Autorul arată că, într-un punct de diferenţiabilitate cu jacobianul $J \neq 0$, mulţimea derivată se reduce la un elipsoid $(n-1)$-dimensional (ce intervine în anumite definiţii ale reprezentărilor cvasiconforme), iar dacă matricea funcţională este de rang r $(1 \leqslant r < n)$, ea se reduce la interiorul unui elipsoid $(r-1)$-dimensional, înfăşurătoare a unei familii de elipsoizi $(r-1)$-dimensionali (ce intervin în definiţia reprezentărilor cvasiconforme). În sfîrşit, autorul arată că pentru o reprezentare cvasiconformă, mulţimea derivată se reduce aproape peste tot la elipsoidul $(n-1)$-dimensional menţionat mai sus.

О МНОЖЕСТВЕ МОНОГЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В E_n

Краткое содержание

Пусть $w = f(z)$ функция комплексного переменного. Множество

$$\mathfrak{M}_{z_0} = \bigcap_{\varepsilon > 0} M_\varepsilon ,$$

где M — множество значений $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ при $z - z_0 \leqslant \varepsilon$, и где M_ε — замыкание множества M_ε, называется множеством моногенности функции $f(z)$ в точке z_0 (Фёдоров [4]). Автор обобщает это понятие для кватерниона и устанавливает что, согласно с теорией функций комплексного переменного, множество моногенности для на право и на лево регулярной кватернионной функции кватерниоиого переменного — точка, и от сопряженного на право или на лево регулярной кватернионной функции — гиперсфера с центром в начале координатов, а в различие теории функции комплексного переменного, множество моногенности для произвольной дифференцируемой кватернионной функции — не гиперсфера, а не даже гиперповерхность второй степени. А в эвклидовой n-мерной пространстве частное векторов не определенно, следовательно в таком случае отношение от определения Фёдорова является бессмысленным итак автор вводит новое понятие: слабая моногенность, которая получается от понятия Фёдорова, заменяя отношение оттуда с следующим отношением двух векторных приращений: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x, x_0 \in E_n$.

Автор показывает что, в точке дифференцируемости с якобяном $J \neq 0$ множество слабой моногенности сводится к $(n-1)$-мерному эллипсоиду (от некоторого определения квазиконформных отображений), а если ранг функциональной матрицы r, то множество слабой моногенности — внутреняя часть r-мерного эллипсоида, огибающей семейства $(r-1)$-мерных эллипсоидов (от квазиконформных отображений). В конце, показывается что множество слабой моногенности квазиконформного отображения сводится почти в сюду к $(n-1)$-мерному эллипсоиду.

SUR L'AXIOMATIQUE DE L'ESPACE AFFINE À n DIMENSIONS

PAR

RADU MIRON et GEORGE OPAIT

On connaît l'axiomatique de l'espace affine à n dimensions. Une exposition logique et systématique de celle-ci est donnée dans le livre de P. K. Rachevski [1]. Dans cette axiomatique, l'axiome du parallélogramme joue un rôle spécial. À l'aide de cet axiome, on montre que par rapport à l'addition des vecteurs, l'ensemble des vecteurs forme un groupe abélien et après la définition du produit des vecteurs par des nombres réels, celui-ci peut être organisé comme un espace vectoriel.

On peut montrer que dans un espace vectoriel la commutativité de la somme des vecteurs est une conséquence des autres axiomes. Cette conséquence implique le fait que certains des axiomes du I-er groupe d'axiomes du système de Weyl peuvent être affaiblis.

Ceci est le but de notre Note.

Soit M un ensemble d'éléments, que nous appelons points et que nous notons avec $A, B, \ldots, A', B', \ldots$ L'ensemble M organisé par les axiomes qui suivent sera appelé espace géométrique. Nous considérons encore l'ensemble $M \times M$. Un élément $(A, B) \in M \times M$ sera noté par AB et appelé segment orienté d'origine A et d'extrémité B. Supposons donnée sur $M \times M$ une relation d'équivalence ϱ. Nous avons

$$(1) \quad AB \varrho AB, \; AB \varrho CD \Longrightarrow CD \varrho AB, \; AB \varrho CD \text{ et } CD \varrho EF \Longrightarrow AB \varrho EF.$$

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble quotient $(M \times M)/\varrho$. Nous appelons vecteurs de l'espace M, par rapport à la relation ϱ, les éléments de l'ensemble $\mathfrak{M}$, que nous notons $\vec{AB}, \vec{CD}, \ldots$, ou par $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots$

On définit l'égalité de deux vecteurs de la manière habituelle : deux vecteurs $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ sont égaux si les éléments de l'ensemble $\mathfrak{M}$, qui les déterminent, coïncident. En vertu des relations (1) la relation d'égalité des vecteurs est réflexive, symétrique et transitive.

Dans la definition de l'espace affine à n dimensions la relation ϱ n'est pas complètement arbitraire.

Définition 1. *On appelle espace affine à n dimensions sur le corps F (réel ou complexe) un ensemble M pour lequel :*

— Une relation d'équivalence σ est donnée sur $M \times M$, à l'aide de laquelle les vecteurs de M ont été définis.

— Pour tout $\alpha \in F$ et $\bar{v}$ de M est défini le produit $\alpha\bar{v}$ ayant les valeurs dans $(M \times M)/\sigma$.

— Les groupes I, II, III d'axiomes ci-dessous sont vérifiés :

I-er groupe d'axiomes

I_1. L'ensemble M n'est pas vide.

I_2. Pour tout point $A \in M$ et tout vecteur $\bar{v}$ de M, il existe au moins un point $B \in M$ tel que $\overrightarrow{AB} = \bar{v}$.

I_3. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, alors les points B et C coïncident.

I_4. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$, alors les points A et C coïncident.

I_5. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Conséquences :

1°. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{A'A'}$ *pour tous* $A, A' \in M$.

En effet, étant donné le point A' et le vecteur $\overrightarrow{AA}$, grâce aux axiomes I_2 et I_3 il y a un seul point $B' \in M$ tel que $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{A'B'}$. Soit C un point quelconque de M. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ et le point B' déterminent un seul point $C' \in M$ de façon que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{B'C'}$. De $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{B'C'}$, en vertu de I_5 il résulte $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. La dernière relation et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{B'C'}$ donnent $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{B'C'}$ et, en utilisant I_1, on déduit que les points A' et B' coïncident. Donc $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{A'A'}$.

2°. *Si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, *alors* $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$.

Considérons le point B' et le vecteur $\overrightarrow{BA}$. Les axiomes I_2 et I_3 affirment l'existence d'un seul point $C' \in M$ tel que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'C'}$. De $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'C'}$ on déduit à l'aide de I_5 que $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{A'C'}$. En tenant compte de $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{A'A'}$ (conséquence 1°), nous avons $\overrightarrow{A'A'} = \overrightarrow{A'C'}$ et grâce à I_3 on deduit que les points A' et C' coïncident. Donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$

Les axiomes I_1—I_5 permettent de définir la somme des vecteurs et de montrer que l'ensemble des vecteurs de M forme un groupe par rapport à l'addition des vecteurs.

Définition 2. *Soit $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ une paire ordonnée de vecteurs de M et A un point quelconque de M. (L'existence de A est assurée par I_1). D'après*

I_2 et I_3 il y a un seul point $B \in M$ tel que $\overrightarrow{AB} = \bar{v}_1$ et un seul point $C \in M$ tel que $\overrightarrow{BC} = \bar{v}_2$. Le vecteur $\bar{v} = \overrightarrow{AC}$ est appelé la somme des vecteurs $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$. On écrit :

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}, \text{ ou } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \tag{2}$$

À l'aide de I_5 on peut déduire que la somme des deux vecteurs ne dépend pas du choix du point $A \in M$.

Définition 3. *Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé le vecteur nul de l'espace M. On le désigne par O.*

D'apres la conséquence 1°, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$, pour tout $B \in M$.

Définition 4. *Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et nous le désignons par $-\overrightarrow{AB}$.*

D'après la conséquence 2°, de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ on déduit $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ pour tout $A' \in M$.

Théorème 1. *L'ensemble des vecteurs de M forme un groupe par rapport à l'addition des vecteurs.*

En effet, pour démontrer l'associativité de la somme des vecteurs, nous considérons un point $A \in M$. Grâce aux I_2, I_3 et à la formule (2) on peut écrire $\bar{v}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\bar{v}_2 = \overrightarrow{BC}$ et $\bar{v}_3 = \overrightarrow{CD}$ et alors $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ et $\bar{v}_1 + (\bar{v}_2 + \bar{v}_3) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, pour tout point $A \in M$. Donc

$$(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + \bar{v}_3 = \bar{v}_1 + (\bar{v}_2 + \bar{v}_3). \tag{3}$$

Soit maintenant $\bar{v}$ un vecteur quelconque de M. En considérant un point quelconque $A \in M$ nous avons $\overrightarrow{AB} = \bar{v}$, $\overrightarrow{BB} = \bar{O}$ et donc $\bar{v} + O = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \bar{v}$.

Enfin, l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB} = \bar{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$. c. q. f. d.

En général ce groupe n'est pas commutatif. Si l'on impose que ce groupe soit commutatif on a

(*) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (l'axiome du parallélogramme de l'axiomatique de Weyl)

En effet, de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, grâce à la commutativité de la somme des vecteurs, on déduit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Réciproquement, si l'on suppose la condition (*) vérifiée, alors la somme des vecteurs est commutative. L'affirmation résulte de la relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ et de la condition (*).

Donc, pour montrer que (*) ne dépend pas des axiomes du I-er groupe, il suffit de montrer que la commutativité de la somme des vecteurs n'est pas une conséquence de ce groupe d'axiomes.

À ce but, nous allons utilliser le modèle suivant.

Soit G un groupe qui n'est pas commutatif. Nous notons les éléments de G par $A, B, \ldots$, et nous les appelons point de G. Les éléments de l'ensemble $G \times G$ seront notés avec $\overline{AB}, \overline{CD}, \ldots$ et appelés segments orientés de G. Nous dirons que les éléments AB et CD sont en relation ϱ si $A^{-1}B = C^{-1}D$ (en considérant l'opération de G).

Il résulte immédiatement que ϱ est une relation d'équivalence. Nous notons avec $\mathfrak{M}$ l'ensemble $(G \times G)/\varrho$. Ses éléments seront appelés vecteurs de G et notés avec $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$, etc. On peut établir que les éléments de $G(=M)$ verifient les axiomes $I_1 - I_5$. On peut définir la somme des vecteurs de G à l'aide de la définition 2 et on démontre, sans aucune difficulté, que la somme des vecteurs n'est pas commutative.

II-ème groupe d'axiomes

II_1 $\quad \alpha(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \alpha\bar{v}_1 + \alpha\bar{v}_2$, pour tous $\alpha \in \Gamma$ et $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ de M.

II_2 $\quad (\alpha+\beta)\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}$, pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma$ et $\bar{v}$ de M.

II_3 $\quad e\bar{v} = \bar{v}$, e étant l'élément unité de Γ.

II_4 $\quad \alpha(\beta\bar{v}) = (\alpha\beta)\bar{v}$ pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma$ et $\bar{v}$ de M.

Théorème 2. *La somme des vecteurs est commutative*

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}_2 + \bar{v}_1. \tag{4}$$

En effet, grâce au théorème 1 et aux axiomes II_1—II_2 on peut écrire

$$(e+e)(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = (e+e)\bar{v}_1 + (e+e)\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_2.$$

et d'autre part

$$(e+e)(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = e(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + e(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_1 + \bar{v}_2.$$

On a donc: $\bar{v}_1 + \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ d'où l'on obtient (4).

On peut affirmer maintenant que l'ensemble des vecteurs de M forme un espace vectoriel sur le corps Γ.

On introduit, comme d'habitude, les notions de combinaison linéaire et de dépendance et indépendance linéaire des vecteurs de M.

III-ème groupe d'axiomes

III_1. (L'axiome de la dimension). Il existe toujours dans l'espace M un système de n vecteurs linéairement indépendants, tandis que $n+1$ vecteurs quelconques de M sont linéairement dépendants, n étant un entier non négatif.

Avec l'introduction de l'axiome III_1, l'ensemble M peut être défini comme un espace affine à n dimensions sur le corps Γ et nous le notons avec A_n.

Observations. 1°. Nous avons considéré dans M le produit à gauche d'un élément de Γ et d'un vecteur de M. On peut aussi considérer le produit à droite d'un élément de Γ et d'un vecteur de M et construire l'espace A'_n. En vertu de l'isomorphisme $\alpha\bar{v} \rightleftarrows \bar{v}\alpha$, les deux espaces, identiques du point de vue algébrique, peuvent être considérés, identiques aussi du point de vue géométrique.

2°. Dans A_n, on introduit, comme d'habitude, la notion de repère. Les points et les vecteurs sont alors caractérisés par les n-uples ordonnés de nombres de Γ. Les changements de repère en A_n peuvent être aussi caractérisés par les transformations du groupe affine.

BIBLIOGRAPHIE

1. Рашевский П. К. — *Риманова геометрия и тензорный анализ*. Москва-Гостехиздат 1953.

ASUPRA AXIOMATICII SPAŢIULUI AFIN n-DIMENSIONAL

Rezumat

În această Notă se dă un nou sistem de axiome pentru spaţiul afin n-dimensional în care vectorii sînt construiţi în spaţiul punctual cu ajutorul unei relaţii de echivalenţă, iar grupa întîia de axiome cuprinde axiome mai slabe ca în cazul sistemului lui Weyl [1].

О АКСИОМАТИКЕ n-МЕРНЫХ АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Краткое содержание

Предлагается новая система аксиом для аффинного n-мерного пространства, в котором векторы построены в точечном пространстве при помощи отношения эквивалентности, а первая группа аксиом охватывает аксиомы более слабые, чем в случае системы Вейля [1].