LA THÉORIE DES SURFACES DANS L'ESPACE SYMPLECTIQUE À TROIS DIMENSIONS

PAR

IZU VAISMAN

Communication présentée à la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza" de 26—27 octobre 1963

1. *Introduction*

Par définition (voir [10, 5, 6, 11]) l'espace symplectique Sp_3 est l'espace projectif à trois dimensions dans lequel on prend pour absolu un complexe linéaire, non spécial, de droites, ou, ce qui est la même chose, une corrélation nulle. Dans cet espace opère le groupe à dix paramètres des homographies qui laissent invariant le complexe absolu, nommé groupe de transformations symplectiques.

Les repères symplectiques [11] sont les repères projectifs $A_1, A_2, A_3; A_1, U$ dans lesquels l'équation du complexe absolu prend la forme canonique

$$p^{12} + p^{34} = 0, \tag{1.1}$$

où p^{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ sont les coordonnées pluckeriennes d'une droite ; la corrélation nulle absolue est alors

$$\xi_1 = x^2, \ \xi_2 = -x^1, \ \xi_3 = x^4, \ \xi_4 = -x^3. \tag{1.2}$$

Pour ces repères, qui dépendent aussi de dix paramètres, les droites A_1A_2 et A_3A_4 sont conjuguées par rapport à la corrélation absolue et les droites A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4 appartiennent au complexe absolu. Si l'on tient fixes les points fondamentaux A_1, A_2, A_3, A_4 du repère, alors le point unité U décrit la quadrique [11]

$$x^1x^2 - x^3x^4 = 0, \tag{1.3}$$

cette équation étant considérée dans un repère quelconque ayant les points fondamentaux fixes considérés.

Les équations de mouvement des repères symplectiques sont

$$dA_i = \omega_i^j A_j \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{1.4}$$

et les équations de structure sont

(1.5) $$d\omega_i^j = [\omega_i^k, \omega_k^j] \qquad (i, j, k = 1, 2, 3, 4).$$

Les ω_i^j sont des formes de Pfaff, dépendant de dix paramètres. En écrivant que le déplacement (1.4) du repère est symplectique, on obtient [5, 11]

(1.6) $$\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^2 = \omega_1^1, \quad \omega_3^1 = -\omega_2^1, \quad \omega_3^3 + \omega_1^1 = 0, \quad \omega_1^2 = -\omega_1^3, \quad \omega_1^1 = \omega_2^3,$$

relations qui caractérisent un déplacement symplectique du repère.

Rappelons encore un résultat important : deux droites génériques $d_1\,(p^{ij})$ et $d_2\,(q^{ij})$ ont un invariant symplectique ; c'est le birapport obtenu en intersectant les droites d_1, d_2 et leurs conjuguées par rapport à la corrélation absolue $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, qui appartiennent à une même demiquadrique, avec une droite quelconque qui s'appuie sur elles. L'expression de cet invariant est [10] :

(1.7) $$W^2 = -\frac{p^{13}q^{42} + p^{14}q^{23} + p^{12}q^{13} + p^{23}q^{14} - p^{12}q^{12} - p^{34}q^{34}}{(p^{12} + p^{34})(q^{12} + q^{34})}.$$

Cet invariant prend des valeurs singulières $(0, 1, \infty)$ si une des deux droites appartient au complexe absolu, si les deux droites sont conjuguées et si les deux droites sont incidentes.

Terminons ce bref rappel des notions fondamentales en indiquant dans l'espace symplectique une classe importante de variétés. Ce sont les variétés qui coïncident avec leurs conjuguées par rapport à la corrélation absolue et que nous avons appelées variétés S. Un théorème sur quelques variétés S réglées a été démontré dans [11].

2. *Le repère canonique. Le théorème fondamental*

2.1. Soit Σ une surface de l'espace Sp_3 et M un point de cette surface. Nous nous proposons d'étudier la géométrie différentielle de la surface Σ en employant la méthode de Cartan. Nous avons alors à fixer le repère canonique de la surface. Considérons d'abord les repères d'ordre zéro attachés au point M de Σ. Ils seront par définition les repères symplectiques ayant leur point A_1 au point M. Ces repères dépendent de sept paramètres secondaires d'ordre zéro. En notant par δ un déplacement dans la famille des repères d'ordre zéro écrivons $\pi_i^j = \omega_i^j(\delta)$; en tenant compte que la condition de fixité d'un point M est $dM = \omega M$, on a, avec les équations de mouvement (1.4)

(2.1) $$\pi_1^2 = \pi_1^3 = \pi_1^1 = 0,$$

car A_1 est fixe pour le déplacement δ.

Il suit que les pfaffiens principaux d'ordre zéro sont ω_1^2, ω_1^3, ω_1^1. En supposant ω_1^2 et ω_1^3 linéairement indépendants, on peut les prendre pour pfaffiens principaux de la surface et on a alors

(2.2) $$\omega_1^1 = a\,\omega_1^2 + b\,\omega_1^3.$$

Nous fixons ensuite les repères du premier ordre par la condition que le plan $A_1 A_2 A_3$ soit le plan tangent à la surface en A_1. D'après les formules (1.4) cette condition revient évidemment à $a = b = 0$, ou

(2.2') $$\omega_1^1 = 0.$$

Les repères du premier ordre ainsi obtenus dépendent de cinq paramètres secondaires.

Faisons encore quelques remarques sur la position des repères du premier ordre. À la surface Σ on peut associer d'une manière naturelle la surface Σ', „conjuguée" à Σ par rapport à la corrélation absolue. Cette surface est décrite par le pôle du plan tangent à Σ. D'après la définition des repères symplectiques ce pôle est le point A_3 des repères du premier ordre. Des formules (2.2') et (1.6) on a

(2.3) $$\omega_3^2 = 0,$$

donc, d'après (1.4) le plan tangent à Σ' en A_3 est le plan $A_3 A_1 A_4$ qui est justement le plan polaire de A_1 dans la corrélation nulle absolue. Il s'ensuit que la surface conjuguée à Σ' est justement Σ.

Les points A_1 et A_3 des repères du premier ordre sont donc complètement déterminés. Les droites $A_1 A_3$ forment une congruence intrinsèquement liée à la surface et dont les nappes focales sont Σ et Σ'. En même temps $A_1 A_3$ définissent un champ de directions de la surface Σ, qui sera appelé *champ des directions principales*. Les courbes de la surface tangentes aux directions principales sont nommées les *courbes principales* de le surface ; elles forment une famille simple de courbes. De (1.4) il résulte que, par rapport aux repères du premier ordre, leur équation différentielle est :

(2.4) $$\omega_1^2 = 0.$$

D'une manière analogue on aura des courbes principales sur la surface Σ'.

2.2. Passons maintenant à la détermination des repères du second ordre. À cet effet différentions extérieurement (2.2'), en tenant compte des équations de structure (1.5) et de la condition (2.2'). On obtient

$$[\omega_1^2, \omega_2^1] + [\omega_1^3, \omega_3^1] = 0,$$

d'où avec le lemme de Cartan

(2.5) $$\omega_2^1 = \lambda\,\omega_1^2 + \mu\,\omega_1^3, \quad \omega_3^1 = \mu\,\omega_1^2 + \nu\,\omega_1^3.$$

Nous avons ainsi obtenu les pfaffiens principaux du premier ordre.

Maintenant, en différentiant extérieurement (2.5) et en tenant compte aussi de (1.6) et de (2.2'), on a

$$[d\lambda - 3\lambda\omega_2^2 + \lambda\omega_1^1 - 2\mu\omega_2^3, \omega_1^2] + [d\mu + 2\mu(\omega_1^1 - \omega_3^3) - \nu\omega_2^3, \omega_1^3] = 0,$$

$$[d\mu + 2\mu(\omega_1^1 - \omega_3^3) - \nu\omega_2^3, \omega_1^2] + [d\nu + \nu\omega_1^1 - 3\nu\omega_3^3, \omega_1^3] = 0.$$

En appliquant de nouveau le lemme de Cartan, nous trouvons, en tenant compte de (1.6)

$$
(2.6)\qquad
\begin{aligned}
&d\lambda + 3\lambda\omega_1^1 - \lambda\omega_3^3 - 2\mu\omega_2^3 = A\omega_1^2 + B\omega_1^3,\\
&d\mu + 2\mu(\omega_1^1 - \omega_3^3) - \nu\omega_2^3 = B\omega_1^2 + C\omega_1^3,\\
&d\nu + \nu\omega_1^1 - 3\nu\omega_3^3 = C\omega_1^2 + D\omega_1^3.
\end{aligned}
$$

En considérant un déplacement δ dans la famille des repères du premier ordre, en notant $\pi_i^j = \omega_i^j(\delta)$ et en tenant compte de (2.1) on a

$$
(2.7)\qquad
\begin{cases}
\delta\lambda + 3\lambda\pi_1^1 - \lambda\pi_3^3 - 2\mu\pi_2^3 = 0,\\
\delta\mu + 2\mu(\pi_1^1 - \pi_3^3) - \nu\pi_2^3 = 0,\\
\delta\nu + \nu\pi_1^1 - 3\nu\pi_3^3 = 0.
\end{cases}
$$

Il en résulte

$$
(2.8)\qquad \delta(\lambda\nu - \mu^2) = 4(\lambda\nu - \mu^2)(\pi_3^3 - \pi_1^1),
$$

donc la relation $\lambda\nu - \mu^2 = 0$ est invariante. Ce cas sera exclu dans la suite. Pour le caractériser géométriquement, considérons les lignes asymptotiques de la surface :

$$
(2.9)\qquad \omega_1^2\omega_2^1 + \omega_1^3\omega_3^1 = 0.
$$

Avec (2.5) cette équation devient

$$
(2.9')\qquad \lambda(\omega_1^2)^2 + 2\mu\omega_1^2\omega_1^3 + \nu(\omega_1^3)^2 = 0.
$$

Donc, la condition $\lambda\nu - \mu^2 = 0$ caractérise les points paraboliques et nous avons exclu les surfaces développables.

En revenant au cas général, les équations (2.7) montrent qu'on peut fixer les repères du second ordre par les conditions

$$
(2.10)\qquad \mu = 0,\quad \lambda = -\nu = 1.
$$

La condition $\mu = 0$ a une interprétation géométrique simple. Elle montre que le réseau d'équation

$$
(2.11)\qquad \omega_1^2\omega_1^3 = 0,
$$

formé par les lignes principales et les lignes tangentes à A_1A_2 est conjugué. Donc les droites A_1A_2 des repères du second ordre sont les directions conjuguées des directions principales. Elles nous donnent une nouvelle congruence intrinsèquement liée à la surface.

Quant aux conditions $\lambda = -\nu = 1$, elles fixent le point unité d'un repère du second ordre. À son sujet nous pouvons maintenant dire seulement que sa projection sur A_2A_3 se trouve sur une des tangentes asymptotiques. En effet, dans les repères du second ordre, le réseau asymptotique est donné par

$$
(2.9'')\qquad (\omega_1^2)^2 - (\omega_1^3)^2 = 0.
$$

On voit donc que le groupe des déplacements entre les repères du second ordre n'est pas connexe ; on peut voir qu'il a quatre composantes connexes entre lesquelles nous choisirons une (c'est-à-dire, nous faisons une opération d'orientation).

Nous avons obtenu sur la surface Σ deux réseaux importants : le réseau asymptotique (2.9'') et le réseau (2.11) formé par les lignes principales et leur trajectoires conjuguées et que nous appellerons *réseau de courbure* (de première espèce) de la surface. Un troisième réseau, dont la considération s'impose, est le réseau harmoniquement conjugué avec les deux précédents. Il sera appelé *réseau caractéristique* de la surface et son équation est

$$
(2.12)\qquad (\omega_1^2)^2 + (\omega_1^3)^2 = 0.
$$

La droite A_3A_4 des repères du second ordre est aussi bien déterminée car, par la définition des repères symplectiques, elle est la conjuguée de A_1A_2 dans la corrélation absolue. Elle est susceptible sur Σ de la même interprétation que nous avons donnée pour A_1A_2 sur Σ.

Dans les repères du second ordre les relations (2.5) et (2.6) deviennent

$$
(2.5')\qquad \omega_2^1 = \omega_1^2,\quad \omega_3^1 = -\omega_1^3
$$

et

$$
(2.6')\qquad 3\omega_1^1 - \omega_3^3 = A\omega_1^2 + B\omega_1^3,\quad \omega_2^3 = B\omega_1^2 + C\omega_1^3,\quad 3\omega_3^3 - \omega_1^1 = C\omega_1^2 + D\omega_1^3.
$$

Les relations (2.6') donnent les pfaffiens principaux du second ordre.

On voit aisément que pour un déplacement δ dans la famille des repères du second ordre on a $\delta\omega_1^2 = \delta\omega_1^3 = 0$. Ces relations s'obtiennent en calculant avec les équations de structure $d\omega_1^2 = d\omega_1^2(\delta) - \delta\omega_1^2(d)$ et $d\omega_1^3 = d\omega_1^3(\delta) - \delta\omega_1^3(d)$, où d est un déplacement quelconque et en tenant compte que les pfaffiens principaux du premier et du second ordre s'annulent pour δ. Il suit que ω_1^2 et ω_1^3 sont des formes invariantes du second ordre de la surface.

Remarquons encore que le choix précédent des repères du second ordre convient mieux pour les points hyperboliques de la surface (voir l'équation (2.9'')) mais, si nous acceptons les quantités imaginaires aussi, il reste encore possible pour les points elliptiques

2.3. Les repères du second ordre définis plus haut dépendent encore de deux paramètres secondaires. Pour les fixer, il faut fixer les positions de A_2 et de A_4 respectivement sur A_1A_2 et A_3A_4. Cette chose peut être réalisée le plus simple, en prenant pour A_2 le deuxième foyer de la congruence A_1A_2 (le premier est évidemment A_1) et pour A_4 le deuxième foyer de la congruence A_3A_4 (le premier est évidem-

ment A_3). Nous obtenons ainsi le repère canonique de la surface, qui est du troisième ordre.

Pour obtenir les conditions analytiques qui caractérisent le repère canonique, envisageons les foyers de la congruence $A_1 A_2$. Ce sont les points A_1 et $-CA_1 + A_2$ et on voit que pour fixer le repère de la manière indiquée il faut prendre $C = 0$.

Analoguement, prendre pour A_4 le deuxième foyer de la congruence $A_3 A_4$ revient à prendre $B = 0$. Ainsi le repère canonique est déterminé. Les formules (2.6') donnent maintenant

$$\omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 3P\omega_1^2 + Q\omega_1^3, \quad \omega_3^3 = P\omega_1^2 + 3Q\omega_1^3, \tag{2.6''}$$

où $P = A/8$, $Q = D/8$ sont des invariants du troisième ordre de la surface.

En différentiant extérieurement la première formule (2.6''), on a (avec les résultats antérieurs)

$$[\omega_1^2, \omega_1^3] - [\omega_1^3, \omega_2^1] = 0,$$

d'où avec le lemme de Cartan, on obtient

$$\omega_2^1 = \alpha\omega_1^2 + \beta\omega_1^3, \quad \omega_1^3 = \gamma\omega_1^2 - \alpha\omega_1^3, \tag{2.13}$$

donc ω_2^1, ω_1^3 sont les pfaffiens principaux du troisième ordre et α, β, γ les invariants du quatrième ordre de la surface.

Les formules de Frenet de la surface sont alors

$$\begin{cases} dA_1 = (3P\omega_1^2 + Q\omega_1^3)A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3, \\ dA_2 = (\alpha\omega_1^2 + \beta\omega_1^3)A_1 - (3P\omega_1^2 + Q\omega_1^3)A_2 + \omega_1^2 A_4, \\ dA_3 = -\omega_1^2 A_1 + (P\omega_1^2 + 3Q\omega_1^3)A_3 - \omega_1^3 A_4, \\ dA_4 = -\omega_1^3 A_2 + (\gamma\omega_1^2 - \alpha\omega_1^3)A_3 - (P\omega_1^2 + 3Q\omega_1^3)A_4. \end{cases} \tag{2.14}$$

Il est intéressant de remarquer que dans la théorie précédente les surfaces réglées ne constituent pas un cas d'exception, comme il arrive par exemple dans la géométrie projective. La théorie des surfaces réglées, regardées comme variétés ponctuelles, est contenue dans le cas général étudié plus haut. Il est d'ailleurs simple de trouver la caractéristique analytique des surfaces réglées. Si l'on cherche les conditions pour que le plan osculateur d'une famille de lignes asymptotiques soit indéterminé, on trouve

$$P + Q = 0 \text{ ou } P - Q = 0. \tag{2.15}$$

Les surfaces réglées sont caractérisées donc par $P^2 = {}^2$. En particulier les quadriques sont caractérisées par l'ensemble des conditions (2.15), donc par $P = Q = 0$.

2.4. Étudions maintenant la question de la détermination d'une surface. Nous déterminerons la surface en déterminant sa famille de

repères canoniques. Pour obtenir cette famille il faut, d'après la théorie précédente, considérer les dix formes de Pfaff ω_i^j, composantes du déplacement infinitésimal symplectique le plus général, qui dépendent de dix variables et chercher les solutions à deux dimensions – avec $[\omega_1^2, \omega_1^3] \neq 0$ – du système Pfaff suivant

$$\begin{cases} \omega_1^1 = 0, \ \omega_2^1 = \omega_1^2, & \omega_3^1 = -\omega_1^3, \ \omega_2^3 = 0, \\ \omega_1^4 = 3P\omega_1^2 + Q\omega_1^3, & \omega_3^3 = P\omega_1^2 + 3Q\omega_1^3, \\ \omega_2^4 = \alpha\omega_1^2 + \beta\omega_1^3, & \omega_4^3 = \gamma\omega_1^2 - \alpha\omega_1^3, \end{cases} \tag{2.16}$$

système qui est à huit équations et à quinze variables (dix qui entrent dans les ω_i^j et cinq coefficients). De la théorie des systèmes de Pfaff en involution on sait qu'aux équations (2.16) il faut ajouter les équations du second degré, obtenues en différentiant extérieurement (2.16). Dans le calcul nous utilisons les équations de structure du groupe symplectique (1.5) auxquelles satisfont les ω_i^j et, bien entendu, les conditions (1.6). On obtient d'abord les formules

$$d\omega_1^2 = -2Q[\omega_1^2, \omega_1^3], \quad d\omega_1^3 = 2P[\omega_1^2, \omega_1^3], \tag{2.17}$$

et puis les équations cherchées du second degré (seulement quatre sont indépendantes)

$$\begin{cases} 3[dP, \omega_1^2] + [dQ, \omega_1^3] - (4PQ + \beta + 1)[\omega_1^2, \omega_1^3] = 0, \\ [dP, \omega_1^2] + 3[dQ, \omega_1^3] + (4PQ - \gamma + 1)[\omega_1^2, \omega_1^3] = 0, \\ [d\alpha, \omega_1^2] + [d\beta, \omega_1^3] - 4(\alpha Q - 2\beta P)[\omega_1^2, \omega_1^3] = 0, \\ [d\gamma, \omega_1^2] - [d\alpha, \omega_1^3] - 4(\alpha P + 2\gamma Q)[\omega_1^2, \omega_1^3] = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Les solutions du système extérieur (2.16), (2.18) introduites dans les formules (2.14) donnent un système de Pfaff complètement intégrable, dont l'intégration détermine une surface et sa famille de repères canoniques jusqu'à un déplacement symplectique dans l'espace.

Il suit que l'étude du problème de l'existence de diverses surfaces, caractérisées par des conditions finies ou différentielles imposées aux invariants revient à l'étude de l'involution du système formé par les équations (2.16), (2.18) et les conditions imposées.

La question de la détermination des surfaces peut être posée aussi d'une autre manière. Si pour une fonction φ, définie aux points de la surface, on pose

$$d\varphi = \varphi_1\omega_1^2 + \varphi_2\omega_1^3, \tag{2.19}$$

alors les équations (2.18) reviennent à

$$(2.20)\quad \begin{cases} 3P_2 - Q_1 + 4PQ + \beta + 1 = 0, & P_2 - 3Q_1 - 4PQ + \gamma - 1 = 0, \\ \alpha_2 - \beta_1 + 4\alpha Q - 8\beta P = 0, & \alpha_1 + \gamma_2 + 4\alpha P + 8\gamma Q = 0. \end{cases}$$

(2.20) sont les „conditions d'intégrabilité" auxquelles satisfont les invariants d'une surface.

On a alors le „théorème fondamental" suivant :

Si on donne deux formes de Pfaff ω_1^2 et ω_1^3 à deux variables, linéairement indépendantes, et cinq fonctions P, Q, α, β, γ des mêmes variables, satisfaisant aux conditions (2.17) et (2.20) il existe dans Sp_3 une surface, définie à une transformation symplectique près et dont les formes invariantes et les invariants soient justement les pfaffiens et les fonctions données.

En effet, avec les données indiquées dans l'énoncé du théorème, on peut construire le système de Pfaff (2.14) et celui-ci sera complètement intégrable. La conclusion du théorème est alors évidente.

Il est intéressant de remarquer encore une forme du théorème fondamental précédent. Si l'on donne les formes ω_1^2 et ω_1^3, alors les conditions (2.17) déterminent évidemment les invariants P et Q. Puis, les deux premières conditions (2.20) déterminent les invariants β et γ. Enfin les deux dernières conditions (2.20) sont équivalentes à l'équation de Pfaff

$$(2.21)\qquad d\alpha + (\gamma_2 + 4\alpha P + 8\gamma Q)\,\omega_1^2 - (\beta_1 - 4\alpha Q + 8\beta P)\,\omega_1^3 = 0,$$

dont la conséquence différentielle est

$$(2.22)\qquad \gamma_{22} + \beta_{11} + 12P\beta_1 + 12Q\gamma_2 + 4\alpha(P_2 - Q_1) + 8\beta P_1 + 8Q\gamma_2 + \\ + 32P^2 + 32Q\gamma^2 = 0.$$

Si maintenant

$$(2.23)\qquad P_2 - Q_1 \neq 0,$$

alors la condition (2.22) détermine l'invariant α; la surface est alors complètement déterminée par les formes invariantes ω_1^2 et ω_1^3. En introduisant les valeurs ainsi déterminées de α, β, γ dans les deux dernières conditions (2.20) on obtient deux équations différentielles du 4-éme ordre auxquelles doivent satisfaire P et Q.

Si au contraire

$$(2.24)\qquad P_2 - Q_1 = 0,$$

alors, pour que (2.22) soit remplie, P et Q doivent encore vérifier une équation différentielle du troisième ordre. Alors on obtient α en intégrant (2.21); celui-ci dépend d'une constante arbitraire.

On a donc le

Théorème. *Étant données deux formes de Pfaff linéairement indépendantes ω_1^2, ω_1^3, à deux variables, alors :*

a) *Si P et Q déterminés par (2.17) vérifient (2.23) et les deux équations du quatrième ordre, alors les formes données déterminent, à une transformation symplectique près, une surface ;*

b) *Si P et Q vérifient (2.24) et l'équation du troisième ordre, alors les formes données déterminent, à une transformation symplectique près, une infinité de surfaces dépendant d'une constante arbitraire.*

La condition (2.24) caractérise une classe importante de surfaces que nous retrouverons plus loin et que nous appelons surfaces A. Cette condition est équivalente au fait que la forme de Pfaff $\omega = P\omega_1^2 + Q\omega_1^3$ est une différentielle exacte, ce qui s'exprime encore par

$$(2.25)\qquad [dP, \omega_1^2] + [dQ, \omega_1^3] = 0.$$

En joignant cette équation à (2.16) et (2.18) on obtient un système qui est en involution et qui montre que les surfaces A existent et dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument.

Les deux premières conditions (2.20) montrent que la condition (2.24) est équivalente à $\beta + \gamma = 0$, qui este une autre caractéristique des surfaces A.

3. *Interprétation géométrique des invariants*

3.1. Nous allons maintenant donner quelques interprétations géométriques des invariants d'une surface. De l'équation (2.9″) on obtient que les asymptotiques de la surface sont données par

$$(3.1)\qquad \omega_1^3 = \pm\,\omega_1^2.$$

En introduisant (3.1) dans les formules de Frenet (2.14) on constate que les tangentes asymptotiques sont les droites $(A_1, A_2 + A_3)$ et $(A_1, A_2 - A_3)$.

Considérons alors les surfaces réglées suivantes:

R_1 — engendrée par les droites $(A_1, A_2 + A_3)$ le long de la ligne principale $\omega_1^2 = 0$;

R_2 — engendrée par les droites $(A_1, A_2 - A_3)$ le long de la ligne principale $\omega_1^2 = 0$;

R_3 — engendrée par les droites $(A_1, A_2 + A_3)$ le long de la ligne $\omega_1^3 = 0$;

R_4 — engendrée par les droites $(A_1, A_2 - A_3)$ le long de la ligne $\omega_1^3 = 0$.

Nous donnerons d'abord des interprétations géométriques pour les formes invariantes ω_1^2 et ω_1^3. Calculons l'élément linéaire de la surface réglée R_1 [11]. À ce but nous calculons avec (1.7) l'invariant symplectique des droites $(A_1, A_2 + A_3)$ et $(A_1 + dA_1, A_2 + A_3 + dA_2 + dA_3)$ où les différentielles seront données par les formules (2.14), dans lesquelles on fait $\omega_1^2 = 0$. On trouve

$$W = \frac{1 - Q^2(\omega_1^3)^2}{1 - (Q^2 + 1)(\omega_1^3)^2}.$$

La partie principale de $\sqrt{\dfrac{1 - W}{W}}$ est alors [11]

(3.2) $$d\omega_1 = \omega_1^3 \qquad (\text{mod. } \omega_1^2 = 0).$$

De la même manière on obtient pour l'élément linéaire de R_4

(3.3) $$d\omega_4 = \omega_1^2 \qquad (\text{mod. } \omega_1^3 = 0).$$

On a aussi

(3.4) $$d\omega_2 = i\omega_1^3, \quad d\omega_3 = i\omega_1^2 \quad (i = \text{l'unité imaginaire}).$$

Les formules établies donnent l'interprétation annoncée.

3.2. Pour l'interprétation des invariants nous employerons diverses configurations géométriques. Nous les rapporterons au repère local A_1, A_2, A_3, A_4, U, repère canonique de la surface en A_1. Les coordonnées x^i seront donc des coordonnées par rapport à ce repère.

Considérons le plan tangent à la surface réglée R_1 dans le point $A_2 + A_3$. Ce plan est donné par les points $A_1, A_2 + A_3$ et $d(A_2 + A_3)$ (mod. $\omega_1^2 = 0$) et il a l'équation

(3.5) $$x^2 - x^3 - 4\,Qx^4 = 0.$$

Le plan tangent à R_2 en $A_2 - A_3$ est

(3.6) $$x^2 + x^3 + 4\,Qx^4 = 0.$$

Le plan tangent à R_3 en $A_2 + A_3$ est

(3.7) $$x^2 - x^3 - 4\,Px^4 = 0.$$

Enfin, le plan tangent à R_4 en $A_2 - A_3$ est

(3.8) $$x^2 + x^3 + 4\,Px^4 = 0.$$

Les plans (3.6) et (3.7) coupent la droite $A_3 A_4$ au même point

(3.9) $$S\,(0, 0, 4\,Q, -1).$$

De même, les plans (3.7) et (3.8) coupent $A_2 A_4$ au point

(3.10) $$T\,(0, 0, 4P, -1).$$

Nous donnerons plus tard une interprétation géométrique pour le point unité du repère canonique, alors les formules (3.9) et (3.10) donneront des interprétations pour P et Q. Maintenant on trouve une interprétation simple pour le rapport P/Q. En effet, de (3.9) et (3.10) on a

(3.11) $$(A_1, A_4;\ S,\ T) = -\frac{P}{Q}.$$

D'ailleurs on peut aussi donner des interprétations distinctes pour P et Q, mais d'une manière plus compliquée. Pour les obtenir nous considérerons les S-quadriques ayant un contact réglé du premier ordre avec R_1 et R_2 le long de la génératrice. En employant (2.14) on obtient pour ces quadriques les équations

(3.12) $$x^1 x^4 + x^2 x^3 - (x^2)^2 - (x^4)^2 + 4\,Qx^2 x^4 = 0,$$

(3.13) $$x^1 x^4 - x^2 x^3 - (x^2)^2 + (x^4)^2 - 4\,x^2 Qx^4 = 0.$$

Chacune de ces quadriques coupe $A_2 A_4$ en deux points. Le birapport des quatre points ainsi obtenus est

(3.14) $$K = 32\,Q^4 + 8\,Q^2 \left[\sqrt{16\,Q^4 - 1} - 1\right],$$

ce qui peut être considéré comme une interprétation pour Q.

On trouve d'une manière analogue pour les S-quadriques „osculatrices" des réglées R_3 et R_4 [11]

(3.15) $$x^1 x^4 + x^2 x^3 - (x^2)^2 - (x^4)^2 - 4\,Px^2 x^4 = 0,$$

(3.16) $$x^1 x^4 - x^2 x^3 - (x^2)^2 + (x^4)^2 - 4\,Px^2 x^4 = 0.$$

En les intersectant avec $A_2 A_4$ on obtient de nouveau quatre points, dont le birapport est

(3.17) $$K' = \frac{1}{4}\left(\sqrt{4\,P^2 + 1} - \sqrt{4\,P^2 - 1}\right)^4,$$

ce qui donne une interprétation pour P.

Les formules (3.14) et (3.17) donnent des caractérisations intéressantes pour les surfaces $Q = 0$ ou $P = 0$. Elles sont caractérisées respectivement par $K = -1$ et $K' = -1$.

3.3. Nous allons maintenant interpréter géométriquement l'invariant α. À ce but considérons une nouvelle surface réglée R_5, décrite par les droites $A_1 A_4$ le long de la ligne principale $\omega_1^2 = 0$. Les droites $A_1 A_4$ des repères canoniques seront nommées les normales symplectiques de la surface Σ. (Il est évident alors que les normales symplectiques de la surface conjuguée $\bar{\Sigma}$ sont $A_2 A_3$).

On trouve que le plan tangent à R_5 au point A_4 coupe la droite $A_2 A_3$ au point $A_2 + \alpha A_3$. L'interprétation de α est donnée alors par le birapport.

(3.18) $$(A_2 + A_3,\ A_2 - A_3,\ A_3,\ A_2 + \alpha A_3) = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}.$$

(Les deux premiers points sont les points d'intersection des tangentes asymptotiques avec $A_2 A_3$).

Les surfaces pour lesquelles

(3.19) $$\alpha = 0$$

sont caractérisées par l'harmonicité des quatre points de la formule (3.18).

Considérons maintenant la congruence des normales symplectiques $A_1 A_4$ de la surface Σ. On obtient immédiatement pour les développables de cette congruence l'équation

(3.20) $$\gamma\,(\omega_1^2)^2 - \alpha\omega_1^2\omega_1^3 + (\omega_1^3)^2 = 0.$$

Les plans tangents à ces développables, c'est-à-dire les plans focaux de la congruence, forment avec les plans $A_1 A_4 A_3$ et $A_1 A_4 A_2$ un birapport égal à

$$B = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}. \tag{3.21}$$

Cette formule donne une interprétation géométrique pour γ.

Les développables (3.20) coupent la surface Σ suivant le réseau de même équation. Ce réseau est caractérisé par la propriété que les normales symplectiques de la surface, le long de ses lignes, engendrent des surfaces développables. Le réseau (3.20) peut donc être nommé reseau des *lignes de courbure de II-ème espèce* de la surface.

Les surfaces $\alpha = 0$ sont encore caractérisées par la propriété que les réseaux de courbure de I-ère et de II-ème espèce sont harmoniquement conjugués.

Les surfaces pour lesquelles

$$\gamma = 0, \tag{3.22}$$

sont caractérisées par la propriété que les lignes $\omega_1^3 = 0$ sont des lignes de courbure de II-ème espèce.

Remarquons encore les cas $\gamma = 1$ et $\gamma = -1$, où le réseau (3.20) est harmoniquement conjugué avec le réseau asymptotique et respectivement avec le réseau caractéristique (2.12).

D'une manière analogue on obtient pour les développables de la congruence des droites $A_2 A_4$

$$(\omega_1^2)^2 - \alpha\omega_1^2\omega_1^3 - \beta(\omega_1^3)^2 = 0, \tag{3.23}$$

équation qui donne encore les lignes de courbure de II-ème espèce de la surface Σ, d'où on tire l'interprétation de la relation $\beta = 0$ — les lignes principales de Σ ont pour correspondantes sur Σ des lignes de courbure de II-ème espèce.

Le birapport formé par les plans focaux de la congruence $A_2 A_4$ et les plans $A_2 A_3 A_1$ et $A_2 A_3 A_4$ est

$$B' = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}, \tag{3.24}$$

ce qui donne une interprétation géométrique pour β.

3.4. On peut encore donner pour les invariants α, β et γ des interprétations géométriques plus simples à l'aide de la notion de déviation du parallélisme Myller introduite par Gh. Gheorghiev et I. Popa [7]. Rappelons cette notion. Soit Γ une courbe décrite par le sommet B_1 d'un tétraèdre $B_1 B_2 B_3 B_4$ invariablement lié à Γ et ϖ un pfaffien invariant sur Γ. L'intersection de l'arête $B_1 B_i$ avec la droite caractéristique du plan $B_1 B_i B_j$ est le point

$$P = B_i + rB_1, \tag{3.25}$$

où r est donné par l'équation

$$\left| B_1, B_i, B_j, \frac{\partial B_i}{\partial \varpi} \right| + r \left| B_1, B_i, B_j, \frac{\partial B_1}{\partial \varpi} \right| = 0,$$

les barres indiquent des déterminants et $\frac{\partial B_i}{\partial \varpi}$ étant le coefficient de ϖ dans dB_i. Si $P = B_i$, alors on a

$$r = \left| B_1, B_i, B_j, \frac{\partial B_i}{\partial \varpi} \right| = 0 \tag{3.26}$$

et, par définition, on dit que $B_1 B_i$ sont parallèles au sens de Myller, par rapport à $B_1 B_j$ le long de Γ. Si $r \neq 0$, on l'appelle la déviation du parallélisme Myller.

Avec cette définition on a les interprétations annoncées, en employant les formules de Frenet (2.14)

$$\left\{ \begin{aligned} & \left| A_1, A_2, A_3, \frac{\partial A_2}{\partial \omega_1^3} \right| = -\beta, \\ & \left| A_1, A_2, A_3, \frac{\partial A_2}{\partial \omega_1^2} \right| = \left| A_1, A_4, A_2, \frac{\partial A_4}{\partial \omega_1^3} \right| = -\alpha, \\ & \left| A_1, A_4, A_2, \frac{\partial A_4}{\partial \omega_1^2} \right| = \gamma. \end{aligned} \right. \tag{3.27}$$

Remarquons aussi les relations

$$\left\{ \begin{aligned} & \left| A_2, A_1, A_3, \frac{\partial A_1}{\partial \varpi} \right| = 0, \quad \left| A_1, A_2, A_4, \frac{\partial A_2}{\partial \varpi} \right| = 0, \\ & \left| A_1, A_3, A_4, \frac{\partial A_3}{\partial \varpi} \right| = 0, \quad \left| A_2, A_4, A_3, \frac{\partial A_4}{\partial \varpi} \right| = 0, \end{aligned} \right. \tag{3.28}$$

où ϖ est un pfaffien invariant quelconque et donc ces relations ont lieu le long d'une courbe quelconque de Σ. Les relations (3.28) montrent alors que les directions qui y interviennent sont absolument parallèles au sens de Myller.

4. *Les quadriques osculatrices de la surface*

4.1. Est bien connu le rôle important joué par les diverses quadriques osculatrices d'une surface dans la géométrie projective différentielle. Aussi dans le cas symplectique les quadriques osculatrices donneront des résultats intéressants.

En considérant l'équation

$$\varphi(M, M) = a_{ij} x^i x^j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

d'une quadrique et en imposant les conditions de contact du second ordre (à l'aide des formules (2.14)), on obtient l'équation suivante des quadriques osculatrices:

$$(x^2)^2 - 2x^1 x^1 - (x^3)^2 - 2x^1(Ax^2 + Bx^3 + Cx^4) = 0. \tag{4.1}$$

Ces quadriques forment une famille à trois paramètres (A, B, C).

Dans la suite il sera commode d'employer des coordonnées non homogènes, obtenues en posant

$$x = \frac{x^2}{x^1}, \quad y = \frac{x^3}{x^1}, \quad z = \frac{x^4}{x^1}. \tag{4.2}$$

L'équation (4.1) devient alors

$$x^2 - y^2 - 2z - 2z(Ax + By + Cz) = 0. \tag{4.1'}$$

4.2. Supposons maintenant qu'au voisinage du point A_1 la surface Σ a l'équation locale (ou réduite)

$$z = \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \tag{4.3}$$

Le point A_1 étant l'origine des coordonnées non homogènes, on a évidemment $a_{00} = 0$ (car Σ passe par A_1). Pour déterminer les autres coefficients $a_{\alpha\beta}$ écrivons d'abord les conditions de fixité d'un point M de la surface. Ces conditions sont

$$dM = \varpi M. \tag{4.4}$$

Si (x, y, z) sont les coordonnées non homogènes de M, on a

$$M = A_1 + xA_2 + yA_3 + zA_4. \tag{4.5}$$

En différentiant et en tenant compte de (2.14), puis en exprimant (4.4) et en éliminant ϖ on obtient les conditions de fixité cherchées

$$\begin{cases} dx + \omega_1^2 - 2x(3P\omega_1^2 + Q\omega_1^3) - z\omega_1^3 - x^2(\alpha\omega_1^2 + \beta\omega_1^3) + xy\omega_1^2 = 0, \\ dy + \omega_1^3 - 2y(P\omega_1^2 - Q\omega_1^3) + z(\gamma\omega_1^2 - \alpha\omega_1^3) - xy(\alpha\omega_1^2 + \beta\omega_1^3) + y^2\omega_1^2 = 0 \\ dz + x\omega_1^2 - y\omega_1^3 - 4z(P\omega_1^2 + Q\omega_1^3) - zx(\alpha\omega_1^2 + \beta\omega_1^3) + yz\omega_1^2 = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

En différentiant maintenant (4.3) et en employant (4.6) on obtient une identité, qui permet de déterminer $a_{\alpha\beta}$ (compte tenu du fait que ω_1^2 et ω_1^3 sont linéairement indépendants). En considérant seulement les termes jusqu'au troisième degré on obtient l'équation réduite de la surface

$$z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \frac{4}{3}(Px^3 + Qy^3) + \dots \tag{4.7}$$

4.3. Considérons la courbe d'intersection de la surface (4.7) avec une quadrique (4.1') et projetons-la du point A_1 sur le plan tangent $A_1 A_2 A_3$. On obtient alors dans le plan tangent la courbe

$$8(Px^3 + Qy^3) + 3(x^2 - y^2)(Ax + By) + \dots = 0, \tag{4.8}$$

courbe qui a un point triple en A_1.

Les tangentes à la courbe (4.8) dans ce point triple sont données par l'équation

$$(8P + 3A)x^3 + 3Bx^2y - 3Axy^2 + (8Q - 3B)y^3 = 0. \tag{4.9}$$

On sait que les tangentes de Darboux de la surface sont celles des tangentes (4.9) qui sont apolaires avec les tangentes asymptotiques. Rappelons que [1] les directions données par les formes

$$\varphi_2 = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad \varphi_3 = \alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma xy^2 + \delta y^3 \tag{4.10}$$

sont apolaires si elles remplissent les conditions suivantes

$$c\beta - 2b\gamma + a\delta = 0, \quad c\alpha - 2b\beta + a\gamma = 0. \tag{4.11}$$

Pour les tangentes asymptotiques de la surface on obtient immédiatement l'équation

$$x^2 - y^2 = 0. \tag{4.12}$$

En imposant les conditions d'apolarité entre les directions (4.9) et (4.12) on obtient $A = -2P$, $B = 2Q$.

Les tangentes de Darboux de la surface sont donc

$$Px^3 + 3Qx^2y + 3Pxy^2 + Qy^3 = 0. \tag{4.13}$$

Soit maintenant $xA_2 + yA_3$ le point d'intersection d'une tangente de Darboux avec $A_2 A_3$ et $\bar{x}A_2 + \bar{y}A_3$ un point tel que

$$(A_2 + A_3, A_2 - A_3, xA_2 + yA_3, \bar{x}A_2 + \bar{y}A_3) = -1.$$

On a alors $\bar{x} : \bar{y} = y : x$. Il suit que les tangentes de Segre de la surface s'obtiennent en remplaçant dans (4.13) x par y et inversement. On obtient alors

$$Qx^3 + 3Px^2y + 3Qxy^2 + Py^3 = 0. \tag{4.14}$$

La première formule (2.14) montre que pour toute direction de la surface on a $x : y = \omega_1^2 : \omega_1^3$; les équations différentielles des lignes de Darboux et des lignes de Segre sont alors respectivement

$$P(\omega_1^2)^3 + 3Q(\omega_1^2)^2\omega_1^3 + 3P\omega_1^2(\omega_1^3)^2 + Q(\omega_1^3)^3 = 0, \tag{4.15}$$

$$Q(\omega_1^2)^3 + 3P(\omega_1^2)^2\omega_1^3 + 3Q\omega_1^2(\omega_1^3)^2 + P(\omega_1^3)^3 = 0. \tag{4.16}$$

Le faisceau des quadriques de Darboux de la surface s'obtient en introduisant $A = -2P$, $B = 2Q$ dans (4.1'). On trouve alors

$$x^2 - y^2 - 2z + 2z(2Px - 2Qy - Cz) = 0, \tag{4.17}$$

ou, en coordonnées homogènes

$$(x^2)^2 - (x^4)^2 + 4Px^2x^1 - 4Qx^3x^1 - 2x^1x^4 - 2C(x^4)^2 = 0. \tag{4.17'}$$

On sait que ces quadriques définissent „la polarité fondamentale" — une correspondance entre les droites passant par A_1 et les droites du plan $A_1A_2A_3$, les droites correspondantes étant polaires par rapport aux quadriques (4.17'). Dans cette polarité la normale symplectique A_1A_4 a pour correspondante la droite

$$x^1 - 2Px^2 + 2Qx^3 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{4.18}$$

droite qui coupe A_1A_2 et A_1A_3 respectivement aux points $M(2P, 1, 0, 0)$ et $N(2Q, 0, -1, 0)$, ce qui donne de nouvelles interprétations pour P et Q.

4.4. Introduisons encore trois directions importantes sur la surface — les directions données par l'équation (4.9), qui sont apolaires avec les directions des lignes de courbure. Ces dernières ont l'équation

$$xy = 0. \tag{4.19}$$

Les conditions d'apolarité (4.11) donnent alors $A = B = 0$. Les directions cherchées sont donc

$$Px^3 + yQ^4 = 0. \tag{4.20}$$

Ces directions seront appelées les *directions P* de la surface.

Les lignes tangentes à ces directions seront appelées les *lignes P* de la surface. Ces lignes ont l'équation

$$P(\omega_1^2)^3 + Q(\omega_1^3)^3 = 0. \tag{4.21}$$

Les directions conjuguées aux directions P seront appelées *directions P*. Celles-ci sont données par

$$Px^3 - y^3 = Q0, \tag{4.22}$$

et l'équation des lignes P, tangentes à ces directions, est

$$(P\omega_1^2)^3 - Q(\omega_1^3)^3 = 0. \tag{4.23}$$

Les valeurs $A = B = 0$ déterminent un faisceau de quadriques osculatrices de la surface, qui seront appelées *quadriques principales* ou *quadriques P*. Elles sont caractérisées par le fait qu'elles intersectent la surface d'après une courbe à point triple en A_1 et dont les tangentes sont les directions P de la surface. Ce faisceau a l'équation

$$x^2 - y^2 - 2z - 2Cz^2 = 0, \tag{4.24}$$

ou en coordonnées homogènes

$$(x^2)^2 - (x^3)^2 - 2x^1x^4 - 2C(x^4)^2 = 0. \tag{4.24'}$$

Les quadriques (4.24') définissent aussi une polarité entre les droites passant par A_1 et celles du plan $A_1A_2A_3$. Nous l'appellerons *polarité P* de la surface. Une propriété remarquable est que les droites A_1A_4 et A_2A_3 sont conjuguées dans la polarité P.

Il y a une seule quadrique P qui passe par le point A_1. C'est celle qui correspond à la valeur $C = 0$ en (4.24') et qui a donc l'équation

$$(x^2)^2 - 2x^1x^4 - (x^3)^2 = 0. \tag{4.25}$$

Cette quadrique sera appelée la *quadrique L* de la surface (analogue de la quadrique de Lie en géométrie projective). À l'aide de cette quadrique on peut donner une interprétation géométrique du point unité du repère canonique de la surface. En intersectant la quadrique L avec le plan $A_1A_3A_4$ on trouve la conique

$$(x^3)^2 + 2x^1x^4 = 0, \quad x^2 = 0. \tag{4.26}$$

Si l'on cherche maintenant, dans le plan $A_1A_3A_4$, le lieu géométrique des points, dont la polaire par rapport à la conique (4.26) coïncide avec la polaire par rapport au triangle $A_1A_3A_4$, on trouve une nouvelle conique

$$x^1x^4 - (x^3)^2 = 0, \qquad x^2 = 0, \tag{4.27}$$

qui projetée du point A_2 donne le cône

$$x^1x^4 - (x^3)^2 = 0. \tag{4.28}$$

La droite $(A_2 + A_3, A_1 + A_4)$, dont l'interprétation est connue, coupe le cône (4.28) en deux points, un d'entre eux étant justement le point unité cherché. (On n'obtient pas un seul point à cause du fait déjà remarqué que le groupe des repères du second ordre n'est pas connexe).

Un autre résultat simple qu'on peut obtenir des constructions précédentes est une interprétation pour l'invariant PQ. En effet, considérons la droite (4.18) qui correspond dans la polarité fondamentale à A_1A_4. À cette droite correspond par la polarité P la droite

$$2Px^4 - x^2 = 0, \qquad x^3 - 2Qx^4 = 0. \tag{4.29}$$

L'invariant symplectique des droites (4.18) et (4.29) a la valeur

$$W = 1 - \frac{1}{4PQ},$$

ce qui donne l'interprétation annoncée.

5. *Les surfaces associées à une surface donnée*

5.1. Si Σ est une surface donnée dans l'espace Sp_3 nous avons associé à chaque point de Σ un repère canonique A_1, A_2, A_3, A_4, où le point A_1 décrit la surface Σ. Les points A_2, A_3, A_4 décrivent alors

trois surfaces que nous noterons respectivement par $\mathcal{A}$, Σ, $\bar{\mathcal{A}}$ et que nous appelons surfaces associées à la surface Σ donnée

Occupons-nous d'abord de la surface $\bar{\Sigma}$ décrite par A_3. On sait (§ 2) que cette surface est la surface conjuguée de Σ par rapport à la corrélation nulle absolue de l'espace.

Des étapes parcourues dans la détermination du repère canonique d'une surface (§ 2) il résulte que pour qu'une famille de repères symplectiques, biunivoquement associés aux points d'une surface, dont le sommet A_1 décrit la surface, soit la famille de repères canoniques de la surface il est nécessaire et suffisant qu'entre les composantes de son déplacement infinitésimal il existe, outre les relations (1.6), les relations

$$\omega_1^1 = 0, \quad \omega_2^1 = \omega_1^2, \quad \omega_3^1 = -\omega_1^3, \quad \omega_2^3 = 0. \tag{5.1}$$

Considérons alors le repère défini par les relations

$$\bar{A}_1 = A_3, \ \bar{A}_2 = A_4, \ \bar{A}_3 = A_1, \ \bar{A}_4 = A_2, \ \bar{U} = U \tag{5.2}$$

(A_1, A_2, A_3, A_4, U est le repère canonique de Σ).

Puisque (5.2) est une transformation symplectique, le repère $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{U}$ est aussi un repère symplectique. Si nous notons par $\bar{\omega}_i^j$ les composantes de son déplacement infinitésimal on a

$$d\bar{A}_i = \bar{\omega}_i^j \bar{A}_j. \tag{5.3}$$

En différentiant les formules (5.2) et en tenant compte des formules de Frenet (2.14) nous voyons que les formules (5.3) reviennent à

$$\left\{\begin{aligned} dA_1 &= (P\omega_1^2 + 3Q\omega_1^3)A_1 - \omega_1^3 A_2 - \omega_1^2 A_3, \\ dA_2 &= (\gamma\omega_1^2 - \alpha\omega_1^3)A_1 - (P\omega_1^2 + 3Q\omega_1^3)A_2 - \omega_1^3 A_4, \\ dA_3 &= \omega_1^3 A_1 + (3P\omega_1^2 + Q\omega_1^3)A_3 + \omega_1^2 A_4, \\ d\bar{A}_4 &= \omega_1^2 A_2 + (\alpha\omega_1^2 + \beta\omega_1^3)A_3 - (3P\omega_1^2 + Q\omega_1^3)A_4. \end{aligned}\right. \tag{5.4}$$

De ces formules il résulte que les formes $\bar{\omega}_i^j$ satisfont aux relations (5.1), donc les repères (5.2) sont les repères canoniques de la surface conjuguée $\bar{\Sigma}$.

En comparant les formules (5.4) aux formules de Frenet de la surface Σ on obtient immédiatement que dans des points correspondants A_1, A_3 des deux surfaces on a

$$\bar{\omega}_1^2 = -\omega_1^3, \ \bar{\omega}_1^3 = -\omega_1^2, \ \bar{P} = -Q, \ \bar{Q} = -P, \ \bar{\alpha} = \alpha, \tag{5.5}$$
$$\bar{\beta} = -\gamma, \ \bar{\gamma} = -\beta,$$

où les barres désignent toujours les éléments de $\bar{\Sigma}$.

L'affirmation suivante est encore évidente : si entre deux surfaces Σ et Σ' il y a une correspondance qui satisfait aux conditions (5.5) alors la surface Σ' est symplectiquement égale à la surface $\bar{\Sigma}$, conjuguée de Σ.

Enfin, nous avons encore le

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit une surface S, c'est-à-dire qu'elle soit auto-conjuguée par rapport à la corrélation absolue, est qu'elle admette une correspondance sur elle-même qui vérifie les conditions* (5.5).

Des formules (5.5) on obtient immédiatement des propriétés intéressantes de la correspondance, dont nous avons parlé, entre Σ et $\bar{\Sigma}$. Ainsi les deux premières relations (5.5) montrent qu'aux lignes principales de Σ correspondent les lignes de $\bar{\Sigma}$ conjuguées aux lignes principales de celle-ci et réciproquement. Puis, on obtient que dans cette correspondance se correspondent les lignes asymptotiques, les lignes de Darboux et les lignes P des deux surfaces. La congruence $A_1 A_3$ est donc une congruence W.

5.2. Passons maintenant aux surfaces $\mathcal{A}$ et $\bar{\mathcal{A}}$ des sommets A_2 et A_4. Les formules de Frenet (2.14) et les propriétés des repères symplectiques permettent de démontrer que ces deux surfaces sont aussi un couple de surfaces conjuguées par rapport à la corrélation absolue et qu'elles sont les nappes focales de la congruence $A_2 A_4$. Elles jouissent alors de toutes les propriétés indiquées à **5.1.** On sait encore, de la définition du repère canonique, que $\mathcal{A}$ est une surface focale de la congruence $A_1 A_2$ et que $\bar{\mathcal{A}}$ est une surface focale de la congruence $A_3 A_4$.

Aussi à l'aide des formules (2.14) on obtient pour l'équation des asymptotiques de $\mathcal{A}$ et pour celles de $\bar{\mathcal{A}}$

$$\gamma(\omega_1^2)^2 + \beta(\omega_1^3)^2 = 0. \tag{5.6}$$

On voit ainsi de nouveau que les droites $A_2 A_4$ engendrent une congruence W. De l'équation (5.6) il résulte encore que les surfaces dont la congruence $A_1 A_2$ (et donc $A_3 A_4$ aussi) est une congruence W sont caractérisées par

$$\beta + \gamma = 0; \tag{5.7}$$

elles sont donc les surfaces A (§ 2.4).

Les lignes principales de la surface $\mathcal{A}$ sont évidemment celles tangentes à $A_2 A_4$. Des formules (2.14) il résulte que leur équation différentielle est

$$\alpha\omega_1^2 + \beta\omega_1^3 = 0. \tag{5.8}$$

Leurs conjuguées par rapport au réseau (5.6) sont

$$\gamma\omega_1^2 - \alpha\omega_1^3 = 0. \tag{5.9}$$

Donc, le réseau des lignes de courbure de première espèce de la surface $\mathcal{A}$ a l'équation

$$\alpha\gamma(\omega_1^2)^2 + (\beta\gamma - \alpha^2)\,\omega_1^2\,\omega_1^3 - \alpha\beta(\omega_1^3)^2 = 0. \tag{5.10}$$

Évidemment (5.10) est aussi l'équation des lignes de courbure de $\mathcal{A}$.

5.3. Les surfaces envisagées dans ce paragraphe étant des nappes focales de diverses congruences de droites (comme on l'a vu plus haut) il est naturel de prendre en considération différentes transformations de Laplace.

Considérons le transformé de Laplace du réseau de courbure (de première espèce) de la surface Σ dans le sens de $A_1 A_2$. Ce transformé est un réseau de la surface $\mathcal{A}$ formé par les lignes $\omega_1^2 = 0$ et par leurs conjuguées (par rapport à (5.6)), qui sont les lignes $\omega_1^3 = 0$. Les premières ont pour tangentes les droites $A_2 A_4$, tandis que les secondes ont pour tangentes les droites $(A_2, \alpha A_1 + A_4)$. D'une manière analogue, le transformé de Laplace du réseau de courbure de la surface Σ est le réseau de la surface $\mathcal{A}$ tangent aux droites $A_1 A_3$ et $(A_4, A_2 + \alpha A_3)$. De ces résultats et de l'équation (5.10) il suit que le transformé de Laplace du réseau de courbure de Σ est le réseau de courbure de $\mathcal{A}$ si et seulement si

$$\alpha = 0. \tag{5.11}$$

De plus, on peut dire que les surfaces pour lesquelles on a (5.11) sont caractérisées par la propriété intéressante que les réseaux de courbure des surfaces Σ, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ et Σ forment une suite de Laplace périodique à période quatre. Par la méthode connue, on voit que les surfaces de cette catégorie existent et dépendent de quatre fonctions arbitraires d'une variable.

Nous allons maintenant calculer les invariants de Darboux du réseau de courbure de Σ. Nous employerons la méthode donnée dans le livre de Finikov [3]. Considérons le tétraèdre $B_1 B_2 B_3 B_4$, défini par

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2,\ B_3 = A_3,\ B_4 = \alpha A_1 + A_4; \tag{5.12}$$

la signification géometrique de B_4 a été indiquée plus haut. Remarquons aussi que les droites $A_1 A_4$ et $A_2 A_3$ sont les axes du réseau de courbure de Σ [3]. Les composantes du déplacement infinitésimal du repère (5.12), $\bar{\omega}_i^j$, s'obtiennent immédiatement à l'aide des formules de Frenet de Σ. Alors, avec les formules données dans [3] on obtient les formes extérieures invariantes de la congruence $A_1 A_2$:

$$\begin{cases} h_1 = [\bar{\omega}_2^1, \bar{\omega}_1^2] = -\beta[\omega_1^2, \omega_1^3], & k_1 = [\bar{\omega}_1^3, \bar{\omega}_3^1] = [\omega_1^2, \omega_1^3], \\ \mathcal{H}_1 = [\bar{\omega}_4^2, \bar{\omega}_2^1] = [\omega_1^2, \omega_1^3], & \mathcal{K}_1 = [\bar{\omega}_3^1, \bar{\omega}_4^3] = \gamma[\omega_1^2, \omega_1^3]. \end{cases} \tag{5.13}$$

Si l'on introduit maintenant les paramètres u et v du réseau de courbure de Σ par les relations

$$\omega_1^3 = a\,du, \qquad \omega_1^2 = b\,dv \tag{5.14}$$

(ces formules sont justifiées, compte tenu des formules (2.17) et du théorème de Frobenius sur les systèmes de Pfaff complètement intégrables), alors les invariants de Darboux de ce réseau sont donnés par [3]

$$\begin{cases} h_1 = h_1[du, dv], & k_1 = k_1[du, dv], \\ \mathcal{H}_1 = H_1[du, dv], & \mathcal{K}_1 = K_1[du, dv], \end{cases} \tag{5.15}$$

où h_1, k_1 sont les invariants ponctuels et H_1, K_1 les invariants tangentiels.

Ces formules permettent de donner des caractéristiques analytiques pour beaucoup de classes de surfaces. Ainsi, on remarque d'abord que $k_1 = H_1$ ce qui montre encore une fois que $A_1 A_3$ est une congruence W; puis on obtient encore une fois que les surfaces, dont la congruence $A_1 A_2$ est une congruence W sont les surfaces A, car elles sont caractérisées par $h_1 = K_1$; enfin nous remarquons encore un résultat — les surfaces dont la congruence $A_1 A_2$ est une congruence V [3] sont caractérisées par $h_1 + K_1 = 0$, donc par $\beta = \gamma$.

Nous attirons encore l'attention sur les formules établies par Geidelman [6] pour les invariants de Darboux du réseau de courbure de la surface Σ

$$h_3 = H_1,\ k_3 = K_1,\ H_3 = h_1,\ K_3 = k_1. \tag{5.16}$$

Ces formules peuvent donner de nouveaux résultats géométriques.

6. *L'élément linéaire d'une surface*

6.1. Nous allons maintenant définir une expression différentielle, invariante pour une surface Σ de Sp_3, qui jouera un rôle analogue à celui de l'élément linéaire projectif de Fubini. C'est pourquoi nous l'appellerons élément linéaire symplectique de la surface.

À ce but remarquons d'abord qu'entre les directions issues de deux points quelconques, d'une surface, on peut établir une homographie naturelle — celle dans laquelle se correspondent les directions principales et les directions asymptotiques.

Pour simplifier la notation posons

$$\omega_1^2 = \omega^1 \text{ et } \omega_1^3 = \omega^2. \tag{6.1}$$

Alors un champ de directions se correspondant dans l'homographie définie plus haut sera défini par une équation de la forme

$$\omega^2 = m\omega^1, \qquad (m = \text{const.}). \tag{6.2}$$

Soit maintenant une courbe C de Σ, passant par A_1 et tangente dans ce point (et seulement dans ce point) à la direction (6.2).

Il est simple à voir que le champ de directions harmoniquement conjuguées à (6.2) par rapport aux lignes de courbure de première espèce de la surface est donné par

$$\omega^2 = -m\omega^1. \tag{6.3}$$

Les directions (6.3) le long de la courbe C forment une surface réglée R. Nous définirons l'élément linéaire symplectique de la courbe C de Σ, au point A_1 par l'élément linéaire de la surface réglée R [11].

Pour calculer cet élément linéaire nous considérons la droite (6.3) qui passe par A_1 et qui est donnée par les points A_1 et $A_2 - mA_3$ (on le voit avec la première formule (2.14)) et la droite voisine à celle-ci dans la surface réglée R, qui est donnée par les points $A_1 + dA_1$ et $A_2 - mA_3 + d(A_2 - mA_3)$, et déterminerons avec (1.7) leur invariant symplectique. En le notant par W, on sait [11] que le carré de l'élément linéaire de R est la partie principale de $\frac{1-W}{W}$. On trouve pour cet élément

$$d\sigma^2 = 2m(1+m^2)(\omega^1)^2. \tag{6.4}$$

En remplaçant ici la valeur de m, donnée par (6.2), on a enfin le carré de l'élément linéaire symplectique

$$d\sigma^2 = 2\frac{\omega^2}{\omega^1}[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2]. \tag{6.5}$$

À l'aide de celui-ci on peut définir sur chaque courbe C de Σ un paramètre invariant.

La formule (6.5) montre que les „lignes minimales" de la surface, c'est-à-dire les lignes pour lesquelles l'élément linéaire symplectique est nul sont d'abord les lignes conjuguées aux lignes principales de la surface ($\omega^2 = 0$) et ensuite les lignes caractéristiques définies au § 2 (voir la formule (2.12)). Pour les lignes principales $\omega^1 = 0$, $d\sigma$ devient infini. Ces résultats ont des explications géométriques simples: pour les lignes caractéristiques et pour les lignes $\omega^2 = 0$, les surfaces réglées R sont développables, donc les droites considérées sont incidentes, et quant aux lignes principales, la réglée R appartient alors au complexe absolu.

Il est aussi à remarquer qu'il est alors naturel de définir l'angle de deux directions par la formule de Laguerre, en prenant pour directions isotropes les directions caractéristiques. Les directions harmoniquement conjuguées avec ces derniers seront alors des directions orthogonales. C'est ici qu'on trouve l'explication du nom de lignes de courbure de première espèce de la surface — ce sont des lignes en même temps orthogonales et conjuguées.

6.2. Deux surfaces, Σ et Σ', seront dites symplectiquement appliquables si entre elles on peut définir une correspondance ponctuelle biunivoque qui garde l'élément linéaire symplectique. Si l'on désigne par un accent les éléments de Σ', ceci revient à

$$\frac{\omega'^2}{\omega'^1}[(\omega'^1)^2 + (\omega'^2)^2] = \frac{\omega^2}{\omega^1}[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2]. \tag{6.6}$$

Comme, par suite de la correspondance, on doit avoir

$$\omega'^1 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega'^2 = c\omega^1 + f\omega^2,$$

on obtient, en introduisant ces relations dans (6.6) et en identifiant les coefficients (car ω^1 et ω^2 sont indépendants), que la relation (6.6) est équivalente à

$$\begin{cases} \omega'^1 = \omega^1, & \omega'^2 = \omega^2, \\ \omega'^1 = -\omega^1 & \omega'^2 = -\omega^2, \ (i \text{ — l'unité imaginaire}) \\ \omega'^1 = -i\omega^1, & \omega'^2 = i\omega^2, \\ \omega'^1 = i\omega^1, & \omega'^2 = -i\omega^2. \end{cases} \tag{6.7}$$

Nous avons vu au § 2 que le repère canonique d'une surface est défini d'une manière unique jusqu'à l'orientation. En effet les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 de ce repère sont bien déterminés, mais il n'en est pas de même pour le point unité. En partant d'un repère canonique, nous nous proposons de trouver tous les autres. Ils seront évidemment donnés par des transformations de la forme

$$\bar{A}_1 = A_1, \ \bar{A}_2 = aA_2, \ \bar{A}_3 = bA_3, \ \bar{A}_4 = cA_4, \tag{6.8}$$

où $(1, a, b, c)$ sont les coordonnées du nouveau point unité. Le repère (6.8) devant aussi être symplectique, ce point unité doit se trouver sur la quadrique (1.3), ce qui revient à

$$a = bc. \tag{6.9}$$

Les formules du mouvement du repère (6.8) s'obtiennent immédiatement à l'aide de (2.14), mais elles doivent avoir exactement la même forme ou, plus précisément, les composantes de ce mouvement doivent satisfaire aux conditions (5.1). En écrivant ceci on obtient encore les conditions

$$a^2 = b^2 = c. \tag{6.10}$$

Le système (6.9), (6.10) a quatre solutions

$$a = b = c = 1; \ a = b = -c = -1; \ a = -b = i, \ c = 1; \tag{6.11}$$
$$a = -b = -i, \ c = -1.$$

Il y a donc en chaque point quatre repères canoniques. On constate immédiatement qu'entre les formes ω^1 et ω^2 de la surface rapportée à un de ces quatre repères il y a justement les liaisons (6.7). Il suit alors que, par un choix convenable de l'orientation du repère canonique, la condition (6.6) revient à

$$\omega'^1 = \omega^1, \quad \omega'^2 = \omega^2. \tag{6.11}$$

Il est simple à voir alors que l'applicabilité définie coïncide avec l'applicabilité du second ordre au sens de Cartan entre les deux surfaces [1, 3, 6].

De la discussion faite au § 2.4 il résulte que les seules surfaces symplectiquement applicables sur d'autres surfaces, sans être symplectiquement égales à ces dernières, sont les surfaces A. En effet, nous savons que pour les autres surfaces les formes ω^1 et ω^2 déterminent complètement la surface (à un mouvement symplectique près).

Considérons deux surfaces applicables Σ et Σ'. Nous avons alors les relations (6.11). Il est simple d'obtenir les relations entre les invariants de ces deux surfaces. En différentiant (6.11) et en tenant compte de (2.17) on a

$$P' = P, \quad Q' = Q. \tag{6.12}$$

Puis, les deux premières relations (2.20) écrites pour les deux surfaces donnent

$$\beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma. \tag{6.13}$$

En considérant maintenant la formule (2.21) écrite pour les deux surfaces on obtient

$$d(a' - a) + 4(P\omega_1^2 + Q\omega_1^3)(a' - a) = 0.$$

En supposant que Σ et Σ' ne sont pas symplectiquement égales, on a $a' \neq a$ et la relation précédente devient

$$d \ln (a' - a) + 4(P\omega_1^2 + Q\omega_1^3) = 0, \tag{6.14}$$

ou, avec la notation $\varpi = P\omega_1^2 + Q\omega_1^3$ (§ 2),

$$d \ln (a' - a) + 4\varpi = 0.$$

Comme Σ est une surface A, ϖ est une différentielle exacte et nous avons

$$a' = a + C e^{-4\int \varpi}, \tag{6.15}$$

où C est une constante.

Les formules (6.12), (6.13) et (6.15) donnent les relations cherchées.

Des résultats démontrés plus haut il suit que dans l'applicabilité symplectique de deux surfaces se correspondent les lignes principales et leurs conjuguées, les lignes asymptotiques, les lignes de Darboux et les lignes P des deux surfaces, etc.

6.3. Une autre question intéressante est celle de déterminer les géodésiques symplectiques de la surface, c'est-à-dire les extrémales du problème variationnel défini par l'élément linéaire symplectique. Nous les obtiendrons en employant la méthode indiquée dans le livre de T. Mihăilescu [9]. Considérons le cas général du problème variationnel défini par l'intégrale

$$I = \int_a^b F(\omega^1, \omega^2), \tag{6.16}$$

où $F(\omega^1, \omega^2)$ est une fonction homogène du premier degré, régulière

de la classe nécessaire. Pour trouver la condition nécessaire pour un extrémum de I, considérons une extrémale

$$u^i = u^i(t) \qquad (i = 1, 2), \tag{6.17}$$

u^i étant les paramètres sur la surface, et plogeons-la dans une famille de courbes de comparaison aux mêmes extrémités, dépendant d'un paramètre ε et tel que la courbe (6.17) correspond à $\varepsilon = 0$. Notons par d le déplacement à t variable et à ε constante et par δ le déplacement à ε variable et à t constante. La première variation de I est alors

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \omega^1} \delta\omega^1 + \frac{\partial F}{\partial \omega^2} \delta\omega^2 \right). \tag{6.18}$$

Pour obtenir $\delta\omega^1$ et $\delta\omega^2$, considérons les formules (2.17) et explicitons-les pour les déplacements d et δ. On trouve

$$\begin{cases} \delta\omega^1 = d\omega^1(\delta) + 2Q[\omega^1\omega^2(\delta) - \omega^1(\delta)\omega^2], \\ \delta\omega^2 = d\omega^2(\delta) - 2P[\omega^1\omega^2(\delta) - \omega^1(\delta)\omega^2]. \end{cases} \tag{6.19}$$

(Dans ces formules par ω^1 et ω^2 nous avons compris $\omega^1(d)$, $\omega^2(d)$).

En introduisant ces valeurs dans (6.18), en intégrant ensuite les termes qui contiennent $d\omega^1(\delta)$ et $d\omega^2(\delta)$ et en tenant compte que $\omega^1(\delta) = \omega^2(\delta) = 0$ pour $t = a$ et $t = b$ on trouve

$$\delta I = -\int_a^b \left\{ \omega^1(\delta)\omega^2 \left[\frac{1}{\omega^2} d\left(\frac{\partial F}{\partial \omega^1}\right) + 2Q\frac{\partial F}{\partial \omega^1} - 2P\frac{\partial F}{\partial \omega^2} \right] - \right.$$
$$\left. - \omega^2(\delta)\omega^1 \left[-\frac{1}{\omega^1} d\left(\frac{\partial F}{\partial \omega^2}\right) + 2Q\frac{\partial F}{\partial \omega^1} - 2P\frac{\partial F}{\partial \omega^2} \right] \right\}.$$

Il est à remarquer maintenant que

$$\frac{1}{\omega^2} d\left(\frac{\partial F}{\partial \omega^1}\right) = -\frac{1}{\omega^1} d\left(\frac{\partial F}{\partial \omega^2}\right). \tag{6.20}$$

En effet, F étant une fonction homogène du premier degré, nous avons

$$\omega^1 \frac{\partial F}{\partial \omega^1} + \omega^2 \frac{\partial F}{\partial \omega^2} = F,$$

d'où, par différentiation, on obtient (6.20).

On a alors

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{1}{\omega^2} d\left(\frac{\partial F}{\partial \omega^1}\right) + 2Q\frac{\partial F}{\partial \omega^1} - 2P\frac{\partial F}{\partial \omega^2} \right] [\omega^1\omega^2(\delta) - \omega^2\omega^1(\delta)].$$

Le second facteur étant arbitraire, la condition nécessaire d'extrémum, ou la condition de Euler est

$$\frac{1}{\omega^2} d\left(\frac{\partial F}{\partial \omega^1}\right) + 2Q \frac{\partial F}{\partial \omega^1} - 2P \frac{\partial F}{\partial \omega^2} = 0 . \tag{6.21}$$

En introduisant dans cette formule

$$F = d\sigma = \sqrt{2 \frac{\omega^2}{\omega^1} [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2]} ,$$

on obtient les géodésiques symplectiques de la surface:

$$\begin{aligned} \omega^1 d\omega^2 - \omega^2 d\omega^1 + \frac{4\,\omega^1 \omega^2}{(\omega^1)^4 - 3(\omega^2)^4 - 6(\omega^1)^2 (\omega^2)^2} \{ Q\omega^2 [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] - \\ - P\omega^1 [(\omega^1)^2 + 3(\omega^2)^2] \} = 0 . \end{aligned} \tag{6.22}$$

C'est une forme plus compliquée que celle du cas euclidien.

7. *L'arc riemannien de la surface*

7.1. Dans ce paragraphe nous allons introduire un autre paramètre invariant sur les courbes de la surface, qui est plus commode dans l'étude des courbes que l'élément linéaire et qui donne des aspects nouveaux à la théorie des surfaces.

Appelons par définition arc riemannien de la surface la forme

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 . \tag{7.1}$$

Ceci permet évidemment de définir un paramètre invariant sur chaque courbe

$$\omega^2 = m\omega^1 \tag{7.2}$$

de la surface.

Donnons d'abord une interprétation géométrique de l'arc riemannien de la courbe (7.2). À ce but considérons les surfaces réglées engendrées par les directions asymptotiques le long de cette courbe:

R_1 — engendrée par les droites $(A_1, A_2 + A_3)$ le long de la courbe (7.2)),

R_2 — engendrée par les droites $(A_1, A_2 - A_3)$ (le long de la courbe (7.2)).

Un calcul simple, analogue à celui du § 6.1 donnera pour les éléments linéaires de ces surfaces réglées respectivement [11]

$$d\sigma_1^2 = -(\omega^1 - \omega^2)^2, \quad d\sigma_2^2 = (\omega^1 + \omega^2)^2 . \tag{7.3}$$

Ici on a remplacé la valeur de m donnée par (7.2).

On obtient alors pour ds^2 l'nterprétation

$$ds^2 = \frac{1}{2} (d\sigma_2^2 - d\sigma_1^2) . \tag{7.4}$$

7.2. La formule (7.1) définit évidemment une métrique riemannienne à deux dimensions. Ainsi à toute surface de l'espace symplectique Sp_3 est associé d'une manière invariante un espace de Riemann à deux dimensions. Alors toute la géométrie de cet espace de Riemann se traduit dans des propriétés géométriques de la surface de l'espace Sp_3. Pour faire la traduction, nous pouvons user par exemple des formules connues pour les éléments intrinsèques d'une surface de l'espace euclidien à trois dimensions. Nous employerons ces formules dans les notations de Favard ([2], p. 245 etc.). Dans ces notations on a

$$d\omega^1 = r_1 [\omega^1, \omega^2], \quad d\omega^2 = r_2 [\omega^1, \omega^2] .$$

En comparant ces formules avec (2.17), on trouve

$$r_1 = -2Q, \quad r_2 = 2P . \tag{7.5}$$

Nous pouvons définir la courbure géodésique riemannienne d'une courbe de la surface par la courbure géodésique de la courbe correspondante dans l'espace de Riemann. Celle-ci est donnée par la formule [2]

$$\varkappa_g ds = d \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega^2}{\omega^1} - 2Q\omega^1 + 2P\omega^2 . \tag{7.6}$$

En écrivant $\varkappa_g = 0$, nous aurons les courbes qu'on peut appeler géodésiques riemanniennes de la surface Σ et qui sont les extrémales de l'arc riemannien (7.1). On pouvait donc obtenir leur équation en appliquant la formule (6.21).

On peut de même définir la courbure totale de la surface par celle de la métrique riemannienne. Elle sera donnée par [2]

$$-K = 2P_1 - 2Q_2 + 4P^2 + 4Q^2 \tag{7.7}$$

et ainsi de suite.

7.3. Enfin, nous allons esquisser une théorie des courbes situées sur la surface Σ.

Considérons une courbe C située sur Σ, passant par le point A_1 et qui est donnée par l'équation différentielle

$$\omega^2 = m\omega^1 . \tag{7.8}$$

Définissons sur cette courbe le paramètre invariant s donné par l'arc riemannien.

Si l'on emploie l'angle défini dans le § 6.1 et si l'on désigne par φ l'angle de la courbe (7.8) avec la courbe $\omega^2 = 0$, il est simple à voir que

$$m = \operatorname{tg} \varphi . \tag{7.9}$$

Attachons maintenant aux points de la courbe C les repères symplectiques définis par les relations

$$C_1 = A_1,\ C_2 = A_2 + mA_3,\ C_3 = A_3,\ C_4 = mA_2 + A_4, \tag{7.10}$$

les significations géométriques des points C_i étant évidentes.

Si l'on désigne par un point les dérivées par rapport à l'arc riemannien s de C, on obtient pour le repère (7.10) les équations de mouvement suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
\dot{C}_1 &= (3P\cos\varphi + Q\sin\varphi)C_1 + \cos\varphi\, C_2,\\
\dot{C}_2 &= \left(\alpha\cos\varphi + (\beta-2)\sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}\right)C_1 - (3P\cos\varphi\, Q + \sin\varphi)C_2 +\\
&\quad + [\dot{m} + 4m(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)]\,C_3 + \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\,C_4,\\
\dot{C}_3 &= -\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\,C_1 + (P\cos\varphi + 3Q\sin\varphi)\,C_3 - \sin\varphi\, C_4,\\
\dot{C}_4 &= [\dot{m} + 4m(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)]\,C_1 +\\
&\quad + \left(\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} + \gamma\cos\varphi - \alpha\sin\varphi\right)C_3 - (P\cos\varphi + 3Q\sin\varphi)\,C_4.
\end{aligned}\right. \tag{7.11}$$

Ces formules jouent le rôle joué par les formules de Darboux-Ribaucour pour une courbe d'une surface de l'espace euclidien à trois dimensions. Elles déterminent la géométrie de la courbe C située sur Σ. Les coefficients des formules (7.11) sont les invariants de la courbe de Σ.

Nous nous bornerons à signaler quelques interprétations de ces invariants à l'aide des déviations du parallélisme Myller [7] (voir le § 3.4). Ainsi il est naturel d'appeler courbure tangentielle de la courbe la quantité

$$\varkappa_t = |C_1, C_2, C_4, \dot{C}_2| = -[\dot{m} + 4m(P\cos\varphi + Q\sin\varphi)]; \tag{7.12}$$

$\varkappa_t = 0$ donne les courbes dont le plan osculateur contient les normales symplectiques de la surface De même on appellera torsion géodésique de la courbe la quantité

$$\tau_g = |C_1, C_4, C_2, \dot{C}_4| = \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} + \gamma\cos\varphi - \alpha\sin\varphi; \tag{7.13}$$

$\tau_g = 0$ donne les lignes de courbure de II-ème espèce de la surface. En remplaçant ici $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega^2}{\omega^1}$ on retrouve l'équation (3.20).

Enfin remarquons la quantité

$$|C_3, C_2, C_4, \dot{C}_2| = \alpha\cos\varphi + (\beta-2)\sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}, \tag{7.14}$$

qui égalée à zéro donne une famille triple de courbes sur la surface.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan E. — *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective.* Paris 1937.
2. Favard J. — *Cours de géométrie différentielle locale,* Paris 1957 (citée d'après la traduction en langue russe, Moscou 1960).
3. Фиников С. П. — *Теория конгруэнций.* Москва–Ленинград, 1950.
4. Fubini G. et Čech Ed. — *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces.* Paris 1931.
5. Гейдельман Р. М. — *Симплектическая теория конгруэнций прямых.* Мат. Сборник, т. 51 (1960), стр. 343-376.
6. Гейдельман Р. М. — *Симплектическое изгибание конгруэнций прямых.* Изв. ВУЗ-ов, Математика № 1 (1960), стр. 84-93.
7. Gheorghiev Gh. et Popa I. — *Géométrie projective différentielle des variétés de cônes.* C. R. Ac. Sci. Paris T. 251, p. 1208-1210.
8. Mayer O. — *Géométrie centro-affine différentielle des surfaces.* Ann. Sci. Univ. Jassy, T. XXI (1934), p. 1-77.
9. Mihăilescu T. — *Geometrie diferențială proiectivă.* București 1958.
10. Розенфельд Б. А. — *Неевклидовы геометрии.* Москва, 1955.
11. Vaisman I. — *Surfaces réglées dans l'espace symplectique à trois dimensions.* An. şt. Univ. Iaşi, s. n., s. I. T 1X, f. 1, (1963), p. 111-125.

TEORIA SUPRAFEŢELOR ÎN SPAŢIUL SIMPLECTIC CU TREI DIMENSIUNI

Rezumat

În această lucrare se studiază, cu ajutorul metodei reperului mobil a lui Cartan, teoria suprafeţelor punctuale în spaţiul Sp_3, adică în spaţiul proiectiv P_3, în care se fixează un complex liniar nespecial de drepte ca absolut. Într-o scurtă introducere se reamintesc unele chestiuni privind spaţiul Sp_3. În § 2 se fixează reperul canonic, i se dă interpretarea geometrică, se stabilesc formulele lui Frenet (2.14) şi se dau diferite enunţuri pentru teorema fundamentală. În § 3 se dau interpretări geometrice ale invarianţilor. Aceste interpretări sînt legate de riglate sau congruenţe de drepte asociate suprafeţei şi de abaterile de paralelism [7]. În § 4 se consideră diferite fascicule de cuadrice osculatoare. Ele conduc la noi interpretări pentru invarianţi şi la o interpretare geometrică a punctului unitate al reperului canonic. În § 5 se studiază suprafeţele descrise de vîrfurile reperului canonic şi legătura lor cu suprafaţa dată. În § 6 se defineşte elementul liniar simplectic al suprafeţei, dat de formula (6.5) şi se determină suprafeţele simplectic deformabile. Aplicabilitatea în sensul acestui element liniar este aplicabilitatea de ordinul II în sensul lui Cartan. Se determină de asemenea extremalele elementului liniar simplectic. În § 7 se asociază suprafeţei metrica riemanniană (7.1) şi elementele definite de această metrică. Ea determină pe fiecare curbă un parametru invariant, cu ajutorul căruia se schiţează o teorie a curbelor de pe suprafaţă.

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТРЁХМЕРНОМ СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Краткое содержание

В настоящей работе изучается, при помощи метода подвижного репера Картана, теория поверхностей в пространстве Sp_3, т. е. в проективном пространстве P_3, в котором выбран линейный неспециальный комплекс прямых в качестве абсолюта. В небольшом введении напоминаются некоторые вопросы относительно пространства Sp_3. В § 2 построится канонический репер поверхности, даётся его геометрическое истолкование, устанавливаются формулы Френе (2.14) и даются некоторые виды основной теоремы. В § 3 даются геометрические истолкования инвариантов. Они связаны некоторыми линейчатыми поверхностями и „отклонениями" от параллелизма [7]. В § 4 рассматриваются соприкасающиеся квадрики поверхности. Они ведут к новым истолкованиям для инвариантов и к геометрическому истолкованию единичного пункта канонического репера. В § 5 изучаются поверхности описаны вершинами канонического репера и их связь с данной поверхностью. В § 6 определяется симплектический линейный элемент поверхности (формула (6.5)) и находятся симплектически наложимы поверхности. Эта наложимость совпадает с наложимостью второго порядка в смысле Картана. Установляются также уравнения геодезических этого линейного элемента. В § 7 ассоциируется поверхности риманова метрика (7.1) и понятия связаны с ней. Эта метрика определяет на каждой кривой инвариантный параметр, при помощи которого начинается изложение теории кривых на поверхности.

UNE NOUVELLE MÉTHODE DANS LA THÉORIE DES VARIÉTÉS D'UN ESPACE HOMOGÈNE À GROUPE LINÉAIRE

PAR

DAN I. PAPUC

1. *Considérations générales sur les espaces homogènes à groupe linéaire*

Un espace homogène à groupe linéaire est un espace Klein défini à l'aide de l'ensemble des points de l'espace projectif réel à n dimensions, ensemble noté par S_n, sur lequel opère un sousgroupe G du groupe projectif, nommé *groupe fondamental* de l'espace. L'espace Kleinéen ainsi défini sera noté par $K(S_n, G)$.

Selon cette définition les espaces homogènes à groupe linéaire sont les espaces subordonnés (dans le sens du Programme d'Erlangen) à l'espace projectif réel à n dimensions et l'espace projectif lui-même.

Dans cette Note nous nous proposons d'indiquer une méthode destinée à établir des théorèmes d'existence et d'unicité pour une variété plongée dans un espace $K(S_n, G)$ arbitraire. Cette méthode constitue dans une certaine mesure, une réalisation effective de la méthode générale indiquée par M. J. Favard dans son livre [1], (p. 110—123). Elle a été utilisée avec beaucoup de succès dans le cas des espaces Klein à groupe linéaire complètement réductible ([4], [5]) où les méthodes de E. Cartan et de A. P. Norden [3] se sont avérées difficilement applicables.

Dans l'étude d'un espace $K(S_n, G)$ donné, on considère habituellement une famille de repères projectifs particuliers. famille qui satisfait aux deux conditions suivantes:

a) Par une transformation arbitraire du groupe G on obtient de chaque repère de la famille un repère appartenant aussi à cette famille.

b) Si l'on donne deux repères de la famille il y a une transformation du groupe G et une seule qui les fait coïncider.

Pour chaque espace $K(S_n, G)$ on choisit une telle famille dont les repères s'appellent *repères préférentiels* de l'espace considéré.