SUR UNE CLASSIFICATION DES CORRESPONDANCES PONCTUELLES ENTRE DEUX PLANS

PAR

I. CREANGĂ

On sait que l'école de Bologne, conduite par Mario Villa, fait la classification des correspondances ponctuelles entre deux plans suivant les divers cas que peut présenter l'équation des directions caractéristiques. Nous proposons une classification différente basée sur la notion de torsion d'une correspondance, introduite dans nos travaux antérieurs [1, 2].

Soient π et $\bar{\pi}$ deux plans et C une correspondance ponctuelle régulière entre π et $\bar{\pi}$. Soient O et $\bar{O}$ deux points correspondants dans π et $\bar{\pi}$ respectivement ; dans des repères affines convenablement choisis, la correspondance peut être représentée dans les voisinages O et $\bar{O}$, par les développements :

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + \frac{1}{2} a^1_{ij} \xi^i \xi^j + \dots, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + \frac{1}{2} a^2_{ij} \xi^i \xi^j + \dots \tag{1}$$

où (ξ^1, ξ^2) et $(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2)$ sont, respectivement, les coordonnées des points M et $\bar{M}$, correspondants dans les voisinages de O et $\bar{O}$ et où on a adopté la sommation des indices muets.

Les directions caractéristiques sont celles où sont conservées les inflexions des courbes correspondantes en O et $\bar{O}$. Leur équation est:

$$a^2_{11} (\xi^1)^3 + (2a^2_{12} - a^1_{11}) (\xi^1)^2 \xi^2 - (2a^1_{12} - a^2_{22}) \xi^1 (\xi^2)^2 - a^1_{22} (\xi^2)^3 = 0 . \tag{2}$$

Selon la nature des racines de l'équation (2), on a la classification suivante:

1ª. Toutes les directions caractéristiques sont réelles et distinctes; on peut prendre deux d'entre elles comme axes du repère, donc

$$a^2_{11} = a^1_{22} = 0 \tag{3}$$

et la troisième direction sera donnée par

$$(2a^2_{12} - a^1_{11})\,\xi^1 - (2a^1_{12} - a^2_{22})\,\xi^2 = 0\,. \tag{4}$$

2ª. Deux directions caractéristiques sont imaginaires-conjuguées et une réelle; dans ce cas on choisit les axes de telle manière que:

$$a^1_{11} = a^2_{22} - 2a^1_{12}\,, \quad a^1_{22} = a^1_{11} - 2a^2_{12}\,. \tag{5}$$

La direction réelle est

$$a^2_{11}\,\xi^1 - a^1_{22}\,\xi^2 = 0\,. \tag{6}$$

3ª. Une direction caractéristique est double; en choisissant les axes convenablement, on peut faire:

$$a^2_{11} = a^1_{22} = 0\,, \quad 2a^2_{12} = a^1_{11} \tag{7}$$

($\xi^1 = 0$ étant la direction simple et $\xi^2 = 0$ la direction double).

4ª. Une direction caractéristique est triple; alors on peut prendre:

$$a^2_{11} = 2a^2_{12} - a^1_{11} = 2a^1_{12} - a^2_{22} = 0\,, \tag{8}$$

la direction triple étant $\xi^2 = 0$.

5ª. Les directions caractéristiques sont indéterminées; dans ce cas on doit avoir

$$a^2_{11} = a^1_{22} = 2a^1_{12} - a^2_{22} = 2a^2_{12} - a^1_{11} = 0\,. \tag{9}$$

Rappelons encore la définition de la torsion d'une correspondance entre deux plans. On prend dans les voisinages de O et $\bar{O}$ deux couples de points correspondants $P, \bar{P}$ et $Q, \bar{Q}$ et on considère les vecteurs

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}, \quad \overrightarrow{\bar{O}\bar{P}} + \overrightarrow{\bar{O}\bar{Q}} = \overrightarrow{\bar{O}\bar{R}}\,. \tag{10}$$

En général, les points R et $\bar{R}$ ne forment pas un couple correspondant. Soit donc R_1 le point correspondant de R. La partie principale de la différence

$$\overrightarrow{OR_1} - \overrightarrow{\bar{O}\bar{R}} = \overrightarrow{RR_1} \tag{11}$$

est ce que nous avons nommé *la torsion de la correspondance* en O et $\bar{O}$, suivant les directions OP et $\bar{O}\bar{Q}$.

En notant avec τ^1, τ^2 les coordonnées de $\overrightarrow{RR_1}$, on a

$$\tau^1 = a^1_{ij}\,\xi^i\,\eta^j + \ldots, \quad \tau^2 = a^2_{ij}\,\xi^i\,\eta^j + \ldots \tag{12}$$

où ξ^1, ξ^2 sont les coordonnées de P et η^1, η^2 sont les coordonnées de Q. En gardant seulement les premiers termes des développements (12), on obtient les composantes de la torsion.

Il y a en général un seul couple de directions en O dont la torsion est nulle. Lorsqu'elles sont déterminées, ces directions sont données par l'équation

$$(a^1_{11}a^2_{12} - a^2_{11}a^1_{12})(\xi^1)^2 + (a^1_{11}a^2_{22} - a^2_{11}a^1_{22})\xi^1\xi^2 + (a^1_{12}a^2_{22} - a^2_{12}a^1_{22})(\xi^2)^2 = 0\,. \tag{13}$$

Suivant la nature des racines de l'équation (13) on peut faire la suivante classification des correspondances:

1ᵇ. L'équation (12) a deux racines réelles et distinctes. Dans ce cas on prend les directions correspondantes pour axes et on obtient

$$a^1_{12} = a^2_{12} = 0\,. \tag{14}$$

On peut nommer ces cas: le cas hyperbolique.

2ᵇ. L'équation (12) a deux racines imaginaires; alors un choix convenable des axes permet de faire

$$a^1_{11} = -a^2_{22}\,, \quad a^2_{11} = -a^2_{22}\,. \tag{15}$$

C'est le cas elliptique.

3ᵇ. L'équation (12) a une racine double; alors, choisissant $\xi^2 = 0$ pour la direction double, on aura

$$a^1_{11} = a^2_{11} = 0\,. \tag{16}$$

C'est le cas parabolique.

4ᵇ. Les directions de torsion nulle sont indéterminées quand

$$\frac{a^1_{11}}{a^2_{11}} = \frac{a^1_{12}}{a^2_{12}} = \frac{a^1_{22}}{a^2_{22}}\,. \tag{17}$$

Dans ce cas, pour chaque direction OP, il y a une direction $\bar{O}\bar{Q}$, telle que $\overrightarrow{\bar{O}\bar{P}} + \overrightarrow{\bar{O}\bar{Q}}$ corresponde à la direction $OP + OQ$. Ces directions sont en involution; l'involution est donnée par

$$\lambda\eta^1 = a^1_{12}\,\xi^1 + a^1_{22}\,\xi^2\,, \quad \lambda\eta^2 = -a^1_{11}\,\xi^1 - a^1_{12}\,\xi^2\,. \tag{18}$$

On obtient les éléments doubles pour

$$\lambda = \pm \sqrt{(a^1_{12})^2 - a^1_{22} a^1_{11}}, \tag{19}$$

et ceux-ci sont

$$\begin{aligned} t\xi^1 &= -a^1_{22}, \quad t\xi^2 = a^1_{12} - \sqrt{(a^1_{12})^2 - a^1_{11} a^1_{22}} \quad \text{et} \\ t\xi^1 &= -a^1_{22}, \quad t\xi^2 = a^1_{12} + \sqrt{(a^1_{12})^2 - a^1_{11} a^1_{22}}. \end{aligned} \tag{20}$$

En combinant les deux espèces de classifications, on est conduit aux cas particuliers de correspondances pour lesquelles les directions de torsion nulle sont aussi des directions caracteristiques.

1°. Dans le cas 1ª, les directions caractéristiques $\xi^1 = 0$ et $\xi^2 = 0$ sont en même temps de torsion nulle, si l'on a en outre

$$a^1_{21} a^2_{22} = 0 \quad \text{et} \quad a^1_{11} a^2_{12} = 0. \tag{21}$$

Alors les formes canoniques des correspondances en O et O, jusqu'au voisinage du 2-e ordre, ont l'une des représentations suivantes:

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + 2a^2_{12}\xi^1\xi^2 + a^2_{22}(\xi^2)^2; \tag{22}$$

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + a^1_{11}(\xi^1)^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + a^2_{22}(\xi^2)^2; \tag{23}$$

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + 2a^1_{12}\xi^1\xi^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + 2a^2_{22}\xi^1\xi^2; \tag{24}$$

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + a^1_{11}(\xi^1)^2 + 2a^1_{12}\xi^1\xi^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2. \tag{25}$$

Quand une seule direction caractéristique coïncide avec une direction de torsion nulle, soit $\xi^1 = 0$, les équations de la correspondance revêtent, jusqu'au second ordre, l'une des formes:

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + a^1_{11}(\xi^1)^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + 2a^2_{12}\xi^1\xi^2 + a^2_{22}(\xi^2)^2, \tag{26}$$

ou

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + a^1_{11}(\xi^1)^2 + 2a^1_{12}\xi^1\xi^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + 2a^2_{12}\xi^1\xi^2. \tag{27}$$

2°. Dans les cas 2ª et 2ᵇ (quand les directions imaginaires conjuguées de torsion nulle coïncident avec deux directions caractéristiques), on doit avoir

$$a^1_{11} = -a^1_{22} = a^2_{12}, \quad a^2_{22} = -a^2_{11} = a^1_{12}. \tag{28}$$

La correspondance a la forme (au voisinage de O):

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^1 &= \xi^1 + a^1_{11}(\xi^1)^2 + 2a^1_{12}\xi^1\xi^2 - a^1_{11}(\xi^2)^2, \\ \bar{\xi}^2 &= \xi^2 - a^1_{12}(\xi^2)^2 + 2a^1_{11}\xi^1\xi^2 + a^1_{12}(\xi^2)^2. \end{aligned} \tag{29}$$

3°. Dans le cas 3ª, quand la direction caractéristique double $\xi^2 = 0$ est en même temps une direction de torsion nulle, celle-ci est aussi double; nous avons alors

$$a^2_{11} = a^1_{22} = a^2_{12} = a^1_{11} = 0. \tag{30}$$

La correspondance a la forme

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + 2a^1_{12}\xi^1\xi^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + a^2_{22}(\xi^2)^2. \tag{31}$$

Dans le même cas 3ª, quand la direction caractéristique simple $\xi^1 = 0$ coïncide avec une direction de torsion nulle, on a

$$\begin{aligned} a^2_{12} = a^1_{22} = a^1_{12} = 0 \quad &\text{et} \quad 2a^2_{12} = a^1_{11} \quad \text{ou} \\ a^2_{11} = a^1_{22} = a^2_{22} = 0 \quad &\text{et} \quad 2a^2_{12} = a^1_{11} \end{aligned} \tag{32}$$

et, respectivement, les correspondances sont:

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + a^1_{11}(\xi^1)^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + a^1_{11}\xi^1\xi^2 + a^2_{22}(\xi^2)^2 \quad \text{ou} \tag{33}$$

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + a^1_{11}(\xi^1)^2 + 2a^2_{12}\xi^1\xi^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + a^1_{11}\xi^1\xi^2. \tag{34}$$

Inversement, une direction de torsion nulle, double est toujours une direction caractéristique, parce que, selon 3ᵇ, on a dans ce cas: $a^1_{11} = a^2_{11} = 0$ (la direction double étant $\xi^2 = 0$) et l'équation (2) des directions est satisfaite par $\xi^2 = 0$.

4°. Dans le cas 4ª, pour que la direction caractéristique triple $\xi = 0$ soit aussi une direction de torsion nulle, il faut

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + 2a^1_{12}\xi^1\xi^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + a^1_{22}(\xi^1)^2 + 2a^1_{12}(\xi^2)^2. \tag{36}$$

5°. Dans le cas 5ª, quand les directions caractéristiques sont indéterminées, il y a une seule direction de torsion nulle, double, donnée par l'équation

$$a^2_{12}\xi^1 + a^1_{12}\xi^2 = 0. \tag{37}$$

On peut prendre cette direction comme axe $\xi^2 = 0$; alors $a^2_{12} = 0$ et, par suite, la correspondance a la forme

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + 2a^1_{12}\xi^1\xi^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + 2a^1_{12}(\xi^1)^2. \tag{38}$$

6°. Dans le cas 4ᵇ où les directions de torsion nulle sont indéterminées, les directions caractéristiques sont données par les équations

$$a^1_{11}(\xi^1)^2 + 2a^1_{12}\xi^1\xi^2 + a^1_{22}(\xi^2)^2 = 0, \quad a^2_{12}\xi^1 - a^1_{12}\xi^2 = 0. \tag{39}$$

Si $(a^1_{12})^2 - a^1_{11}a^1_{22} > 0$, on peut prendre les axes dans les directions caractéristiques données par la première équation; en conséquence

$$a^1_{11} = a^1_{22} = a^2_{11} = a^2_{22} = 0 \tag{40}$$

et les équations de la correspondance sont

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + 2a^1_{12}\xi^1\xi^2, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + 2a^2_{12}\xi^1\xi^2. \tag{41}$$

Si $(a^1_{12})^2 - a^1_{11}a^1_{22} = 0$, on peut prendre

$$a^1_{11} = a^1_{12} = a^2_{11} = a^2_{12} = a^1_{22} = 0. \tag{42}$$

Alors $\xi^2 = 0$ est une direction caractéristique double et $\xi^1 = 0$ est l'autre direction caractéristique. La correspondance se présente sous la forme:

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1, \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + a^2_{22}(\xi^2)^2 \tag{43}$$

Si $(a^1_{12})^2 - a^1_{11}a^1_{22} < 0$, on peut mettre:

$$a^1_{12} = 0; \quad a^1_{11} = a^1_{22};$$

il faut encore que: $a^2_{12} = 0$ et $a^2_{11} = a^2_{22} = 0$.

La correspondance est

$$\bar{\xi}^1 = \xi^1 + a^1[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2], \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2. \tag{44}$$

7°. Dans le cas où sont satisfaites 5ª et 4ᵇ ensemble, c'est-à-dire quand les directions caractéristiques et aussi les directions de torsion nulle sont indéterminées, alors tous les coefficients a^h_{ij} sont nuls et la correspondance est une identité jusqu'au second ordre.

Ces considérations peuvent être étendues aux correspondances entre les espaces à plusieurs dimensions.

BIBLIOGRAFIE

1. Creangă I. — *Sulla trasformazione degli intorni del 2° ordine di due punti corrispondenti, nelle corrispondenze puntuali fra due spazi euclidei.* Rend. di Mat. e di sue applicazioni. Serie V, vol. 1, fasc. 2—3, 1940.

2. Creangă I. — *Asupra unor elemente invariante ale corespondențelor punctuale între două spații afine.* An. şt. Univ. Iaşi, s. n, t. VI (1960), f. 3.
3. Speranza F. — *Classificazione delle trasformazioni puntuali di 2ª specie fra piani.* Boll. Un. Mat. Ital. (3), 11, (1956), p. 210—216.
4. Villa M. — *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale.* Mem. Accad. di Bologna (9) X, 1943.
5. Villa M. — *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali.* Compositio Math. 12 (1954), p. 137—146.
6. Villa M. — *Classificazione delle trasformazioni puntuali di 3ª specie fra piani.* Boll. Un. Mat. Ital. (3), 11, (1956), p. 182—188.

ASUPRA CLASIFICĂRII CORESPONDENȚELOR PUNCTUALE ÎNTRE DOUĂ PLANE

Rezumat

În această Notă se introduce o clasificare a corespondențelor punctuale între două plane, local pentru o pereche de puncte corespunzătoare, bazată pe noțiunea de torsiune a corespondenței. Această clasificare este diferită de clasificarea obținută de şcoala din Bologna.

Punctul de plecare este ecuația de gradul al II-lea (13), rădăcinile căreia reprezintă direcțiile de torsiune nulă. Clasificarea se face după natura rădăcinilor acestei ecuații. Combinînd clasificarea după direcțiile caracteristice, cu această ultimă clasificare, se dau cazuri particulare de corespondențe în (27), (29), (31), (33), (36), (38).

ОТНОСИТЕЛЬНО КЛАССИФИКАЦИИ ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСВИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Краткое содержание

В этой заметке рассматривается одна классификация точечных соответствий между двумя плоскостями, локально, для пары соответствующих точек и основанная на понятие кручения соответствия. Эта классификация определяется классификацией геометрической школы Болоньи.

Исходится из уравнения второго порядка (13), корни котрой представляют направления нулевого кручения. Классификация проводится по природе этих корней. Комбинируя классификацию по характеристическим направлениям, с этой последней классификацией приводятся честные случаи соответствий в (27), (29), (31), (33), (36), (38)