (par exemple Hedrick [6]) le cercle de Kasner et qui se réduit à un point lorsque la fonction $f(z)$ est analytique au point considéré, et à un cercle ayant le centre à l'origine, lorsque $f(z)$ est analytiquement conjugué. Dans un ouvrage antérieur [2], j'ai montré que les éléments du cercle de Kasner s'expriment en fonction des éléments des ellipses infinitésimales qui interviennent dans la définition de Grötzsch [5] et dans celle de Lavrentieff [9]. Une généralisation immédiate et naturelle de l'ensemble (1) dans le cas des quaternions s'obtient [2] en remplaçant les expressions (1) et (2) par

$$\mathfrak{M}_{x_0} = \bigcap_{\varepsilon>0} M_\varepsilon \tag{3}$$

et

$$(4)\qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

où $x=x^1+ix^2+jx^3+kx^4$ est la variable hypercomplexe et $f(x)=\bar{x}^1+i\bar{x}^2+j\bar{x}^3+k\bar{x}^4$ est une fonction hypercomplexe. Nous avons montré aussi que, en harmonie avec la théorie des fonctions d'une variable complexe, l'ensemble de monogénéité d'une représentation quaternionique différentiable en un point de régularité se réduit à un point, tandis que l'ensemble de monogénéité d'une représentation quaternionique différentiable conjuguée en un point de régularité se réduit à une hypersphère ayant le centre à l'origine. Nous allons démontrer cependant que, contrairement à ce qui se passe dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, pour une représentation quaternionique différentiable quelconque, l'ensemble de monogénéité n'est pas une hypersphère, pas même une hyperquadrique. Mais dans le cas d'un espace euclidien de dimension n, E_n, où l'on n'a pas défini de division entre les vecteurs, l'expression (4) — où cette fois-ci $x=x^ie_i$ sont des vecteurs de cet espace et $e_i\,(i=1,\ldots,n)$ sont les verseurs unité — n'a plus de sens. Nous avons donc été obligé d'introduire une nouvelle notion, qui remplace dans ce cas la notion d'ensemble de monogénéité définie antérieurement. Cette nouvelle notion que nous allons appeler ensemble de monogénéité faible s'obtient de la précédente en remplaçant l'expression (4) par l'expression

$$(5)\qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|},$$

où $x=x^ie_i$.

Dans la seconde partie de l'ouvrage, nous allons montrer ce que devient l'ensemble de monogénéité faible dans un point de différentiabilité où la matrice jacobienne a le rang $r\,(1\leqq r\leqq n)$. L'ouvrage finit par un théorème sur l'ensemble de monogénéité faible d'une représentation quasi-conforme de E_n.

1. *L'ensemble de monogénéité d'une représentation quaternionique différentiable*

L'ensemble de monogénéité d'une représentation quaternionique différentiable $\bar{x}=f(x)$ peut se mettre aussi sous la forme

$$\bigcup_s \lim_{(x-x_0)_s\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

où $(x-x_0)_s$ est un vecteur de direction s et $\bigcup$ est la réunion des ensembles correspondants lorsque s parcourt l'ensemble des directions de E_4.

Pour une direction s fixe, l'ensemble de monogénéité à droite se réduit au point

$$\xi=\lim_{\Delta x_s\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x_s\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x\,(a^1+ia^2+ja^3+ka^4)}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial s}(a^1-ia^2-ja^3-ka^4)=(\bar{x}^1_q+i\bar{x}^2_q+j\bar{x}^3_q+k\bar{x}^4_q)\,a^q\,(a^1-ia^2-ja^3-ka^4),$$

où $\Delta f=f(x)-f(x_0)$, $\Delta x=x-x_0$, $a^q=\cos(s,x^q)$, $(q=1,2,3,4)$ et $\bar{x}^p_q=\dfrac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^q}$ $(p,q=1,2,3,4)$. Donc lorsque s varie, l'équation paramétrique de la surface représentant l'ensemble de monogénéité est la suivante:

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi^1=\sum\limits_{p=1}^{4}\bar{x}^p_q\,a^q\,a^p,\\ \xi^2=(\bar{x}^2_q a^1-\bar{x}^1_q a^2+\bar{x}^4_q a^3-\bar{x}^3_q a^4)a^q,\\ \xi^3=(\bar{x}^3_q a^1-\bar{x}^1_q a^3-\bar{x}^4_q a^2+\bar{x}^2_q a^4)a^q,\\ \xi^4=(\bar{x}^4_q a^1-\bar{x}^1_q a^4+\bar{x}^3_q a^2-\bar{x}^2_q a^3)a^q. \end{cases}$$

D'une manière analogue on voit que, dans le cas de monogénéité à gauche, le point correspondant

$$\xi=(a^1-ia^2-ja^3-ka^4)(\bar{x}^1_q+i\bar{x}^2_q+j\bar{x}^3_q+k\bar{x}^4_q)a^q,$$

décrit la surface

$$(6')\qquad \begin{cases} \xi^1=\sum\limits_{p=1}^{4}\bar{x}^p_q\,a^q\,a^p,\\ \xi^2=(\bar{x}^2_q a^1-\bar{x}^1_q a^2+\bar{x}^3_q a^4-\bar{x}^4_q a^3)a^q,\\ \xi^3=(\bar{x}^3_q a^1-\bar{x}^1_q a^3+\bar{x}^4_q a^2-\bar{x}^2_q a^4)a^q,\\ \xi^4=(\bar{x}^4_q a^1-\bar{x}^1_q a^4+\bar{x}^2_q a^3-\bar{x}^3_q a^2)a^q. \end{cases}$$

Commençons par rappeler [2] les deux théorèmes suivants (mentionnés dans l'introduction):

Théorème 1. *Dans un point de régularité à droite ou à gauche d'une représentation quaternionique différentiable $\bar{x}=f(x)$, l'ensemble de monogénéité se réduit au point $\xi=\bar{x}^1+i\bar{x}^2+j\bar{x}^3+k\bar{x}^4$.*

Théorème 2 *Dans un point de régularité à droite ou à gauche d'une représentation quaternionique conjuguée différentiable, l'ensemble de monogénéite se réduit à l'hypersphère.*

$$\delta_{pq}\xi^p\xi^q = \delta^{pq}\bar{x}_1^p\bar{x}_1^q:$$

Et maintenant, démontrons le théorème suivant;

Théorème 3. *L'ensemble de monogénéité d'une représentation quaternionique différentiable quelconque n'est pas en général une hypersurface du second degré.*

En effet, écrivons l'équation générale d'une hypersurface du second degré:

$$a_{pq}\xi^p\xi^q + a_p\xi^p + a = 0 \quad (a_{pq} = a_{qp}) \tag{7}$$

et voyons s'il est possible de déterminer les 15 quantités

$$a_{pp},\ a_{pq},\ a_p,\ a \quad (p \neq q;\ p, q = 1, 2, 3, 4) \tag{8}$$

de telle manière que l'équation (7) soit vérifiée par les expressions de ξ^m $(m = 1, 2, 3, 4)$ données par les relations (6) ou (6').

Dans ce but, remplaçons d'abord les quantités ξ^m $(m = 1, 2, 3, 4)$ de l'équation (7) par leurs expressions fournies par (6), ce qui nous conduit à:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\Big(\sum_{p=1}^{4}\bar{x}_q^p a^q a^p\Big)^2 + a_{22}[(\bar{x}_q^2 a^1 - \bar{x}_q^1 a^2 + \bar{x}_q^4 a^3 - \bar{x}_q^3 a^4)a^q]^2 + \\
&+ a_{33}[(\bar{x}_q^3 a^1 - \bar{x}_q^1 a^3 - \bar{x}_q^4 a^2 + \bar{x}_q^2 a^4)a^q]^2 + a_{44}[(\bar{x}_q^4 a^1 - \bar{x}_q^1 a^4 + \bar{x}_q^3 a^2 - \bar{x}_q^2 a^3)a^q] + \\
&+ 2\Big(\sum_{p=1}^{4}\bar{x}_q^p a^q a^p\Big)[a_{12}(\bar{x}_q^2 a^1 - \bar{x}_q^1 a^2 + \bar{x}_q^4 a^3 - \bar{x}_q^3 a^4)a^q + \\
&+ 2a_{13}(\bar{x}_q^3 a^1 - \bar{x}_q^1 a^3 - \bar{x}_q^4 a^2 + \bar{x}_q^2 a^4)a^q + 2a_{14}(\bar{x}_q^4 a^1 - \bar{x}_q^1 a^4 + \bar{x}_q^3 a^2 - \bar{x}_q^2 a^3)a^q] + \\
&+ 2a_{23}[\bar{x}_q^2 a^1 - \bar{x}_q^1 a^2 + \bar{x}_q^4 a^3 - \bar{x}_q^3 a^4)a^q][(\bar{x}_q^3 a^1 - \bar{x}_q^1 a^3 - \bar{x}_q^4 a^2 + \bar{x}_q^2 a^4)a^q] + \\
&+ 2a_{24}[(\bar{x}_q^2 a^1 - \bar{x}_q^1 a^2 + \bar{x}_q^4 a^1 - \bar{x}_q^3 a^4)a^q][\bar{x}_q^4 a^1 - \bar{x}_q^1 a^4 + \bar{x}_q^3 a^2 - \bar{x}_q^2 a^3)a^q] + \\
&+ 2a_{34}[(\bar{x}_q^3 a^1 - \bar{x}_q^1 a^3 - \bar{x}_q^4 a^2 + \bar{x}_q^2 a^4)a^q][(\bar{x}_q^4 a^1 - \bar{x}_q^1 a^4 + \bar{x}_q^3 a^2 - \bar{x}_q^2 a^3)a^q] + \\
&+ 2a_1\Big(\sum_{p=1}^{4}\bar{x}_q^p a^q a^p\Big) + 2a_2(\bar{x}_q^2 a^1 - \bar{x}_q^1 a^2 + \bar{x}_q^4 a^3 - \bar{x}_q^3 a^4)a^q + \\
&+ 2a_3(\bar{x}_q^3 a^1 - \bar{x}_q^1 a^3 - \bar{x}_q^4 a^2 + \bar{x}_q^2 a^1)a^q + \\
&+ 2a_4(\bar{x}_q^4 a^1 - \bar{x}_q^1 a^4 + \bar{x}_q^3 a^2 - \bar{x}_q^2 a^3)a^q + a = 0.
\end{aligned}$$

Maintenant, annulons les coefficients des quantités 1, $a^m a^n$, $a^m a^4$, $a^m a^n a^p a^q$, $a^m a^n a^p a^4$ $(m, n, p, q = 1, 2, 3)$. De cette façon, nous obtenons un système de 35 équations homogènes aux 15 inconnues (8). Pour que le

système admette des solutions différentes de zéro, il faut que tous les déterminants du 15-ème ordre de la matrice associée au système s'annulent. Mais on constate que le déterminant des 15 premières équations par exemple, c'est-à-dire le déterminant qui correspond aux quantités 1, $a^m a^n$, $a^m a^4$, $(a^m)^4$, $(a^1)^3 a^2$, $(a^1)^3 a^3$ $(m, n = 1, 2, 3)$, est différent de zéro. En effet, ce déterminant du 15-ème ordre est de la forme:

$$\begin{array}{c|ccccccccccccccc}
 & a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{23} & a_{24} & a_{34} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a \\
\hline
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
(a^1)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
(a^2)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
(a^3)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
a^1a^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
a^1a^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
a^2a^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
a^1a^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
a^2a^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
a^3a^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(a^1)^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(a^2)^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(a^3)^4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(a^1)^3a^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(a^1)^3a^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array} \tag{9}$$

Pour calculer les éléments de cette matrice plus aisément, on observe la règle suivante: les éléments qui correspondent à la ligne $(a^m)^2$ $(m = 1, 2, 3)$ et à la colonne a_{pp} $(p = 1, 2, 3, 4)$ sont de la forme $(b_p^m)^2 - (c_p^m)^2$ tandis que ceux qui correspondent à la ligne $(a^m)^2$ et à la colonne a_{pq} sont de la forme $b_p^m b_q^m - c_p^m c_q^m$ (avec les b_p^m, c_p^m et b_q^m, c_q^m correspondant respectivement à a_{pp} et a_{qq}). Les éléments des autres 6 lignes des colonnes a_{pp} $(p = 1, 2, 3, 4)$ sont de la forme $2(d_p^m e_p^m + f_p^m g_p^m)$, tandis que ceux des colonnes a_{pq} sont de la forme: $2(d_p^m e_q^m + e_p^m d_q^m + f_p^m g_q^m + g_p^m f_q^m)$.

Soit $|\beta_q^p|$ le déterminant du 14-ème ordre obtenu du déterminant précédent en supprimant la première ligne et la dernière colonne. Son expression est de la forme: $|\beta_q^p| = a_{m\ldots n}(\bar{x}_1^1)^m \ldots (\bar{x}_4^4)^n$.

Pour que ce déterminant soit égal à zéro il faut que toutes les quantités $a_{m\ldots n} = 0$. Mais nous allons démontrer que le coefficient de l'un des termes qui contient $\bar{x}_1^1$ à la plus grande puissance est différent de zéro.

Les éléments du déterminant $|\beta_q^p|$ qui contiennent $(\bar{x}_1^1)^2$ sont les suivants:

$$\beta_{10}^1 = (\bar{x}_1^1)^2 + \dots,\ \beta_1^1 = (\bar{x}_1^1)^2 + \dots,\ \beta_{10}^1 = (\bar{x}_1^1)^2 + \dots,\ \beta_{13}^5 = -2(\bar{x}_1^1)^2 + \dots$$

$$\text{et } \beta_{14}^6 = -2(\bar{x}_1^1)^2,$$

de sorte que les termes de la plus grande puissance en $\bar{x}_1^1$ pourront s'obtenir du produit de la quantité $\beta_{10}^1\beta_1^4\beta_{13}^5\beta_{14}^6 = 4(\bar{x}_1^1)^8$ avec les termes de la plus grande puissance en $\bar{x}_1^1$ du déterminant $|\gamma_n^m|$, obtenu de (9) en supprimant les lignes et les colonnes correspondant aux éléments β_{10}^1, β_1^4, β_{13}^5, β_{14}^6. Mais $|\gamma_n^m|$ est de la forme:

$$|\gamma_n^m| = \begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2x_1^1x_1^1 & \cdot & -2(x_1^2+x_2^1)x_1^1 & -2x_1^2x_1^1 & -2(x_1^1+x_2^3)x_1^1 & -2(x_2^2-x_1^1)x_1^1 & \cdot & -2x_1^1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & -2x_4^2x_1^1 & -2(x_4^3+x_3^4)x_1^1 & 2x_4^3x_1^1 & -2(x_1^1+x_3^3)x_1^1 & -2(x_3^2-2x_4^1)x_1^1 & \cdot & \cdot & -2x_1^1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & -2x_1^1x_1^1 & \cdot & 2x_4^1x_1^1 & -2x_4^3x_1^1 & \cdot & \cdot & \cdot & -2x_1^1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

où les points représentent des éléments qui ne contiennent pas $\bar{x}_1^1$, tandis que des autres éléments on a écrit seulement les termes qui contiennent $\bar{x}_1^1$. Limitons-nous maintenant à chercher, parmi les termes de la plus grande puissance en $\bar{x}_1^1$, ceux qui sont de la plus grande puissance en $\bar{x}_4^1$. Ces termes s'obtiendront en multipliant

$$-4(\bar{x}_1^1)^8\gamma_5^3\gamma_4^5\gamma_3^6 = 32(\bar{x}_1^1)^{11}(\bar{x}_4^1)^3, \tag{10}$$

par les termes de la plus grande puissance en $\bar{x}_1^1$ du déterminant $|\varepsilon_i^k|$ obtenu du déterminant $|\gamma_n^m|$ en supprimant les lignes et les colonnes qui correspondent aux éléments γ_5^3, γ_4^5, γ_3^6. Le déterminant $|\varepsilon_i^k|$ est de la forme:

$$|\varepsilon_i^k| = \begin{vmatrix}
\cdot & (\bar{x}_4^1)^2 & 2(\bar{x}_4^1+\bar{x}_2^3)\bar{x}_4^1 & -2\bar{x}_4^1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
(\bar{x}_4^1)^2 & \cdot & 2(\bar{x}_3^2-\bar{x}_4^1)\bar{x}_4^1 & -2\bar{x}_4^1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
-(\bar{x}_4^1+\bar{x}_2^3)\bar{x}_4^1 & (\bar{x}_4^1-\bar{x}_3^2)\bar{x}_4^1 & -2(\bar{x}_4^1)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & -2\bar{x}_4^2\bar{x}_4^1 & -2\bar{x}_4^3\bar{x}_4^1 & \cdot & \cdot & -2\bar{x}_4^1 & \cdot \\
-2\bar{x}_4^3\bar{x}_4^1 & \cdot & 2\bar{x}_4^2\bar{x}_4^1 & \cdot & 2\bar{x}_4^1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & -(\bar{x}_4^1)^2 & (\bar{x}_4^1+\bar{x}_2^3)\bar{x}_4^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-(\bar{x}_4^1)^2 & \cdot & (\bar{x}_4^1-\bar{x}_3^2)\bar{x}_4^1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix},$$

où les points représentent les éléments qui ne contiennent pas $\bar{x}_4^1$, tandis que dans les autres éléments on a écrit seulement les termes qui contiennent $\bar{x}_4^1$. Mais les termes de la plus grande puissance en $\bar{x}_4^1$ du déterminant $|\varepsilon_i^k|$ s'obtiennent en multipliant la quantité

$$\varepsilon_7^1\varepsilon_6^2\varepsilon_3^4\varepsilon_5^5\varepsilon_4^6 = 8(\bar{x}_4^1)^8, \tag{11}$$

par le déterminant

$$\begin{vmatrix} -2\bar{x}_4^1 & 2(\bar{x}_3^2+\bar{x}_4^1) \\ -2\bar{x}_4^1 & 2(-\bar{x}_3^2+\bar{x}_4^1) \end{vmatrix} = 4\bar{x}_4^1(\bar{x}_3^2+\bar{x}_2^3), \tag{12}$$

obtenu en supprimant les lignes et les colonnes correspondant aux éléments ε_7^1, ε_6^2, ε_3^4, ε_5^5, ε_4^6. Donc les termes de la plus grande puissance en $\bar{x}_4^1$ parmi ceux de la plus grande puissance en $\bar{x}_1^1$ et qui s'obtiennent en multipliant les quantités (10), (11) et (12) sont $128(\bar{x}_1^1)^{11}(\bar{x}_4^1)^{12}\bar{x}_3^2$ et $128(\bar{x}_1^1)^{11}(\bar{x}_4^1)^{12}\bar{x}_2^3$, de sorte que, en général (c'est-à-dire dans le cas d'une représentation quaternionique différentiable quelconque), le déterminant (9) ne s'annule pas. Donc, le système de 15 équations homogènes correspondant à ce déterminant, et d'autant plus le système des 35 équations homogènes initial, n'admet pas de solution non-banale, ce qui démontre que les équations (6) ne représentent pas une hypersurface du second degré.

On procède de la même manière pour l'ensemble de monogénéité à gauche. Pour calculer les éléments de la matrice qui correspond à (9), on tient compte de la règle mentionnée à cette occasion. En plus, on observe que, lorsqu'on remplace les relations (6) par (6'), les éléments des colonnes qui correspondent à a_{11} et à a_1 dans le déterminant (9) ne changent pas, dans ceux qui correspondent à a_{22} et a_2, nous avons $\bar{x}_q^4 \to -\bar{x}_q^4$ ($\to$ signifie: „est remplacé par") et $\bar{x}_q^3 \to -\bar{x}_q^3$; pour les colonnes a_{33}, a_3 $\bar{x}_q^2 \to -\bar{x}_q^2$, $\bar{x}_q^1 \to -\bar{x}_q^1$ $(q=1,2,3,4)$. Enfin dans les éléments des colonnes a_{pq} les éléments provenant de ξ^p suivent la règle relative à la colonne a_{pp} et ceux provenant de ξ^q suivent la règle relative à la colonne a_{qq}.

Ces règles résultent immédiatement en comparant les systèmes (6) et (6′). Une première conséquence sera que les termes du second degré en $\bar{x}^1_1$ seront conservés (inclusivement le signe), tandis que ceux du premier degré en $\bar{x}^1_1$ seront conservés au signe près. Ainsi, en notant par les mêmes lettres grecques, mais barrées, les éléments correspondant à ceux des déterminants précédents lorsqu'on remplace le système (6) par (6′), nous aurons : $\beta^1_{10}\beta^4_1\beta^5_{13}\beta^6_{14} = \beta^1_{10}\beta^4_1\beta^5_{13}\beta^6_{14} = 4(\bar{x}^1_1)^8$. Ensuite, $\gamma^3_5 = -2\bar{x}^1_1\bar{x}^4_4$ correspond à la colonne a_{14} de (9), de sorte que, en vertu de la règle énoncée tout à l'heure $\bar{\gamma}^3_5 = -\gamma^3_5 = 2\bar{x}^1_1\bar{x}^4_4$; γ^5_4 correspond à a_{24}, de sorte que $\bar{\gamma}^5_4 = -\gamma^5_4 = 2\bar{x}^3_4\bar{x}^1_1$ (car $\bar{x}^3_4$, qu'il provienne soit de ξ^2, soit de ξ^4, passe en $-\bar{x}^3_4$). De même pour $\gamma^6_3 = -\gamma^6_3 = 2\bar{x}^2_4\bar{x}^1_1$. Ensuite, les termes en $(\bar{x}^1_1)^2$ appartenant aux colonnes a_{22}, a_{33}, a_{23} ne changent pas de sorte que $\varepsilon^1_7 = \bar{\varepsilon}^1_7$, $\bar{\varepsilon}^2_6 = \varepsilon^2_6$, $\bar{\varepsilon}^3_3 = \varepsilon^3_3$, tandis que $\bar{\varepsilon}^5_5 = \varepsilon^5_5$, $\bar{\varepsilon}^6_4 = -\varepsilon^6_4$, car ils appartiennent respectivement aux colonnes a_2, a_3. Enfin le déterminant (12) devient :

$$\begin{vmatrix} -2\bar{x}^4_4 & 2(\bar{x}^1_4 - \bar{x}^3_2) \\ -2\bar{x}^4_4 & 2(\bar{x}^1_4 + \bar{x}^2_3) \end{vmatrix} = -4\bar{x}^1_4(\bar{x}^2_3 + \bar{x}^3_2).$$

En combinant tous les résultats antérieurs, il résulte que les termes du plus haut degré en $\bar{x}^4_4$ parmi ceux du plus haut degré en $\bar{x}^1_1$, sont : $-128(\bar{x}^1_1)^{11}(\bar{x}^4_4)^{12}\bar{x}^2_3$ et $-128(\bar{x}^1_1)^{11}(\bar{x}^4_4)^{12}\bar{x}^3_2$. Donc le déterminant correspondant à (9) est différent de zéro, et le système correspondant, et *à fortiori* celui de 35 équations homogènes, n'admet pas de solution non-banale. Donc ni les équations (6′) ne représentent pas une hypersurface du second degré.

2. *L'ensemble de monogénéité faible dans E_n.*

Définition. L'ensemble

$$\mathfrak{M}'_{x_0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} M'_\varepsilon,$$

— où M'_ε est l'ensemble des valeurs du rapport (5) lorsque $0 < |x - x_0| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — s'appelle ensemble de monogénéité faible de $\bar{x} = f(x)$ en x_0. Dans le cas d'une représentation différentiable, cet ensemble devient de la forme

$$\bigcup_s \frac{\partial f}{\partial s} = \bigcup_s \lim_{x \to x_0,\, s \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|}. \tag{13}$$

Le terme de monogénéité faible est justifié par le fait que l'expression (13) dans une direction s est proportionnelle à la différentielle de Gateaux, appelée par Iino [7] aussi la dérivée faible de $f(x)$.

Dans le cours de ce chapitre, pour simplifier le langage, nous utiliserons les termes de surface, ellipsoïde, sphère au lieu d'hypersurface, hyperellipsoïde, hypersphère.

Commençons par établir le théorème suivant :

Théorème 4. *L'ensemble de monogénéité faible correspondant à un point x_0 d'une représentation $\bar{x} = f(x)$, où $\mathcal{J}(x_0) \neq 0$, est l'ellipsoïde*

$$\delta_{ab}\delta_{cd}\mathcal{J}^a_e\mathcal{J}^c_f\xi^b\xi^d = \mathcal{J}^2, \tag{14}$$

où $\mathcal{J}^a_e$ est le complément algébrique de l'élément $\bar{x}^e_a(x_0)$ du jacobien $\mathcal{J}$. Cet ellipsoïde est homothétique à l'ellipsoïde infinitésimal

$$\delta_{ab}x^a_c x^b_d d\bar{x}^c d\bar{x}^d = d_Q, \tag{15}$$

$\left(x^a_c = \dfrac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^c}\right)$, *qui est l'image de la sphère infinitésimale ayant le centre en x_0.*

En effet, l'ensemble de monogénéité d'une représentation différentiable peut s'écrire aussi sous la forme suivante, équivalente à (13) :

$$\xi^i = \bar{x}^1_k a^k, \qquad \delta_{ik}a^i a^k = 1, \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

où a^i sont les cosinus directeurs. Le déterminant des coefficients du système des premières n équations où l'on considère comme inconnues a^i est justement $\mathcal{J}(x_0)$, qui est différent de zéro par hypothèse. Mais alors, en éliminant les cosinus directeurs a^i $(i = 1, \ldots, n)$ entre les $n+1$ relations (16), nous obtenons justement l'équation (14). Enfin l'homothétie des ellipsoïdes (14) et (15) résulte en vertu de la relation $x^i_k = \mathcal{J}^i_k / \mathcal{J}$.

Remarque. L'ellipsoïde (15) intervient dans certaines définitions des représentations quasi-conformes (Zimmermann [10]).

Dans le but de démontrer le théorème correspondant au précédent, lorsque $\mathcal{J} = 0$, nous commençons par établir une relation matricielle.

Lemme

$$\begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} A_{1b} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} A_{ab} \\ A_{1c} \ldots A_{ac} A_{bc} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} A_{1b} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} A_{ab} \\ A_{1t} \ldots A_{at} A_{bt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} A_{1b} A_{1k} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} A_{ab} A_{ak} \\ A_{1c} \ldots A_{ac} A_{bc} A_{ck} \\ A_{1t} \ldots A_{at} A_{bt} A_{tk} \end{vmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} A_{1k} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} A_{ak} \\ A_{1c} \ldots A_{ac} A_{ck} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} A_{1k} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} A_{ak} \\ A_{1t} \ldots A_{at} A_{tk} \end{vmatrix}$$

La démonstration sera faite par induction complète. Établissons la relation (17) dans le cas $a = 1$:

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{1b} \\ A_{1c} & A_{bc} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{1b} \\ A_{1t} & A_{bt} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{1k} \\ A_{1c} & A_{ck} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{1k} \\ A_{1t} & A_{tk} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = (A_{11} A_{bc} - A_{1b} A_{1c})(A_{11} A_{tk} - A_{1t} A_{1k}) -$$

$$-(A_{11} A_{bt} - A_{1b} A_{1t})(A_{11} A_{ck} - A_{1c} A_{1k}) = A_{11} [A_{11} (A_{bc} A_{tk} - A_{bt} A_{ck}) -$$

$$- A_{bc} A_{1t} A_{1k} - A_{tk} A_{1b} A_{1c} + A_{bt} A_{1c} A_{1k} + A_{ck} A_{1b} A_{1t}] = A_{11} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{1b} & A_{1k} \\ A_{1c} & A_{bc} & A_{ck} \\ A_{1t} & A_{bt} & A_{tk} \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant que la relation (17) soit vraie pour les déterminants d'ordre $1, \ldots, a-1$ et démontrons-la pour les déterminants d'ordre a. En effet,

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} & A_{1b} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} & A_{ab} \\ A_{1c} \ldots A_{ac} & A_{bc} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} & A_{1b} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} & A_{ab} \\ A_{1t} \ldots A_{at} & A_{bt} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} & A_{1k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} & A_{ak} \\ A_{1c} \ldots A_{ac} & A_{ck} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} & A_{1k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} & A_{ak} \\ A_{1t} \ldots A_{at} & A_{tk} \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= (A A_{bc} - A_{bm} A_{cn} A^{mn})(A A_{tk} - A_{tp} A_{kq} A^{pq}) - (A A_{bt} -$$

$$- A_{bm} A_{tn} A^{mn})(A A_{ct} - A_{cp} A_{kq} A^{pq}) = A [A (A_{bc} A_{tk} - A_{ck} A_{bt}) -$$

$$- A_{bc} A_{tp} A_{kq} A^{pq} - A_{tk} A_{bm} A_{cn} A^{mn} + A_{bt} A_{cp} A_{kq} A^{pq} +$$

$$+ A_{ck} A_{bm} A_{tn} A^{mn}] + A_{bm} A_{cn} A_{tp} A_{kq} A^{mn} A^{pq} - A_{bm} A_{tn} A_{cp} A^{mn} A^{pq} =$$

$$= A [A (A_{bc} A_{tk} - A_{ck} A_{bt}) - A_{bc} A_{tp} A_{kq} A^{pq} - A_{kt} A_{bm} A_{cn} A^{mn} +$$

$$+ A_{bt} A_{cp} A_{kq} A^{pq} + A_{ck} A_{bm} A_{tn} A^{mn}] -$$

$$- A_{bm} A_{cn} A_{tp} A_{kq} (A^{mn} A^{pq} - A^{mp} A^{dq}),$$

où m, n, p, q parcourent les indices $1, \ldots, a$; A^{mn} représente le complément algébrique de l'élément A_{mn} du déterminant

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} \end{vmatrix}.$$

D'autre part

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1a} & A_{1b} & A_{1k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1a} \ldots A_{aa} & A_{ab} & A_{ak} \\ A_{1c} \ldots A_{ac} & A_{bc} & A_{ck} \\ A_{1t} \ldots A_{at} & A_{bt} & A_{tk} \end{vmatrix} =$$

$$= A [A (A_{bc} A_{tk} - A_{bt} A_{ck}) - A_{bc} A_{tp} A_{kq} A^{pq} - A_{tk} A_{im} A_{kn} A^{mn} +$$

$$+ A_{bt} A_{cp} A_{kq} A^{pq} + A_{ck} A_{bm} A_{tn} A^{mn}] + A_{bm} A_{cn} A_{tp} A_{kq} A^{mn}_{pq} A,$$

où A^{mn}_{pq} est le déterminant obtenu de A lorsqu'on supprime les lignes et les colonnes correspondant aux éléments A_{mn}, A_{pq} et on lui associe le signe qui lui convient en vertu de la règle relative aux compléments algébriques. En comparant les deux expressions obtenues, l'une pour le premier membre, la deuxième pour le second membre de (17), nous constatons que la vérification de l'égalité (17) revient à la vérification de l'égalité suivante :

$$A_{bm} A_{cn} A_{tp} A_{kq} (A^{mn} A^{pq} - A^{mp} A^{nq}) = A_{bm} A_{cn} A_{tp} A_{kq} A^{mn}_{pq},$$

qui se réduit à

$$\begin{vmatrix} A^{mn} & A^{mp} \\ A^{nq} & A^{pq} \end{vmatrix} = A A^{mn}_{pq},$$

qui est de nouveau une relation de la forme (17), où le rôle de A est joué par A^{mn}_{pq}; les déterminants qui y interviennent ont l'ordre de deux unités plus petit que les déterminants correspondants de (17). Mais une telle relation est vérifiée en vertu des hypothèses de l'induction, de sorte que la relation (17) est vérifiée pour tout a.

Pour simplifier le langage du théorème qui suit, nous allons introduire quelques notations.

Soit x_0 un point de différentiabilité de la représentation $\bar{x} = f(x)$, $\bar{x} = \bar{x}^i e_i$, $x = x^i e_i$, e_i $(i = 1, \ldots, n)$ les n verseurs des axes de coordonnées. Posons $\bar{x}^i_k (x_0) = \dfrac{\partial \bar{x}^i (x_0)}{\partial x^k}$. Dans la suite, au lieu de $\bar{x}^i (x_0)$, $\bar{x}^i_k (x_0)$ nous allons écrire simplement $\bar{x}^i$, $\bar{x}^i_k$.

Soit $\mathcal{J} = \| \bar{x}^i_k \|$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ la matrice fonctionnelle de la représentation $\bar{x} = f(x)$ au point x_0, r $(1 \leqq r \leqq n)$ son rang et $\mathcal{J}_r = \det \| \bar{x}^a_b \|$ $(a, b = 1, \ldots, r)$ un déterminant d'ordre r différent de zéro

de la matrice fonctionnelle $\mathcal{J}$. Pour simplifier, nous supposerons (sans restreindre la généralité) que $\mathcal{J}_r$ est formé par les dérivées du premier ordre des r premières fonctions par rapport aux r premières variables ; en particulier $\mathcal{J}_n = \mathcal{J}$. Notons encore par $(\mathcal{J}_r)^b_a$ le complément algébrique de l'élément $\bar{x}^a_b$ du déterminant $\mathcal{J}_r$.

Convenons que dans le cours de la démonstration du théorème qui suit les indices prennent respectivement les valeurs : $a, b, \ldots, h, j, l = 1, \ldots, r$; $m, p, q, s, \ldots, w = r+1, \ldots, n$; $i, k = 1, \ldots, n$.

Posons enfin

$$A_{ab} = \frac{\delta_{cd}(\mathcal{J}_r)^c_a(\mathcal{J}_r)^d_b}{\mathcal{J}_r^2} \quad (a, b = 1, \ldots, r), \tag{18}$$

$$B_{mp} = A_{ab}\,\bar{x}^a_m\,\bar{x}^b_p \quad (m, p = r+1, \ldots, n), \tag{19}$$

$$B = \det \| B_{mp} + \delta_{mp} \| \tag{20}$$

et B^{mp} le complément algébrique de l'élément $B_{mp} + \delta_{mp}$ du déterminant B.

Dans le cas $r = n-1$, $B = B_{nn} + 1$, tandis que B^{nn} n'a pas de sens. Pourtant, les résultats obtenus lorsque $r < n-1$ restent valables aussi dans le cas $r = n-1$ si nous convenons d'écrire $B^{nn} = 1$.

Théorème 5. *L'ensemble de monogénéité faible d'une représentation $\bar{x} = f(x)$ correspondant à un point de différentiabilité x_0 où $\mathcal{J}(x_0) = 0$, est l'intérieur de l'ellipsoïde*

$$(BA_{ab} - A_{ac}A_{bd}\bar{x}^c_m\bar{x}^d_p B^{mp})\,\xi^a\xi^b = B, \quad \xi^m = \lambda^m_a\xi^a \quad (m = r+1, \ldots, n), \tag{21}$$

où a, b, c, d parcourent les indices $1, \ldots, r$; m, p les indices $r+1, \ldots, n$; r $(1 \leq r \leq n-1)$ est le rang de la matrice jacobienne en x_0 et λ^m_a $(a = 1, \ldots, r;\ m = r+1, \ldots, n)$ sont les quantités par lesquelles les $n-r$ dernières lignes du déterminant $\mathcal{J}$ s'expriment comme une combinaison linéaire des r autres. Cet ellipsoïde est l'enveloppe de la famille d'ellipsoïdes

$$A_{ab}(\xi^a - \bar{x}^a_m u^m)(\xi^b - \bar{x}^b_p u^p) = 1 - \delta_{mp}u^m u^p, \quad \xi^m = \lambda^m_a\xi^a. \tag{22}$$

Les ellipsoïdes représentés par la première équation (22) dans l'espace des variables ξ^a $(a = 1, \ldots, r)$ sont homothétiques à l'ellipsoïde infinitésimal

$$\delta_{cd}x^c_a x^d_b\, d\bar{x}^a\, d\bar{x}^b = d_0, \tag{23}$$

qui est l'image de la sphère infinitésimale de centre x_0 par la représentation $\bar{x}^a = \bar{x}^a(x)$ $(a = 1, \ldots, r)$ où $\mathcal{J}_r \neq 0$ et où l'on considère les variables x^m_0 $(m = r+1, \ldots, n)$ comme des paramètres.

Nous allons nous occuper d'abord du cas $r < n-1$, en remarquant ensuite que le résultat reste valable aussi lorsque $r = n-1$.

Dans un point de différentiabilité x_0 de la représentation $\bar{x} = f(x)$, l'ensemble de monogénéité est une surface ayant l'équation paramétrique (16). Supposons que l'on a choisi les première s r composantes de la fonction $\bar{x} = \bar{x}^i e_i$ et les premières r variables parmi celles qui ont la propriété que le jacobien $\mathcal{J}_r$ correspondant est différent de zéro. Dans ce cas les équations de cette surface pourront s'écrire sous la forme :

$$\xi^a = \bar{x}^a_i u^i \quad (a = 1, \ldots, r), \tag{24}$$

$$\xi^m = \lambda^m_a\xi^a \quad (m = r+1, \ldots, n), \tag{25}$$

$$\delta_{ik}u^i u^k = 1. \tag{26}$$

Les r équations (24) peuvent s'écrire aussi sous la forme

$$\bar{x}^a_b u^b = \xi^a - \bar{x}^a_m u^m \quad (a = 1, \ldots, r),$$

d'où l'on obtient pour les r premiers cosinus directeurs u^b $(b = 1, \ldots, r)$ les expressions :

$$u^b = \frac{1}{\mathcal{J}_r}\begin{vmatrix} \bar{x}^1_1 \ldots \bar{x}^1_{b-1} & \xi^1 - \bar{x}^1_m u^m & \bar{x}^1_{b+1} \ldots \bar{x}^1_r \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{x}^b_1 \ldots \bar{x}^b_{b-1} & \xi^b - \bar{x}^b_m u^m & \bar{x}^b_{b+1} \ldots \bar{x}^b_r \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{x}^r_1 \ldots \bar{x}^r_{b-1} & \xi^r - \bar{x}^r_m u^m & \bar{x}^r_{b+1} \ldots \bar{x}^r_r \end{vmatrix},$$

qui peuvent s'écrire aussi d'une manière plus condensée

$$u^b = \frac{(\mathcal{J}_r)^b_a(\xi^a - \bar{x}^a_m u^m)}{\mathcal{J}_r} \quad (b = 1, \ldots, r).$$

En plaçant ces valeurs de u^b dans l'équation (26), qui peut encore s'écrire

$$\sum_{b=1}^{r}(u^b)^2 + \sum_{p=r+1}^{n}(u^p)^2 = 1,$$

nous obtenons la famille de cylindres

$$\sum_{b=1}^{r}\left|\frac{(\mathcal{J}_r)^b_a(\xi^a - \bar{x}^a_m u^m)}{\mathcal{J}_r}\right|^2 + \sum_{p=r+1}^{n}(u^p)^2 = 1 \tag{27}$$

qui peut se mettre aussi sous la forme

$$\frac{1}{\mathcal{J}_r^2}\delta_{ab}(\mathcal{J}_r)^a_c(\mathcal{J}_r)^b_d(\xi^c - \bar{x}^c_m u^m)(\xi^d - \bar{x}^d_p u^p) = 1 - \delta_{mp}u^m u^p.$$

En intersectant cette famille de cylindres avec le plan de dimension r (25) et tenant compte des notations (18) on est conduit justement à la famille d'ellipsoïdes de dimension $r-1$ (22).

Si dans la représentation

$$\bar{x}^a = \bar{x}^a(x^1, \ldots, x^r; x^{r+1}, \ldots, x^n) \quad (a = 1, \ldots, r),$$

les variables x^m $(m = r+1, \ldots, n)$ sont considérées comme paramètres, alors les relations suivantes ont lieu :

$$(\mathcal{J}_r)^a_b = x^a_b \quad (a, b = 1, \ldots, r),$$

de sorte que la famille d'ellipsoïdes (22) est homothétique à l'ellipsoïde infinitésimal (23) qui intervient dans la définition des représentations, quasi-conformes d'après Zimmermann [10], ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Pour en démontrer la première partie, c'est-à-dire que cette famille d'ellipsoïdes de dimension $r-1$ remplit l'intérieur de l'ellipsoïde de dimension $r-1$ (21), nous allons établir tout d'abord que l'enveloppe de la famille d'ellipsoïdes (22) est la surface (21) et ensuite, qu'étant donné un point quelconque situé à l'intérieur ou sur la surface (21), il existe au moins un système α^m $(m = r+1, \ldots, n)$, α^m réels et $\alpha^m \leqq 1$, tel que l'ellipsoïde (22) correspondant passe par ce point.

On fera aussi la remarque suivante : n'importe quel serait le point ξ extérieur à l'ellipsoïde (21), il n'existe pas de système α^m $(m = r+1, \ldots, n)$, α^m réels, tel que l'ellipsoïde (22) correspondant passe par ξ.

Finalement, on montrera que le raisonnement reste valable aussi dans le cas $r = n-1$.

Démontrons donc que la surface (21) est l'enveloppe de la famille (22). En dérivant la première équation de (22) par rapport à α^p, nous obtenons :

$$-A_{cd}\,\bar{x}^d_p(\xi^c - \bar{x}^c_m\alpha^m) - A_{cd}\,\bar{x}^c_p(\xi^d - \bar{x}^d_m\alpha^m) + 2\alpha^p = 0 \quad (p = r+1, \ldots, n),$$

qui grâce à la symétrie de A_{ab} par rapport aux indices a, b et utilisant les notations (19), peut se condenser sous la forme

$$(28) \qquad (B_{mp} + \delta_{mp})\,\alpha^m = A_{cd}\,\bar{x}^d_p\,\xi^c \quad (p = r+1, \ldots, n).$$

Ce système d'équations, où l'on considère α^m $(m = r+1, \ldots, n)$ comme des inconnues, a le déterminant des coefficients B — d'après les notations (20) — positif.

En effet,

$$B = 1 + \delta^{pq}B_{pq} + \cdots + \begin{vmatrix} B_{r+1,\,r+1} & \cdots & B_{r+1,\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+1,\,n} & \cdots & B_{nn} \end{vmatrix},$$

de sorte que pour établir que $B > 0$, il suffit de démontrer qu'aucun des mineurs principaux du déterminant

$$\begin{vmatrix} B_{r+1,\,r+1} & \cdots & B_{r+1,\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+1,\,n} & \cdots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

ne peut devenir négatif. (Par mineur principal on entend un mineur symétrique par rapport à la diagonale principale).

Soit

$$B_\varrho = \begin{vmatrix} B_{r+\alpha,\,r+\alpha} & \cdots & B_{r+\alpha,\,r+\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+\alpha,\,r+\beta} & \cdots & B_{r+\beta,\,r+\beta} \end{vmatrix}$$

un mineur principal quelconque d'ordre ϱ $(r \leqq \varrho \leqq n-r)$. Démontrons qu'il n'est pas négatif. B_ϱ est le déterminant associé à la surface du second degré

$$(29) \qquad B_{r+\gamma,\,r+\delta}\,\eta^\gamma\eta^\delta = 1.$$

Si cette surface est un ellipsoïde, nous aurons $B > 0$. Mais la relation (29) peut s'écrire — en vertu des notations (19) —

$$A_{ab}\,\bar{x}^a_{r+\gamma}\,\bar{x}^b_{r+\delta}\,\eta^\gamma\eta^\delta = 1,$$

ou encore

$$A_{ab}(\bar{x}_{r+\gamma}\eta^\gamma)(\bar{x}_{r+\delta}\eta^\delta) = 1.$$

Maintenant, si nous notons $\bar{x}^a_{r+\gamma}\eta^\gamma\zeta^a$, ce qui revient à une transformation affine qui conserve le caractère d'ellipticité, l'équation (29) revêt la forme

$$A_{ab}\,\zeta^a\zeta^b = 1$$

qui représente un ellipsoïde homothétique à (22), de sorte que $B_\varrho \geqslant 0$, $(1 \leqq \varrho \leqq n-r)$. Donc B est de la forme $B = 1 + B'$, où $B' \geqq 0$, de sorte que $B > 0$.

Mais alors, nous pouvons déterminer les quantités α^p $(p = r+1, \ldots, n)$ comme solution du système (28), c'est-à-dire de la forme :

$$\alpha^p = B^{-1}A_{ef}\,\bar{x}^e_m\,B^{mp}\,\xi^f \qquad (p = r+1, \ldots, n).$$

En remplaçant α^p par ces expressions dans les équations (22), nous obtenons :

$$A_{cd}(B\xi^c - A_{ef}\bar{x}^e_m \bar{x}^e_p B^{mp}\xi^f)(B\xi^d - A_{ef}\bar{x}^d_m \bar{x}^e_p B^{mp}\xi^f) =$$
$$= B^2 - \delta_{mq} A_{cd} A_{ef}\bar{x}^c_p \bar{x}^e_s B^{mp} B^{qs}\xi^d \xi^f,$$

et en groupant d'après $\xi^a \xi^b$, nous obtenons:

$$[B(A_{ab}B - A_{ac}A_{be}\bar{x}^c_m \bar{x}^e_p B^{mp} - A_{bd}A_{ae}\bar{x}^d_m \bar{x}^e_p B^{mp}) +$$
$$+ A_{ca}A_{ae}A_{gb}\bar{x}^c_m \bar{x}^e_p \bar{x}^d_q \bar{x}^g_s B^{mp} B^{qs} + \delta_{mq} A_{ae}A_{gb}\bar{x}^e_p \bar{x}^g_s B^{mp} B^{qs}]\xi^a \xi^b = B^2,$$

qui — tenant compte des notations (19) et du fait que les indices c, d, e, respectivement m, p peuvent être changés au besoin entre eux — peut encore s'écrire sous la forme:

$$[B(BA_{ab} - A_{ac}A_{bd}\bar{x}^c_m \bar{x}^d_p B^{mp}) + A_{ac}A_{bd}\bar{x}^d_p \bar{x}^c_s B^{mp} B^{qs}(B_{mq} + \delta_{mq})]\xi^a \xi^b = B^2.$$

Mais en vertu des règles concernant les déterminants, il résulte que

$$B^{mq}(B_{mq} + \delta_{mq}) = B \qquad \text{et} \qquad B^{sq}(B_{mq} + \delta_{mq}) = 0 \qquad (s \neq m),$$

de sorte que l'équation précédente peut encore s'écrire:

$$B(BA_{ab} - A_{ac}A_{bd}\bar{x}^c_m \bar{x}^d_p B^{mp})\xi^a \xi^b = B^2,$$

et finalement, divisant les deux membres de l'équation par B (que nous avons vu être différent de zéro) et en tenant compte des équations (25) vérifiées par hypothèse, nous obtenons justement les équations (21), qui représentent donc l'enveloppe de la famille (22).

Démontrons maintenant, que tout point situé sur la surface (21) ou à son intérieur appartient à la famille (22). Si ξ_0 est un tel point, alors

$$(BA_{ab} - A_{ac}A_{bd}\bar{x}^c_m \bar{x}^d_p B^{mp})\xi^a_0 \xi^b_0 \leq B. \tag{30}$$

Pour démontrer que ξ_0 appartient à la famille (22), il suffit de montrer qu'il existe au moins un système de quantités α^p_0 $(p = r+1, \ldots, n)$, α^p_0 réels, telles que

$$A_{ab}(\xi^a_0 - \bar{x}^a_m \alpha^m_0)(\xi^b_0 - \bar{x}^b_p \alpha^p_0) = 1 - \delta_{mp}\alpha^m_0 \alpha^p_0.$$

Commençons par chercher un α^{r+1} réel, qui vérifie l'équation (22) où l'on a fait $\xi = \xi_0$; en groupant les termes de celle-ci d'après les puissances de α^{r+1}, nous obtenons

$$(A_{ab}\bar{x}^a_{r+1}\bar{x}^b_{r+1} + 1)(\alpha^{r+1})^2 - 2A_{ab}\bar{x}^b_{r+1}(\xi^a_0 - \bar{x}^a_s \alpha^s)\alpha^{r+1} + A_{ab}(\xi^a_0 - \bar{x}^a_s \alpha^s)(\xi^b_0 - \bar{x}^b_s \alpha^s) +$$
$$+ \delta_{ms}\alpha^m \alpha^s - 1 = 0 \qquad (s \neq r+1).$$

En utilisant les notations (19) et les suivantes:

$$A_{ab}\bar{x}^b_m = C_{am}, \tag{31}$$

cette équation du second degré en α^{r+1} peut encore s'écrire

$$(B_{r+1,r+1} + 1)(\alpha^{r+1})^2 - 2C_{a,r+1}(\xi^a_0 - \bar{x}^a_s \alpha^s)\alpha^{r+1} + A_{ab}(\xi^a_0 - \bar{x}^a_s \alpha^s)(\xi^b_0 - \bar{x}^b_s \alpha^s) +$$
$$+ \delta_{ms}\alpha^m \alpha^s - 1 = 0.$$

Pour que les solutions soient réelles, il faut que le discriminant ne soit pas négatif, c'est-à-dire que

$$[C_{a,r+1}(\xi^a_0 - \bar{x}^a_s \alpha^s)]^2 - (B_{r+1,r+1} + 1)[A_{ab}(\xi^a_0 - \bar{x}^a_s \alpha^s)(\xi^b_0 - \bar{x}^b_s \alpha^s) + \delta_{ms}\alpha^m \alpha^s - 1] \geq 0.$$

Si dans le premier membre nous groupons les termes d'après les puissances de α^{r+2}, nous obtenons:

$$(B^2_{r+1,r+2} - B_{r+1,r+1}B_{r+2,r+2} - B_{r+2,r+2} + B_{r+1,r+1} + 1)(\alpha^{r+2})^2 - 2[C_{a,r+1}B_{r+1,r+2} -$$
$$- (B_{r+1,r+1} + 1)C_{a,r+2}](\xi^a_0 - \bar{x}^a_t \alpha^t)\alpha^{r+2} + [C_{a,r+1}C_{b,r+1} - A_{ab}(B_{r+1,r+1} + 1)](\xi^a_0 -$$
$$- \bar{x}^a_t \alpha^t)(\xi^b_0 - \bar{x}^b_t \alpha^t) + (B_{r+1,r+1} + 1)(\delta_{mt}\alpha^m \alpha^t - 1) \geqq 0 \qquad (t \neq r+1, r+2).$$

Si nous notons

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} B_a &= \begin{vmatrix} B_{r+1,r+1} + 1 & \ldots & B_{r+1,r+a} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+1,r+a} & \ldots & B_{r+a,r+a} + 1 \end{vmatrix}, \\ (BC_a)_a &= \begin{vmatrix} B_{r+1,r+1} + 1 & \ldots & B_{r+1,r+a-1} & C_{r+1,a} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+1,r+a} & \ldots & B_{r+a,r+a-1} & C_{r+a,a} \end{vmatrix}, \\ (BC_aC_b)_a &= \begin{vmatrix} B_{r+1,r+1} + 1 & \ldots & B_{r+1,r+a-1} & C_{r+1,a} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+1,r+a-1} & \ldots & B_{r+a-1,r+a-1} & C_{r+a-1,a} \\ C_{r+1,b} & \ldots & C_{r+a-1,b} & A_{ab} \end{vmatrix} \end{aligned} \right.$$

et tenons compte aussi de la relation $C_{am}\bar{x}^a_p = B_{mp}$, et du fait que les indices a, b peuvent être changés entre eux, alors l'équation précédente devient

$$- B_2(\alpha^{r+2})^2 + 2(BC_a)_2(\xi^a_0 - \bar{x}^a_t \alpha^t)\alpha^{r+2} - (BC_aC_b)_2(\xi^a_0 - \bar{x}^a_t \alpha^t)(\xi^b_0 - \bar{x}^b_t \alpha^t) +$$
$$+ (B_{r+1,r+1} + 1)(\delta_{mt}\alpha^m \alpha^t - 1) \geq 0.$$

En particulier, α^{r+1} sera réel si le discriminant est égal à zéro, c'est-à-dire

$$B_2(\alpha^{r+2})^2 - 2(BC_a)_2(\xi_0^a - \bar{x}_t^a \alpha^t)\alpha^{r+2} + (BC_a C_b)_2(\xi_0^a - \bar{x}_t^a \alpha^t)(\xi_0^b - \bar{x}_t^b \alpha^t) -$$
$$- (B_{r+1,r+1} + 1)(\delta_{mt}\alpha^m \alpha^t - 1) = 0.$$

Pour que cette équation du second degré en α^{r+2} ait des solutions réelles, il faut que le discriminant ne soit pas négatif, ce qui revient à une condition du même type, c'est-à-dire

$$B_3(\alpha^{r+3})^2 - 2(BC_a)_3(\xi_0^a - \bar{x}_u^a \alpha^u)\alpha^{r+3} + (BC_a C_b)_3(\xi_0^a - \bar{x}_u^a \alpha^u)(\xi_0^b - \bar{x}_u^b \alpha^u) -$$
$$- B_2(1 - \delta_{mu}\alpha^m \alpha^u) \leqq 0 \quad (u \neq r+1, r+2, r+3).$$

Procédant de la même manière, nous obtenons dans le cas général:

$$B_a(\alpha^{r+a})^2 - 2(BC_a)_a(\xi_0^a - \bar{x}_v^a \alpha^v)\alpha^{r+a} + (BC_a C_b)_a(\xi_0^a - \bar{x}_v^a \alpha^v)(\xi_0^b - \bar{x}_v^b \alpha^v) -$$
$$- B_{a-1}(1 - \delta_{mv}\alpha^m \alpha^v) \leqq 0, \quad (v \neq r+1, \ldots, r+a).$$

Lorsque $a = n - r$, nous obtenons

$$B(\alpha^n)^2 - 2(BC_a)_{n-r}\xi_0^a \alpha^n + (BC_a C_b)_{n-r}\xi_0^a \xi_0^b - B_{n-r-1} \leqq 0.$$

En particulier, α^{n-1} sera réel si l'inégalité précédente se réduit à une égalité. Mais la condition pour que les solutions de l'équation du second degré en α^n obtenue de cette manière soient réelles est

$$(BC_a C_b)_{n-r+1}\xi_0^a \xi_0^b \leqq B,$$

qui est justement la condition (30), où l'on a utilisé les notations (32), et qui est vérifiée par hypothèse, de sorte qu'il existe toujours un système α^p $(p = r+1, \ldots, n)$ de quantités réelles vérifiant la première équation (22), pour $\xi = \xi_0$. Le fait que ces $\alpha^p (p = r+1, \ldots, n)$ vérifient aussi la condition $\alpha^p \leqq 1$ $(p = r+1, \ldots, n)$, résulte de la première équation elle-même, surtout si on la considère sous la forme (27).

Démontrons maintenant qu'aucun ellipsoïde de la famille (22) ne passe pas par un point extérieur à (21). En effet, lorsque nous choisissons α^p $(p = r+1, \ldots, n)$ comme dans le cas précédent, nous arrivons à la condition (1), qui indique que le point n'est pas extérieur à (21). Si d'une manière plus générale, au lieu de considérer le cas particulier

$$B_a(\alpha^{r+a})^2 - 2(BC_a)_a(\xi_0^a - \bar{x}_v^a \alpha^v)\alpha^{r+a} + (BC_a C_b)_a(\xi_0^a - \bar{x}_v^a \alpha^v)(\xi_0^b - \bar{x}_v^b \alpha^v) -$$
$$- B_{a-1}(1 - \delta_{mv}\alpha^m \alpha^v) = 0,$$

nous considérons l'inéquation

$$B_a(\alpha^{r+a})^2 - 2(BC_a)_a(\xi_0^a - \bar{x}_v^a \alpha^v)\alpha^{r+a} + (BC_a C_b)_a(\xi_0^a - \bar{x}_v^a \alpha^v)(\xi_0^b - \bar{x}_v^b \alpha^v) -$$
$$- B_{a-1}(1 - \delta_{mv}\alpha^m \alpha^v) \leqq 0.$$

qui est équivalente à l'équation

$$B_a(\alpha^{r+a})^2 - 2(BC_a)_a(\xi_0^a - \bar{x}_v^a \alpha^v)\alpha^{r+a} + (BC_a C_b)_a(\xi_0^a - \bar{x}_v^a \alpha^v)(\xi_0^b - \bar{x}_v^b \alpha^v) -$$
$$- B_{a-1}(1 - \delta_{mv}\alpha^m \alpha^v) + K^2 = 0,$$

on est conduit à la condition

$$B_{a+1}(\alpha^{r+a+1})^2 - 2(BC_a)_{a+1}(\xi_0^a - \bar{x}_w^a \alpha^w)\alpha^{r+a+1} + (BC_a C_b)_{a+1}(\xi_0^a - \bar{x}_w^a \alpha^w)(\xi_0^b - \bar{x}_w^b \alpha^w) -$$
$$- B_a(1 - \delta_{mw}\alpha^m \alpha^w) + B_a K^2 \leqq 0,$$

qui nous conduit finalement à une condition de la forme

$$(BC_a C_b)_{n-r-1}\xi^a \xi^b + K^2 B \leqq B,$$

qui — tenant compte que $B > 0$, comme nous l'avons montré plus haut — implique la relation (30), qui signifie justement que le point respectif n'est pas extérieur à la surface (21).

Démontrons maintenant que la surface du second degré (21) située dans le plan de dimension r (25) est un ellipsoïde. Il suffit de montrer que l'intersection par tout plan de la forme $\xi^c = 0$ $(c \neq a, b; c = 1, \ldots, r)$ a b étant quelconques, est une ellipse.

Notons pour simplifier

$$(BC_a C_b)_{n-r+1} = D_{ab}.$$

Alors les équations (21) deviennent

$$D_{db}\xi^d \xi^b = B, \quad \xi^m = \lambda_d^m \xi^d \quad (m = r+1, \ldots, n).$$

Si nous intersectons cette surface par $\xi^c = 0$ $(c \neq a, b; c = 1, \ldots, r)$ nous obtenons

$$D_{aa}(\xi^a)^2 + 2D_{ab}\xi^a \xi^b + D_{bb}(\xi^b)^2 = B, \quad \xi^m = \lambda_a^m \xi^a + \lambda_b^m \xi^b \quad (m = r+1, \ldots, n).$$

Démontrons maintenant que cette surface est une ellipse, ce qui revient à démontrer que la première des équations représente une ellipse dans le plan des variables ξ^a, ξ^b. Il suffit de montrer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} D_{aa} & D_{ab} \\ D_{ab} & D_{bb} \end{vmatrix} > 0. \tag{33}$$

En effet, tenant compte de la signification de D_{ab} et du lemme précédent nous avons

$$\begin{vmatrix} D_{aa} & D_{ab} \\ D_{ab} & D_{bb} \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} B_{r+1,r+1}+1 \dots B_{r+1,n} & C_{r+1,a} & C_{r+1,b} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+1,n} \dots \quad B_{nn}+1 & C_{na} & C_{nb} \\ C_{r+1,a} \dots \quad C_{na} & A_{aa} & A_{ab} \\ C_{r+1,b} \dots \quad C_{nb} & A_{ab} & A_{bb} \end{vmatrix} =$$

$$= B \left\{ \begin{vmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ab} & A_{bb} \end{vmatrix} \dots + \begin{vmatrix} B_{r+\alpha,r+\alpha} \dots B_{r+\alpha,r+\beta} & C_{r+\alpha,a} & C_{r+\alpha,b} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+\alpha,r+\beta} \dots B_{r+\beta,r+\beta} & C_{r+\beta,a} & C_{r+\beta,b} \\ C_{r+\alpha,a} \dots \quad C_{r+\beta,a} & A_{aa} & A_{ab} \\ C_{r+\alpha,b} \dots \quad C_{r+\beta,b} & A_{ab} & A_{bb} \end{vmatrix} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \begin{vmatrix} B_{r+1,r+1} \dots B_{r+1,n} & C_{r+1,a} & C_{r+1,b} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+1,n} \dots \quad B_{nn} & C_{na} & C_{nb} \\ C_{r+1,a} \dots \quad C_{na} & A_{aa} & A_{ab} \\ C_{r+1,b} \dots \quad C_{nb} & A_{ab} & A_{bb} \end{vmatrix} \right\},$$

où

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} B_{r+\alpha,r+\alpha} \dots B_{r+\alpha,r+\beta} & C_{r+\alpha,a} & C_{r+\alpha,b} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+\alpha,r+\beta} \dots B_{r+\beta,r+\beta} & C_{r+\beta,a} & C_{r+\beta,b} \\ C_{r+\alpha,a} \dots \quad C_{r+\beta,a} & A_{aa} & A_{ab} \\ C_{r+\alpha,b} \dots \quad C_{r+\beta,b} & A_{ab} & A_{bb} \end{vmatrix}$$

est un mineur principal d'ordre ϱ du déterminant

$$\begin{vmatrix} B_{r+1,r+1} \dots B_{r+1,n} & C_{r+1,a} & C_{r+1,b} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r+1,n} \dots \quad B_{nn} & C_{na} & C_{nb} \\ C_{n+1,a} \dots \quad C_{na} & A_{aa} & A_{ab} \\ C_{r+1,b} \dots \quad C_{nb} & A_{ab} & A_{bb} \end{vmatrix}.$$

Pour établir la relation (33), il suffit de remarquer qu'aucun des déterminants de la forme (34) n'est pas négatif, grâce au fait que

$$B \geq 0, \qquad \begin{vmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ab} & A_{bb} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Mais le déterminant (34) est déterminant associé à la surface du second degré suivante

$$B_{r+\gamma,r+\delta}\,\eta^{r+\gamma}\eta^{r+\delta} + 2\,C_{a,r+\gamma}\,\eta^a\eta^{r+\gamma} + 2\,C_{b,r+\gamma}\,\eta^b\eta^{r+\gamma} + A_{aa}(\eta^a)^2 + A_{bb}(\eta^b)^2 + \\ + 2\,A_{ab}\,\eta^a\eta^b = 1,$$

— où $r+\gamma$, $r+\delta$ parcourent les indices correspondant aux éléments de (34) — et qui, tenant compte des notations (19) et (31), peut s'écrire aussi sous la forme :

$$A_{cd}\,\bar{x}^c_{r+\gamma}\,\bar{x}^d_{r+\delta}\,\eta^{r+\gamma}\eta^{r+\delta} + 2\,A_{ac}\,\bar{x}^c_{r+\gamma}\,\eta^a\eta^{r+\gamma} + 2A_{bc}\,\bar{x}^c_{r+\gamma}\,\eta^b\eta^{r+\gamma} + A_{aa}(\eta^a)^2 + \\ + A_{bb}(\eta^b)^2 + 2\,A_{ab}\,\eta^a\eta^b = 1,$$

ou encore

$$A_{aa}(\eta^a + \bar{x}^a_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma})^2 + A_{bb}(\eta^b + \bar{x}^b_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma})^2 + \\ + 2\,A_{ab}(\eta^a + \bar{x}^a_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma})(\eta^b + \bar{x}^b_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma}) + 2\,A_{ac}\,\eta^a(\bar{x}^e_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma}) + \\ + 2\,A_{be}\,\eta^b(\bar{x}^e_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma}) + A_{ef}(\bar{x}^e_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma})(\bar{x}^f_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma}) = 1 \\ (e, f \neq a, b;\ e, f = 1, \dots, r).$$

Et si nous notons :

$$\zeta^a = \eta^a + \bar{x}^a_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma}, \qquad \zeta^b = \eta^b + \bar{x}^b_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma},$$
$$\zeta^e = \bar{x}^e_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma}, \qquad (e \neq a, b;\ e = 1, \dots, r),$$
$$\zeta^f = \bar{x}^f_{r+\gamma}\eta^{r+\gamma} \qquad (f \neq a, b;\ f = 1, \dots, r),$$

nous obtenons :

$$A_{cd}\,\zeta^c\zeta^d = 1,$$

où c, d parcourent les indices $1, \dots, r$ et qui représente un ellipsoïde homothétique à l'ellipsoïde qui correspond à la première des équations (22) considérée dans l'espace des variables $\zeta^1, \dots, \zeta^r$. Donc, (34) peut être ou bien positif, ou bien égal à zéro, ce qui implique l'inégalité (33) et donc l'ellipticité de la surface (21).

Il ne nous reste qu'à voir ce que devient le cas $r = n-1$, exclu auparavant. En procédant comme dans le cas $r < n-1$, nous obtenons à la place de la relation (28), la suivante :

$$(B_{nn}+1)a^n = A_{ab}\bar{x}^a_n z^b, \quad \text{d'où} \quad a^n = \frac{A_{ab}\bar{x}^a_n z^b}{B};$$

en substituant cette expression de a^n dans la première des équations (22) et groupant convenablement, on obtient justement la première équation (21), où l'on doit mettre $B^{nn}=1$. Le reste de la démonstration est tout à fait la même.

Remarque. Le théorème précédent pourrait être modifié de manière à contenir aussi le théorème 4. Ainsi au lieu de $\mathcal{J}=0$ on affirmerait seulement que la matrice jacobienne $\mathcal{J}$ a le rang r $(1 \leq r \leq n)$ et on conviendrait d'écrire, lorsque $r=n$, $B=1$ et $B^{nn}=0$ (B et d'autant plus B^{nn} n'ayant pas de sens dans ce cas); de plus en tenant compte que la famille (22) se réduit dans ce cas à la seule surface (21), on devrait préciser que lorsque $r=n$, au lieu de l'intérieur de l'ellipsoïde (21), il s'agit de sa surface.

Avant de passer au théorème suivant nous allons rappeler [1] qu'une représentation quasi-conforme $\bar{x}=f(x)$ dans un domaine $D \subset E_n$ ayant les deux ensembles de caractéristiques (C), (C') est une représentation univalente dans D, qui pour tout $x \in D$, transforme les ellipsoïdes infinitésimaux de centre x et de caractéristiques (C) en des ellipsoïdes infinitésimaux de caractéristiques (C'), les paramètres caractéristiques principaux $p_1(x)$, $p'_1(x)$ étant continus dans D.

Nous rappelons aussi qu'une représentation transforme des ellipsoïdes infinitésimaux de centre x et de caractéristiques (C) en des ellipsoïdes infinitésimaux de caractéristiques (C') lorsque la représentation est univalente et continue au voisinage de x et transforme tout ellipsoïde de centre x et de caractéristiques (C) du voisinage de x en une surface de Jordan contenue entre deux ellipsoïdes de centre $f(x)$ et de caractéristiques (C') et tels que le rapport des demi-axes minima de ces deux ellipsoïdes tende à l'unité lorsque l'ellipsoïde initial se réduit homothétiquement à un point.

Les paramètres caractéristiques principaux p_1, p'_1 sont les rapports des demi-axes extrêmes des ellipsoïdes de caractéristiques (C), respectivement (C').

Théorème 6. *Soit $\bar{x}=f(x)$ une représentation quasi-conforme dans $D \subset E_n$; les ensembles de monogénéité faible de $f(x)$ sont presque partout des ellipsoïdes homothétiques aux ellipsoïdes infinitésimaux* (15).

En effet, en vertu du théorème 27 de [1], une représentation quasi conforme D est presque partout différentiable dans D. Mais en tout point de différentiabilité, évidemment elle transforme des sphères infinitésimales en des ellipsoïdes infinitésimaux, et en tout point où $\mathcal{J} \neq 0$ — en vertu du théorème 4 — l'ensemble de monogénéité faible se réduit à l'ellipsoïde (15). D'autre part, en vertu du théorème 5 [3], qui affirme que le jacobien d'une représentation quasi-conforme dans D est presque partout différent de zéro, il résulte que les conditions du théorème 4 sont remplies presque partout dans D, ce qui démontre notre théorème.

BIBLIOGRAPHIE

1. Caraman Petru — *Contributions à la théorie des représentations quasi-conformes n-dimensionnelles.* Rev. Math. Pures et Appl., 1961, VI, 331—356.
2. — *Le cercle de Kasner et ses extensions dans E_n.* Communication tenue au Congrès de la Soc. Math. de la R. D. Allemande, Weimar, 26—30.VIII.1963.
3. — *Le jacobien des représentations quasi-conformes des domaines euclidiens à n dimensions.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1962, 254, 2916—2918.
4. Федоров В. С. — *Монозенная вектор-функция.* ДАН СССР, 1950, 72, с. 637—639.
5. Grötzsch H. — *Über die Verzerrung bei nichtkonformen Abbildungen und eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes.* Leipziger Berichte Math. Phys. Kl. 1928, 80, 503—507.
6. Hedrick E. R. — *On derivatives of non-analytic functions.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1928, 14, 649—654.
7. Iino Ricki — *Sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes.* I. Proc. Japan Acad., 1959, 35, p. 343—348.
8. Kasner E. — *General theory of polygenic or non-monogenic functions. The derivative congruence of circles.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1928, 14, 75—82.
9. Lavrentieff M. A. — *Sur une classe de représentations continues.* Mat. Cb., 1935, 42, 407—424.
10. Zimmermann Eduard — *Quasikonforme schlichte Abbildungen im dreidimensionalen Raum.* Wiss. Z. Univ. Halle, Math. Nat., 1955, V, 109—116.

ASUPRA MULŢIMII DERIVATE A REPREZENTĂRILOR DIFERENŢIABILE DIN E_n

Rezumat

Fie $w=f(z)$ o funcţie de o variabilă complexă. Mulţimea

$$\mathfrak{M}_{z_0} = \bigcap_{\varepsilon>0} M_\varepsilon$$

— unde M_ε e mulţimea valorilor raportului incrementar $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, pentru $z-z_0 \leq \varepsilon$, iar $\overline{M}_\varepsilon$ este închiderea lui M_ε — se numeşte mulţimea derivată a funcţiei $f(z)$ în punctul z_0 (Fedorov [1]). Autorul extinde această noţiune în cazul cuaternionilor şi stabileşte că în armonie cu teoria funcţiilor de o variabilă complexă, mulţimea derivată a unei funcţii cuaternionice regulate la dreapta sau la stînga se reduce la un punct, iar mulţimea derivată a conjugatei unei funcţii cuaternionice regulate la dreapta sau la stînga este o hipersferă cu centrul în origine; dar spre deosebire de cazul teoriei funcţiilor de o variabilă complexă, mulţimea derivată a unei funcţii cuaternionice diferenţiabile oarecare nu mai este o hipersferă şi nici măcar o hipersuprafaţă de gradul 2. Cum într-un spaţiu euclidian n-dimensional nu-i definit cîtul a doi vectori şi deci, în acest caz, raportul incrementar ce intervenea în definiţia lui Fedorov nu mai are sens, autorul introduce o nouă noţiune: aceea de *mulţime derivată slabă* şi care se obţine din noţiunea de mulţime derivată înlocuind raportul incrementar ce intervenea acolo, prin $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|}$, $x, x_0 \in E_n$.

Autorul arată că, într-un punct de diferenţiabilitate cu jacobianul $J \neq 0$, mulţimea derivată se reduce la un elipsoid $(n-1)$-dimensional (ce intervine în anumite definiţii ale reprezentărilor cvasiconforme), iar dacă matricea funcţională este de rang r $(1 \leqslant r < n)$, ea se reduce la interiorul unui elipsoid $(r-1)$-dimensional, înfăşurătoare a unei familii de elipsoizi $(r-1)$-dimensionali (ce intervin în definiţia reprezentărilor cvasiconforme). În sfîrşit, autorul arată că pentru o reprezentare cvasiconformă, mulţimea derivată se reduce aproape peste tot la elipsoidul $(n-1)$-dimensional menţionat mai sus.

О МНОЖЕСТВЕ МОНОГЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В E_n

Краткое содержание

Пусть $w = f(z)$ функция комплексного переменного. Множество

$$\mathfrak{M}_{z_0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon ,$$

где M — множество значений $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ при $z - z_0 \leqslant \varepsilon$, и где M_ε — замыкание множества M_ε, называется множеством моногенности функции $f(z)$ в точке z_0 (Фёдоров [4]). Автор обобщает это понятие для кватерниона и устанавливает что, согласно с теорией функций комплексного переменного, множество моногенности для на право и на лево регулярной кватернионной функции кватернионого переменного — точка, и от сопряженного на право или на лево регулярной кватернионной функции — гиперсфера с центром в начале координатов, а в различие теории функции комплексного переменного, множество моногенности для произвольной дифференцируемой кватернионной функции — не гиперсфера, а не даже гиперповерхность второй степени. А в эвклидовой n-мерной пространстве частное векторов не определенно, следовательно в таком случае отношение от определения Фёдорова является бессмысленным итак автор вводит новое понятие: слабая моногенность, которая получается от понятия Фёдорова, заменяя отношение оттуда с следующим отношением двух векторных приращений: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x, x_0 \in E_n$.

Автор показывает что, в точке дифференцируемости с якобяном $J \neq 0$ множество слабой моногенности сводится к $(n-1)$-мерному эллипсоиду (от некоторого определения квазиконформных отображений), а если ранг функциональной матрицы r, то множество слабой моногенности — внутреняя часть r-мерного эллипсоида, огибающей семейства $(r-1)$-мерных эллипсоидов (от квазиконформных отображений). В конце, показывается что множество слабой моногенности квазиконформного отображения сводится почти в сюду к $(n-1)$-мерному эллипсоиду.

SUR L'AXIOMATIQUE DE L'ESPACE AFFINE À n DIMENSIONS

PAR

RADU MIRON et GEORGE OPAIT

On connaît l'axiomatique de l'espace affine à n dimensions. Une exposition logique et systématique de celle-ci est donnée dans le livre de P. K. Rachevski [1]. Dans cette axiomatique, l'axiome du parallélogramme joue un rôle spécial. À l'aide de cet axiome, on montre que par rapport à l'addition des vecteurs, l'ensemble des vecteurs forme un groupe abélien et après la définition du produit des vecteurs par des nombres réels, celui-ci peut être organisé comme un espace vectoriel.

On peut montrer que dans un espace vectoriel la commutativité de la somme des vecteurs est une conséquence des autres axiomes. Cette conséquence implique le fait que certains des axiomes du I-er groupe d'axiomes du système de Weyl peuvent être affaiblis.

Ceci est le but de notre Note.

Soit M un ensemble d'éléments, que nous appelons points et que nous notons avec $A, B, \ldots, A', B', \ldots$ L'ensemble M organisé par les axiomes qui suivent sera appelé espace géométrique. Nous considérons encore l'ensemble $M \times M$. Un élément $(A, B) \in M \times M$ sera noté par AB et appelé segment orienté d'origine A et d'extrémité B. Supposons donnée sur $M \times M$ une relation d'équivalence ϱ. Nous avons

$$(1) \quad AB \varrho AB, \; AB \varrho CD \Longrightarrow CD \varrho AB, \; AB \varrho CD \text{ et } CD \varrho EF \Longrightarrow AB \varrho EF.$$

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble quotient $(M \times M)/\varrho$. Nous appelons vecteurs de l'espace M, par rapport à la relation ϱ, les éléments de l'ensemble $\mathfrak{M}$, que nous notons $\vec{AB}, \vec{CD}, \ldots$, ou par $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots$

On définit l'égalité de deux vecteurs de la manière habituelle : deux vecteurs $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ sont égaux si les éléments de l'ensemble $\mathfrak{M}$, qui les déterminent, coïncident. En vertu des relations (1) la relation d'égalité des vecteurs est réflexive, symétrique et transitive.

Dans la definition de l'espace affine à n dimensions la relation ϱ n'est pas complètement arbitraire.