ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТРЁХМЕРНОМ СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Краткое содержание

В настоящей работе изучается, при помощи метода подвижного репера Картана, теория поверхностей в пространстве Sp_3, т. е. в проективном пространстве P_3, в котором выбран линейный неспециальный комплекс прямых в качестве абсолюта. В небольшой введении напоминаются некоторые вопросы относительно пространства Sp_3. В § 2 построится канонический репер поверхности, даётся его геометрическое истолкование, устанавливаются формулы Френе (2.11) и даются некоторые виды основной теоремы. В § 3 даются геометрические истолкования инвариантов. Они связаны некоторыми линейчатыми поверхностями и „отклонениями" от параллелизма [7]. В § 4 рассматриваются соприкасающиеся квадрики поверхности. Они ведут к новым истолкованиям для инвариантов и к геометрическому истолкованию единичного пункта канонического репера. В § 5 изучаются поверхности описаны вершинами канонического репера и их связь с данной поверхностью. В § 6 определяется симплектический линейный элемент поверхности (формула (6.5)) и находятся симплектически наложимы поверхности. Эта наложимость совпадает с наложимостью второго порядка в смысле Картана. Установляются также уравнения геодезических этого линейного элемента. В § 7 ассоциируется поверхности риманова метрика (7.1) и понятия связаны с ней. Эта метрика определяет на каждой кривой инвариантный параметр, при помощи которого начинается изложение теории кривых на поверхности.

UNE NOUVELLE MÉTHODE DANS LA THÉORIE DES VARIÉTÉS D'UN ESPACE HOMOGÈNE À GROUPE LINÉAIRE

PAR

DAN I. PAPUC

1. *Considérations générales sur les espaces homogènes à groupe linéaire*

Un espace homogène à groupe linéaire est un espace Klein défini à l'aide de l'ensemble des points de l'espace projectif réel à n dimensions, ensemble noté par S_n, sur lequel opère un sousgroupe G du groupe projectif, nommé *groupe fondamental* de l'espace. L'espace Kleinéen ainsi défini sera noté par $K(S_n, G)$.

Selon cette définition les espaces homogènes à groupe linéaire sont les espaces subordonnés (dans le sens du Programme d'Erlangen) à l'espace projectif réel à n dimensions et l'espace projectif lui-même.

Dans cette Note nous nous proposons d'indiquer une méthode destinée à établir des théorèmes d'existence et d'unicité pour une variété plongée dans un espace $K(S_n, G)$ arbitraire. Cette méthode constitue dans une certaine mesure, une réalisation effective de la méthode générale indiquée par M. J. Favard dans son livre [1], (p. 110—123). Elle a été utilisée avec beaucoup de succès dans le cas des espaces Klein à groupe linéaire complètement réductible ([4], [5]) où les méthodes de E. Cartan et de A. P. Norden [3] se sont avérées difficilement applicables.

Dans l'étude d'un espace $K(S_n, G)$ donné, on considère habituellement une famille de repères projectifs particuliers. famille qui satisfait aux deux conditions suivantes:

a) Par une transformation arbitraire du groupe G on obtient de chaque repère de la famille un repère appartenant aussi à cette famille.

b) Si l'on donne deux repères de la famille il y a une transformation du groupe G et une seule qui les fait coïncider.

Pour chaque espace $K(S_n, G)$ on choisit une telle famille dont les repères s'appellent *repères préférentiels* de l'espace considéré.

Le choix de la famille de repères préférentiels a une grande importance pour les calculs. Mais il n'y a aucun critère général pour faire ce choix dans le cas d'un espace $K(S_n, G)$ arbitraire. Ce problème est résolu spécialement pour chaque espace $K(S_n, G)$ considéré. Par exemple dans le cas de l'espace d'Euclide on utilise habituellement comme repères préférentiels les repères appelés „cartésiens orthogonaux"; dans le cas de l'espace affine on utilise les repères projectifs qui ont n points fondamentaux dans l'hyperplan absolu (les repères appelés „affines") etc. Mais des circonstances spéciales pourraient imposer l'utilisation d'autres familles de repères (satisfaisant néanmoins aux conditions a) et b), comme repères préférentiels.

L'existence des familles de repères préférentiels pour un espace $K(S_n, G)$ donné peut être facilement prouvée. Pour obtenir une telle famille, il est suffisant de prendre un repère projectif arbitraire R et de considérer l'ensemble des repères gR, où g est un élément arbitraire de G. Les conditions a) et b) sont évidemment satisfaites.

Dans ce qui suit nous considérons les espaces $K(S_n, G)$ qui satisfont aux suivantes conditions:

I. *La famille de repères préférentiels est choisie.*

II. *On donne un ensemble de conditions géométriques, noté par Ω, qui nous permet d'attacher, de manière unique, à chaque repère projectif (à l'exception de certains repères projectifs que nous appellerons „spéciaux") un repère préférentiel.*

Observation. Pour l'espace affine et pour les espaces subordonnés (dans le sens du Programme d'Erlangen) à l'espace affine, quand les repères préférentiels sont des repères affines particuliers, dans la condition II on remplacera les repères projectifs par les repères affines.

La condition I n'est pas restrictive. La condition II peut être aisément vérifiée pour plusieurs des espaces $K(S_n, G)$ connus (l'espace projectif, affine, l'espace à groupe linéaire complètement réductible, l'espace axial, l'espace d'Euclide, de Lobatchevsky, de Riemann, de Minkowski, etc.). Le choix des conditions Ω est en général dicté par les propriétés de l'espace $K(S_n, G)$ considéré.

Comme exemple, pour éclaircir mieux ce problème, nous vérifierons la seconde condition dans le cas de l'espace biaxial (étudié par O. Mayer à Jassy et A. P. Norden à Kazan). À la fin de cette Note la même question est résolue dans le cas de l'espace projectif et de l'espace d'Euclide. En [4, 5] on trouve traité le cas général des espaces à groupe linéaire complètement réductible (l'espace biaxial est un tel espace).

Exemple. L'espace biaxial à 3 dimensions est un espace $K(S_3, G)$ particulier. Son groupe fondamental G est le sous-groupe projectif caractérisé par l'invariance de deux droites, d_1 et d_2, non-incidentes, les droites absolues de l'espace.

Un repère projectif arbitraire de S_3 sera noté par $R(A_0, A_1, A_2, A_3; U)$ les points A_i, $i = 0, 1, 2, 3$, étant les points bases et le point U le point unité du repère.

Si le point générique $P \in S_3$ n'appartient ni à la droite d_1 ni à la droite d_2 alors il déterminera, de manière unique, deux points notés par

P^1 et P^2, qui sont les points d'intersection de la droite $d = (Pd_1) \cdot (Pd_2)$ (d est la droite d'intersection des plans Pd_1, Pd_2 avec la droite d_1, respectivement d_2.

Pour l'espace biaxial la condition I est immédiatement vérifiée. On peut choisir comme repères préférentiels les repères projectifs $R(A_0, A_1, A_2, A_3; U)$ qui satisfont aux conditions $A_0 \in d_1$, $A_1 \in d_1$; $A_2 \in d_2$, $A_3 \in d_2$.

Pour vérifier la condition II nous considérerons les repères projectifs qui satisfont aux conditions

$$A_0 \bar{\in} d_1,\ A_0 \bar{\in} d_2;\ A_1 \bar{\in} d_1,\ A_1 \bar{\in} d_2;\ A_0^1 \neq A_2^1,\ A_0^2 \neq A_1^2.$$

Si l'on note avec $R(B_1, B_2; C_1, C_2; U)$ ($B_1 \in d_1$, $B_2 \in d_1$; $C_1 \in d_2$, $C_2 \in d_2$) le repère préférentiel défini par $R(A_0, A_1, A_2, A_3; U)$, les conditions Ω seront

$$B_1 = A_0^1,\ B_2 = A_1^1;\ C_1 = A_0^2,\ C_2 = A_1^2.$$

On voit que ces conditions sont géométriques.

Si le repère $R(A_0, A_1, A_2, A_3; U)$ ne satisfait pas aux conditions précédentes alors, en général, les conditions Ω doivent être changées. En discernant tous les cas possibles en ce qui concerne la position des points A_i, $i = 0, 1, 2, 3$, par rapport aux droites d_1, d_2, on voit que l'ensemble de repères projectifs de S_3 est décomposé dans un nombre fini de classes disjointes, invariantes aux transformations du groupe G (par une telle transformation de chaque repère d'une classe quelconque on obtiendra un repère appartenant aussi à la classe respective), telles que pour chaque classe les conditions Ω aient les mêmes définitions. Nous avons montré ici comment on peut prendre les conditions Ω pour une certaine classe d'entre celles-ci. Les autres classes sont constituées par des repères „spéciaux" dans le sens de l'hypothèse II.

Pour étudier analytiquement l'espace $K(S_n, G)$ on choisira un des repères préférentiels comme repère fondamental. Il nous définira un système de coordonnées projectives homogènes, noté par χ_0. En χ_0 les transformations du groupe G seront représentées par les relations

$$\varrho\, x'^i = a^i_j x^j,\ \det(a^i_j) \neq 0, \tag{1}$$

où les paramètres a^i_j satisferont à certaines relations qui dépendent de la nature du groupe G et de la famille de repères projectifs choisis comme repères préférentiels.

La géométrie de l'espace $K(S_n, G)$ est formée par l'ensemble des propriétés des figures (ensembles de points) *de l'espace S_n, qui s'expriment analytiquement dans le système χ_0 de manière invariante aux transformations* (1) *et aux changements*

$$\tilde{x}^i = \varrho\, x^i,\ \varrho \neq 0 \tag{2}$$

(ρ est le facteur arbitraire des coordonnées en χ_0 d'un point générique de S_n).

Observation. Pour l'espace affine et pour les espaces subordonnés à l'espace affine, les repères préférentiels sont habituellement des repères affines particuliers. Dans ce cas le système χ_0 est un système de coordonnées non-homogènes, donc la transformation (2) n'a plus de sens.

2. *Hypothèses générales sur une variété plongée dans un $K(S_n, G)$*

Soit V_m^v une variété différentielle à m dimensions ($m < n$), de classe $\geqslant v$, plongée en $K(S_n, G)$. Une carte locale de V_m^v sera définie dans le système de coordonnées χ_0, par les relations

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{3}$$

satisfaisant aux conditions :

A. Le nombre v (la classe de différentiabilité des fonctions (3)) est suffisamment grand (tant qu'il est nécessaire dans les calculs).

B. rang $\| x, \partial_1 x, \ldots, \partial_m x \| = m + 1$.

La carte locale donnée par (3) n'est pas unique. Elle peut être remplacée par une autre à l'aide de f nctions

$$u'^\alpha = u'^\alpha(u^1, \ldots, u^m), \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

$$\det\left(\frac{\partial u'^\alpha}{\partial u^\beta}\right) \neq 0,$$

régulières de classe $\geqslant v$.

La géométrie différentielle de V_m^v en $K(S_n, G)$ est constituée par toutes les propriétés des figures de V_m^v qui s'expriment analytiquement de manière invariante aux transformations (1), (2) *et* (4),

Dans ce qui suit, pour abréger, nous introduirons l'indice $\{\tau_1 \ldots \tau_h\}$. Il prend des valeurs sur l'ensemble des combinaisons avec répétition des nombres naturels $1, \ldots, m$ pris par h, donc cet indice a C_{m+h-1}^h valeurs possibles. On suppose que pour chaque valeur de l'indice $\{\tau_1 \ldots \tau_h\}$, les nombres qui constituent cette valeur sont ordonnés d'après leurs grandeurs, donc $\tau_1 \leqslant \tau_2 \ldots \leqslant \tau_h$. Les valeurs différentes de l'indice $\{\tau_1 \ldots \tau_h\}$ sont ordonnées d'après la règle : $\{\tau_1 \ldots \tau_h\} < \{\tau'_1 \ldots \tau'_h\}$ s'il y a un indice $j < h$ tel que $\tau_1 = \tau'_1, \ldots, \tau_j = \tau'_j$ mais $\tau_{j+1} < \tau'_{j+1}$.

Le nombre h s'appellera *l'ordre* de l'indice $\{\tau_1 \ldots \tau_h\}$.

Nous considérerons pour un point x de V_m^v, appartenant à la zone géométrique de la carte locale (3), les matrices

$$M_0 = \| x^i \|, M_1 = \| \partial_{\{\tau_1\}} x^i \|, M_2 = \| \partial_{\{\tau_1 \tau_2\}} x^i \|, \ldots, M_h = \| \partial_{\{\tau_1 \ldots \tau_h\}} x^i \|, \ldots \tag{5}$$

Chacune de ces matrices a $n + 1$ colonnes : $i = 0, 1, \ldots, n$. La matrice M_h a C_{m+h-1}^h lignes (les lignes sont obtenues pour toutes les valeurs possibles de l'indice $\{\tau_1 \ldots \tau_h\}$). On notera

$$\text{rang} \begin{Vmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_h \end{Vmatrix} = r_h. \tag{6}$$

Une nouvelle hypothèse qu'on fera sur V_m^v est la suivante :

C. Soit k le nombre naturel tel que

$$\sum_{h=0}^{k-1} C_{m+h-1}^h < n + 1, \quad \sum_{h=0}^{k} C_{m+h-1}^h \geqslant n + 1,$$

alors, pour chaque point x de la zone géométrique de la carte locale (3), nous aurons

$$r_{k-1} = \sum_{h=0}^{k-1} C_{m+h-1}^h, \quad r_k = n + 1.$$

En vertu de $m < n$, il résulte $k \geqslant 2$.

Nous noterons avec $\Delta(x)$ le déterminant $\neq 0$, d'ordre $n + 1$, qui contient toutes les lignes des matrices $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$ et les lignes des matrices M_k, d'indice le plus petit possible. Pour une carte locale donnée, $\Delta(x)$ est déterminé de manière unique. À l'aide de ce déterminant on peut voir que la condition **C** est invariante aux transformations (1) et (2). (Le déterminant $\Delta(x)$ se multiplie par un facteur $\neq 0$ à une de ces transformations). À une transformation (4) le déterminant $\Delta(x)$ devient une combinaison linéaire des déterminants de même ordre qui contiennent toutes les lignes de $M_0, M_1, \ldots, M_{k+1}$ et $n + 1 - \sum_{h=0}^{k-1} C_{m+h-1}^h$ lignes de M_k. Étant donné que $\Delta(x) \neq 0$, un au moins de ces déterminants est $\neq 0$, donc la condition **C** sera aussi satisfaite dans la nouvelle carte. Il résulte que pour vérifier la condition **C**, on peut considérer une carte locale arbitraire.

Observations. Dans le cas où le système de coordonnées χ_0 est un système non-homogène, les conditions **B** et **C** deviennent

B'. rang $\| \partial_1 x, \ldots, \partial_m x \| = m$.

C'. Soit k le nombre naturel tel que

$$\sum_{h=1}^{k-1} C_{m+h-1}^h < n, \quad \sum_{h=1}^{k} C_{m+h-1}^h \geqslant n,$$

alors, pour chaque point x de la zone géométrique de la carte locale (3), nous aurons

$$r_{k-1} = \sum_{h=1}^{k-1} C^h_{m+h-1}, \quad r_k = n.$$

Ici par r_k nous avons noté

$$\text{rang} \begin{Vmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_k \end{Vmatrix} = r_k$$

où $M_h = \partial_{\{\tau_1 \ldots \tau_h\}} x^i$ et cette matrice n'a que n colonnes: $i = 1, \ldots, n$.

3. *La normalisation locale d'une V^v_m plongée dans un $K(S_n, G)$*

Pour une variété V^v_m de $K(S_n, G)$ on choisit une carte locale, notée par φ_0, dont la zone géométrique est un ouvert $D \subset V^v_m$. Si les relations (3) définissent une carte locale arbitraire de V^v_m de sorte que la zone géométrique de cette carte contienne l'ouvert D, alors la carte locale φ_0 sera donnée par m fonctions $u'^a = f^a(u^1, \ldots, u^m)$, $a = 1, \ldots, m$, définies sur D, régulières de classe $\geqslant v$ et ayant le det $(\partial_\beta f^a) \neq 0$.

Si par une transformation $g \in G$, représentée dans le système de coordonnées χ_0 par (1), la variété V^v_m, donnée par (3), est transformée en $V'^v_m = gV^v_m$, donnée par

$$x'^i = a^i_j x^j(u^1, \ldots, u^m), \tag{8}$$

alors la correspondante de la carte locale φ_0 de V^v_m est la carte locale φ'_0 de V'^v_m représentée à l'aide des mêmes fonctions $f^a(u^1, \ldots, u^m)$.

Si l'on fait une transformation (2), la variété V^v_m, donnée par (3), sera représentée par une nouvelle carte locale:

$$\tilde{x}^i = \varrho\, x^i(u^1, \ldots, u^m). \tag{9}$$

La carte locale φ_0 sera définie dans la nouvelle carte locale par les mêmes fonctions $u'^a = f^a(u^1, \ldots, u^m)$.

Pour chaque point $x \in D$ on considère les vecteurs covariants aux transformations (4), tangents à la variété différentielle V^v_m, qui forment le corepère naturel attaché à x dans la carte φ_0. Ces vecteurs seront notés par $e^a(x)$, $a = 1, \ldots, m$ et dans la carte (3) ils seront définis par les relations

$$e^a_\alpha = \partial_\alpha f^a, \quad a = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Dans la carte locale φ_0 nous avons

$$e^a_\alpha \underset{\varphi_0}{=} \delta^a_\alpha. \tag{10'}$$

Évidemment les vecteurs e^a (10) sont invariants aux transformations (1) et (2).

Les vecteurs e^a, $a = 1, \ldots, m$ définissent m champs vectoriels sur D. Ces champs nous permettent d'introduire m champs vectoriels contrevariants, définis sur D, donnés par les relations

$$e^a_\alpha e^\alpha_b = \delta^a_b; \quad a, b = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

On obtient

$$e^\alpha_a \underset{\varphi_0}{=} \delta^\alpha_a, \quad e^\alpha_a e^\beta_\alpha = \delta^\alpha_\beta. \tag{11'}$$

Nous considérerons la connexion affine, sans torsion et courbure, définie par la conservation dans le transport parallèle des champs e^a, $a = 1, \ldots, m$. Les valeurs de ses coefficients dans la carte (3) seront

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \partial_\gamma e^\alpha_\beta e^a_\alpha, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m \tag{12}$$

et dans la carte φ_0

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \underset{\varphi_0}{=} 0. \tag{12'}$$

Cette connexion est invariante aux transformations (1) et (2).

Considérons les matrices (5) écrites pour la carte locale φ_0 et le déterminant $\Delta(x) \neq 0$, d'ordre $n+1$, défini à l'aide de ces matrices (p. 163). En utilisant les vecteurs e_a, $a = 1, \ldots, m$, et le déterminant $\Delta(x)$, nous introduirons un nouveau déterminant, noté par $\Delta_{\varphi_0}(x)$, construit de telle sorte que, si le déterminant $\Delta(x)$ contient sur une ligne les dérivées $\partial_{\{\tau_1 \ldots \tau_h\}} x^i$, $i = 0, 1 \ldots, n$, alors le déterminant $\Delta_{\varphi_0}(x)$ contiendra sur la même ligne les quantités $\partial_{\alpha_1 \ldots \alpha_h} x^i e^{\alpha_1}_{\{\tau_1} e^{\alpha_2}_{\tau_2} \ldots e^{\alpha_h}_{\tau_h\}}$. Évidemment

$$\Delta_{\varphi_0}(x) \underset{\varphi_0}{=} \Delta(x), \tag{13}$$

où par $\Delta_{\varphi_0}(x)$ nous avons noté la matrice des éléments du déterminant $\Delta_{\varphi_0}(x)$.

On voit que $\Delta_{\varphi_0}(x)$ est un scalaire aux transformations (4). Il se multiplie par un facteur constant à une transformation (1) et par $\varrho^{(n+1)}$ à une transformation (2). Le vecteur covariant aux transformations (4)

$$l_\alpha = \frac{1}{n+1} \partial_\alpha \log \Delta_{\varphi_0}(x) \tag{14}$$

est invariant aux trasformations (1) et il change à une transformation (2) selon la règle

$$\tilde{l}_\alpha = l_\alpha + \partial_\alpha \log \varrho. \tag{15}$$

Ce vecteur est nommé *vecteur normalisateur*, [3]. Dans notre cas il nous permet de normer de façon absolue les coordonnées des points de l'ouvert D, jusqu'à une multiplication par un facteur constant près, par la condition

$$l_\alpha = 0. \tag{16}$$

Pour réaliser cette condition il est suffisant de multiplier les coordonnées des points de l'ouvert D par $\varrho = |\Delta_{\varphi_0}(x)|^{\frac{-1}{n+1}}$. La condition (16) est équivalente à la condition $\Delta_{\varphi_0}(x) = \text{const.}$

Observations. a) Si le système χ_0 est non-homogène, alors la nécessité de considérer le vecteur l_α disparaît.

b) Si l'on peut trouver un autre vecteur que l_α défini ci-dessus, covariant aux transformations (4), invariant aux transformations (1) et qui change selon (15) à une transformation (2) et si pour calculer les composantes de ce nouveau vecteur on utilise les dérivées des fonctions (3), d'ordre plus petit que k, alors il est indiqué de remplacer dans toutes les considérations qui suivront le vecteur l_α par ce nouveau vecteur. Comme exemple voir [4] ou [5].

La connexion affine $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ et le vecteur l_α nous permettent d'attacher à chaque point $x \in D$ les points

$$
\begin{aligned}
&y_{a_1} = \partial_{a_1} x - l_{a_1} x, \\
&y_{a_1 a_2} = y_{a_1 / a_2} - l_{a_2} y_{a_1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&y_{a_1 \cdots a_h} = y_{a_1 \cdots a_{h-1} / a_h} - l_{a_h} y_{a_1 \cdots a_{h-1}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_1, \ldots, a_h, \ldots = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Ici par $y_{a_1 \cdots a_{h-1} / a_h}$ nous avons noté la dérivée covariante de $y_{a_1 \cdots a_{h-1}}$ calculée à l'aide de la connexion affine $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Les coordonnées des points (17) changent selon (1) à une transformation du groupe fondamental, elles se multiplient par ϱ à une transformation (2) et sont des tenseurs covariants aux transformations (4).

Pour la carte locale φ_0 et pour la normation absolue définie par (16) on obtient

$$
y^i_{a_1 \cdots a_h} \overset{l_\alpha = 0}{\underset{\varphi_0}{=}} \partial_{a_1 \cdots a_h} x^i. \tag{18}
$$

À l'aide des points (17) et des champs vectoriels définis par (11) on introduit les points

$$
\begin{aligned}
&z = x, \\
&z_{a_1} = y_{a_1} e^{a_1}_{a_1}, \\
&z_{a_1 a_2} = y_{a_1 a_2} e^{a_1}_{a_1} e^{a_2}_{a_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&z_{a_1 \cdots a_h} = y_{a_1 \cdots a_h} e^{a_1}_{a_1} \cdots e^{a_h}_{a_h}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&a_1, \ldots, a_h, \ldots = 1, \ldots, m; \; \alpha_1, \ldots, \alpha_h, \ldots = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Ces points sont invariants aux transformations (4). En effet, les coordonnées du point $y_{a_1 \cdots a_h}$ sont des tenseurs covariants d'ordre h à une transformation (4) et dans les expressions (19) ces tenseurs sont contractés à l'aide des vecteurs $e^{a_1}_{a_1}, \ldots, e^{a_h}_{a_h}$. Les points (19) se multiplient par ϱ à une transformation (2) et à une transformation du groupe fondamental ils changent selon (1).

Pour la carte locale φ_0 et pour la normation absolue des coordonnées par (16) on obtient

$$
z_{a_1 \cdots a_h} \overset{l_\alpha = 0}{\underset{\varphi_0}{=}} \partial_{a_1 \cdots a_h} x. \tag{20}
$$

Une conséquence immédiate des relations (20) est la suivante interprétation des points $z_{a_1 \cdots a_h}$: *Le point $z_{a_1 \cdots a_h}$ est le point dérivé $\partial_{a_1 \cdots a_h} x$, calculé pour la carte φ_0, les coordonnées étant absolument normées par* (16).

Les relations (20) et l'invariance des points (19) aux transformations (4) nous montrent que ces points *sont symétriques en leurs indices* $a_1 \ldots a_h$.

Les points (19) sont déterminés grâce à la carte locale φ_0 qui nous a permis de définir les champs vectoriels (10), (11) et à l'aide de ces champs, la connexion affine $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ et le vecteur normalisateur l_α. Si l'on utilise une autre carte locale φ^*_0 de V^v_m, dont la zone géométrique a l'intersection non vide avec D, alors on obtiendra, en général d'autres champs vectoriels, une autre connexion affine, un autre vecteur l_α et donc d'autres points (19). Les relations entre ces deux systèmes de points peuvent être établies en utilisant (20). Nous aurons

$$
z_{a_1 \cdots a_h} \overset{l_\alpha = 0}{\underset{\varphi_0}{=}} \partial_{a_1 \cdots a_h} x, \quad z^*_{a_1 \cdots a_h} \overset{l_\alpha = 0}{\underset{\varphi_0}{=}} \partial_{a_1 \cdots a_h} x.
$$

En supposant que la transformation de la carte φ_0 à la carte φ^*_0 est donnée par les relations $u^{*\alpha} = u^{*\alpha}(u^1, \ldots, u^m)$, différentiables de classe $\geqslant v$ et avec $\det\left(\frac{\partial u^{*\alpha}}{\partial u^\beta}\right) \neq 0$, on obtiendra:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^h x^*}{\partial u^{*a_1} \ldots \partial u^{*a_h}} = {} & \frac{\partial^h x}{\partial u^{a_1} \ldots \partial u^{a_h}} \cdot \frac{\partial u^{a_1}}{\partial u^{*a_1}} \cdots \frac{\partial u^{a_h}}{\partial u^{*a_h}} + \frac{\partial^{h-1} x}{\partial u^{a_1} \ldots \partial u^{a_{h-1}}} \frac{\partial u^{a_1}}{\partial u^{*a_1}} \cdots \\
& \cdots \frac{\partial u^{a_{h-2}}}{\partial u^{*a_{h-2}}} \cdot \frac{\partial^2 u^{a_{h-1}}}{\partial u^{*a_{h-1}} \partial u^{*a_h}} + \cdots + \frac{\partial x}{\partial u^a} \frac{\partial^h u^a}{\partial u^{*a_1} \ldots \partial u^{*a_h}}.
\end{aligned}
$$

Ayant en vue les relations (20) et que les points $z_{a_1 \cdots a_h}$ sont invariants aux changements (4), il s'ensuit

$$z^*_{a_1 \cdots a_h} = z_{a_1 \cdots a_h} \frac{\partial u^{a_1}}{\partial u^{*a_1}} \cdots \frac{\partial u^{a_h}}{\partial u^{*a_h}} + \cdots + z_a \frac{\partial^h u^a}{\partial u^{*a_1} \ldots \partial u^{*a_h}} \tag{21}$$

Ce sont les relations qui lient les points $z_{a_1 \cdots a_h}$, invariants aux transformations (4), définis à l'aide de la carte locale φ_0, aux points $z^*_{a_1 \cdots a_h}$, définis à l'aide de la carte locale φ^*_0.

Les relations (21) nous montrent que les coordonnées des points $z_{a_1 \cdots a_h}$ et $z^*_{a_1 \cdots a_h}$ seront identiques alors et seulement alors quand la transformation de la carte locale φ_0 à la carte locale φ^*_0 est donnée par

$$u^{*a} = u^a + c^a, \quad c^a = \text{constantes}.$$

Il faut observer que dans ce cas les matrices M_h (5), les vecteurs e^a (10) et e_a (11), la connexion affine $\Gamma^a_{\beta\gamma}$ (12) et le vecteur normalisateur l_a (14) ont les mêmes valeurs pour ces deux cartes locales. L'ensemble des cartes locales obtenues de φ_0 par les transformations $u^{*a} = u^a + c^a$, (c^a, constantes arbitraires) sera noté par Φ_0.

Les points (19), $z_{a_1 \cdots a_h}$, définis à l'aide de la carte locale φ_0, ont la propriété suivante : si par une transformation du groupe fondamental, $g \in G$, la variété V^v_m est portée dans la variété $V'^v_m = gV^v_m$, la carte locale correspondante à φ_0 étant la carte φ'_0 (voir la p 164), alors si l'on considère les points (19) $z_{a_1 \cdots a_h}$ et $z'_{a_1 \cdots a_h}$, définis respectivement à l'aide des cartes φ_0, φ'_0 et attachés respectivement à deux points correspondants x et $x' = gx$, nous avons la relation $z'_{a_1 \cdots a_h} = gz_{a_1 \cdots a_h}$. Cette relation peut être immédiatement vérifiée grâce à (20).

On suppose que la carte locale φ_0 a été choisie de telle manière que pour chaque point $x \in D$ le repère projectif défini, en vertu de la condition **C**, *par les points dérivés qui entrent dans le déterminant $\Delta(x)$, calculés pour la carte locale φ_0, ne soit pas un repère spécial dans le sens de la condition* II. Les points où cette condition ne peut pas être satisfaite seront exclus de nos considérations.

En vertu de la condition ci-dessus énoncée, *pour chaque point $x \in D$ on peut trouver un système de points*

$$z,\ z_{\{\tau_1\}^*},\ z_{\{\tau_1 \tau_2\}^*}, \ldots, z_{\{\tau_1 \ldots \tau_g\}^*},\quad g \leqslant k \tag{22}$$

obtenu du système $z, z_{\{\tau_1\}}, \ldots, z_{\{\tau_1 \ldots \tau_{k-1}\}}, z_{\{\tau_1 \ldots \tau_k\}'}$, (formé par les points $z_{\{\tau_1 \ldots \tau_h\}}$ qui entrent dans le déterminant $\Delta_{\varphi_0}(x)$), qui nous permettra, grâce aux conditions Ω de l'hypothèse II, (p. 160), *de déterminer de manière unique un repère préférentiel.*

Par $\{\tau_1\}^*$, $\{\tau_1 \tau_2\}^*, \ldots$ on a noté les valeurs de l'indice $\{\tau_1\}, \{\tau_1 \tau_2\}, \ldots$ pour lesquelles les points correspondants entrent dans le système (22).

Le repère préférentiel défini à l'aide de l'ensemble des conditions Ω par le système (22) sera noté $R(x, \Phi_0)$ et ses points A_i. (Ce repère est le même pour toutes les cartes locales de l'ensemble Φ_0). On a obtenu de cette manière un champ de repères préférentiels, attachés aux

points de D. La variété V^v_m, dont les coordonnées des points sont absolument normées par (16), pourvue de ce champ de repères préférentiels s'appelle *variété normalisée à l'aide des cartes locales Φ_0*.

En tenant compte du fait que les conditions Ω sont géométriques (p. 160) et du mode de changement des points $z_{a_1 \cdots a_h}$ (p. 167), il résulte que les points A_i du repère $R(x, \Phi_0)$ satisferont aux trois conditions suivantes :

a) Les points A_i sont invariants aux transformations (4).

b) Les coordonnées des points A_i se multiplient par ϱ si l'on multiplie les coordonnées de x par ce facteur.

c) Si par une transformation $g \in G$ la variété V^v_m est transformée dans la variété $V'^v_m = gV^v_m$, en considérant deux points correspondants $x \in V^v_m$ et $x' = gx \in V'^v_m$ et les cartes locales correspondantes, φ_0 et φ'_0, alors pour les points x et x' et les cartes locales Φ_0 et Φ'_0 nous aurons $R'(x', \Phi'_0) = gR(x, \Phi_0)$, ces repères étant définis par les points z, $z_{\{\tau_1\}^*}, \ldots, z_{\{\tau_1 \ldots \tau_g\}^*}$ et respectivement $z' = gz$, $z'_{\{\tau_1\}^*} = gz_{\{\tau_1\}^*}, \ldots, z'_{\{\tau_1 \ldots \tau_g\}^*} = gz_{\{\tau_1 \ldots \tau_g\}^*}$, à l'aide du même système de conditions Ω.

Observation. Dans le cas de l'espace affine ou d'un espace subordonné à l'espace affine le repère préférentiel normalisateur sera un repère affine particulier défini à l'aide de l'ensemble de conditions Ω, en utilisant un système de vecteurs obtenus du repère affine qui a comme origine le point z et les vecteurs $z_{\{\tau_1\}}, \ldots z_{\{\tau_1 \ldots \tau_{k-1}\}}, z_{\{\tau_1 \ldots \tau_k\}'}$, en vertu de la condition **C'**.

4. *Les équations différentielles fondamentales d'une V^v_m normalisée*

Soit V^v_m une variété de $K(S_n, G)$ normalisée à l'aide des cartes locales Φ_0, dont les zones géométriques contiennent l'ouvert D. En tenant compte du fait que le repère normalisateur $R(x, \Phi_0)$ est un repère projectif particulier et que le groupe fondamental G est un sous-groupe projectif, alors *les équations différentielles fondamentales de la variété V^v_m de $K(S_n, G)$, normalisée à l'aide des cartes Φ_0 sont :*

$$dA_i = \omega^j_i A_j, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Les quantités ω^j_i, qui sont des formes pfaffiennes en $du^1, \ldots, du^m$, satisferont aux conditions suivantes :

a) Les conditions de complète intégrabilité des équations (23)

$$D\omega^j_i + [\omega^k_i, \omega^j_k] = 0. \tag{24}$$

b) Les conditions qui nous assurent que le repère projectif défini par les points A_i, points qui constituent une solution du système (23) déterminée à l'aide d'un repère initial préférentiel, est un repère préférentiel. Nous noterons ces conditions par

(25) $$F_q(\omega_i^l) = 0 .$$

c) Les conditions qui nous assurent qu'il y a un ensemble de cartes locales Φ_0 de V_m^v, telles que le repère préférentiel défini par les points A_i (points solutions du système (23)) soit le repère de la normalisation de V_m^v à l'aide des cartes Φ_0. Pour déterminer ces conditions nous ferons les considérations suivantes.

À l'aide des cartes locales Φ_0, nous avons défini sur l'ouvert D les champs vectoriels e_a et e^a, $a = 1, \ldots, m$ ((10) et (11)). Évidemment les pfaffiens

(26) $$\omega^a = e_\alpha^a \, du^\alpha = \partial_\alpha f^a \, du^\alpha = df^a$$

sont linéairement indépendants ($\det(\partial_\alpha f^a) \neq 0$) et

(27) $$D\omega^a = 0 .$$

Les relations $\delta_\alpha^a \, du'^\alpha = \omega^a$ déterminent de manière unique l'ensemble des cartes locales Φ_0. Réciproquement, les cartes locales de Φ_0 déterminent de manière unique les pfaffiens ω^a.

Dans une carte locale Φ_0 et pour la normation absolue par (16), en tenant compte des relations (20), on peut vérifier les relations

(28) $$dz = z_a \omega^a, \ldots, dz_{a_1 \ldots a_h} = z_{a_1 \ldots a_h a} \omega^a, \ldots$$

Les points $z_{a_1 \ldots a_h}$ étant invariants aux transformations (4), la variété V_m^v étant absolument normée par les conditions (16), les relations (28) sont vérifiées pour n'importe quelle carte locale.

Si le repère préférentiel $R(x, \Phi_0)$ est construit, nous avons les relations

(29) $$z = a^i A_i, \; z_{a_1} = a_{a_1}^i A_i, \ldots, z_{a_1 \ldots a_h} = a_{a_1 \ldots a_h}^i A_i, \ldots$$

En tenant compte de la manière dont les points $z_{a_1 \ldots a_h}$ et A_i changent à une transformation (1), (2) ou (4), il résulte que les quantités $a^i, a_{a_1}^i, \ldots$ sont complètement invariantes à ces transformations. Ces quantités sont aussi complètement symétriques dans leurs indices $a_1 \ldots a_h$ (comme les points $z_{a_1 \ldots a_h}$).

Les invariants $a^i, a_{a_1}^i, \ldots$ satisferont à deux ensembles de conditions dont le premier nous assure que le système de points $z, z_{\{\tau_1\}^*}, \ldots, z_{\{\tau_1 \ldots \tau_g\}^*}$ obtenu de (29), détermine à l'aide des conditions Ω le repère préférentiel défini par les points A_i. Nous le noterons :

(30) $$\Phi_r(a^i, a_{a_1}^i, \ldots, a_{a_1 \ldots a_g}^i) = 0 .$$

Le second ensemble de conditions nous assure que les points (29) satisfont aux relations (28). On obtient

(31) $$da_{a_1 \ldots a_h}^i + a_{a_1 \ldots a_h}^l \omega_l^i = a_{a_1 \ldots a_h a}^i \omega^a, \; h = 0, 1, \ldots, \max(l, g) - 1,$$

où l est l'ordre maximum (p. 162) de l'indice des points $z_{\{\tau_1 \ldots \tau_h\}}$ qui entrent dans le calcul du vecteur l_a tandis que g est l'ordre maximum de l'indice des points $z_{\{\tau_1 \ldots \tau_h\}}$ qui entrent dans le système (22).

Si les conditions (30) et (31) sont satisfaites, alors le repère préférentiel défini par les points A_i (points solutions du système (23)) est le repère de la normalisation de V_m^v à l'aide des cartes locales définies par $\omega^a = \delta_\alpha^a \, du'^\alpha$.

d) Les relations (16) de normation absolue des coordonnées des points de la variété V_m^v sont équivalentes à la condition $I_{\Phi_0}(x) = \text{const.}$ (p. 166). Mais dans ce déterminant on peut remplacer les éléments $\partial_{a_1 \ldots a_h} x_i$ $e_{\{\tau_1}^{a_1} e_{\tau_2}^{a_2} \ldots e_{\tau_h\}}^{a_h}$ par $z_{\{\tau_1 \ldots \tau_h\}}^i$ sans changer la valeur du déterminant. On obtient ainsi un déterminant en $z, z_{\{\tau_1\}}, \ldots z_{\{\tau_1 \ldots \tau_{k-1}\}}, z_{\{\tau_1 \ldots \tau_k\}'}$. La condition de normation absolue $I_{\Phi_0}(x) = \text{const.}$ se traduit par

(32) $$\Psi_s(a_{a_1 \ldots a_h}^l, \omega_i^k) = 0 .$$

Étant donné que les pfaffiens ω^a sont linéairement indépendants, on peut écrire

(33) $$\omega_j^i = g_{ja}^i \omega^a$$

où les quantités g_{ja}^i sont complètement invariantes. Les relations (24), (25) (31), (32) deviennent :

(24') $$[dg_{ja}^i, \omega^a] + g_{ja}^k g_{kb}^i [\omega^a, \omega^b] = 0 ,$$

(25') $$F_q(g_{ia}^l \omega^a) = 0 ,$$

(31') $$da_{a_1 \ldots a_h}^i + a_{a_1 \ldots a_h}^j g_{ja}^i \omega^a = a_{a_1 \ldots a_h a}^i \omega^a ,$$

(32') $$\Psi_s(a_{a_1 \ldots a_h}^i, g_{ia}^k \omega^a) = 0 .$$

5. *Le théorème fondamental de la géométrie différentielle d'une V_m^v plongée dans un $K(S_n, G)$*

Les considérations précédentes nous permettent d'établir le théorème local suivant, que nous appellerons le *théorème fondamental de la géométrie différentielle d'une V_m^v plongée dans un $K(S_n, G)$*.

Soient données m formes pfaffiennes ω^a, $a = 1, \ldots, m$, linéairement indépendantes, de m variables u^a ($\alpha = 1, \ldots, m$) et les fonctions g_{ja}^i, a^i, $a_{a_1}^i, \ldots, a_{a_1 \ldots a_q}^i$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$; $a, a_1, \ldots, a_q = 1, \ldots, m$, $q = \max(l, g)$,

$a^i_{a_1 \dots a_h}$ *étant complètement symétriques en* $a_1 \dots a_h$. *On suppose que ces quantités sont analytiques et qu'elles satisfont au système de relations.*

$$
(34)\quad
\begin{array}{ll}
\mathbf{C}_1 & D\omega^a = 0, \\
\mathbf{C}_2 & [g^i_{ja}, \omega^a] + g^k_{ja}\, g^i_{kb}\, [\omega^a, \omega^b] = 0, \\
\mathbf{C}_3 & F_q\,(g^i_{ja}\, \omega^a) = 0, \\
\mathbf{C}_4 & \Phi_s\,(a^i, a^i_{a_1}, \dots, a^i_{a_1 \dots a_g}) = 0, \\
\mathbf{C}_5 & da^i_{a_1 \dots a_h} + a^j_{a_1 \dots a_h}\, g^i_{ja}\, \omega^a = a^i_{a_1 \dots a_h a}\, \omega^a \\
 & h = 0, 1, \dots, \max(l, g) - 1, \\
\mathbf{C}_6 & \Psi_s\,(a^i, a^i_{a_1} \dots, a^i_{a_1 \dots a_g}, g^i_{ja}\, \omega^a) = 0, \\
 & i, j, k = 0, 1, \dots, n;\ a, a_1, \dots, a_k, \dots = 1, \dots, m.
\end{array}
$$

Dans ces conditions les quantités données déterminent une variété V^v_m, *plongée dans l'espace* $K(S_n, G)$. *Cette variété est normalisée à l'aide des cartes locales définies par les relations* $\omega^a = \delta^a_a\, du'^a$. *Elle est déterminée de manière unique à une transformation du groupe fondamental près.*

Observation. Dans l'énoncé du théorème, par g nous avons noté l'ordre (p. 162) maximum de l'indice des points $z_{\{\tau_1 \dots \tau_h\}}$ qui entrent dans le système (22) et par l l'ordre maximum de l'indice des points $z_{\{\tau_1 \dots \tau_h\}}$ qui entrent dans le calcul du vecteur normalisateur l_a.

Démonstration. Les quantités g^i_{ja} et les formes pfaffiennes ω^a nous permettent de déterminer les pfaffiens $\omega^i_j = g^i_{ja}\, \omega^a$. À l'aide de ces formes on peut écrire le système (23). En vertu de (34: $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$) les conditions (24) sont satisfaites, donc le système (23) est complètement intégrable. Un repère préférentiel A^0_i étant choisi comme repère initial, la solution de (23), qui pour $u^a = u^a_0$ coïncide avec A^0_i est unique. Les conditions (34: $\mathbf{C}_3$) nous assurent que la solution considérée est formée par une famille de repères préférentiels, repères qui sont fonctions de $u^1, \dots, u^m$. En vertu du théorème d'unicité des solutions du système complètement intégrable (23), la solution considérée, $A_i(u^1, \dots, u^m)$, $i = 0, 1, \dots, n$, est déterminée de manière unique, à une transformation du groupe fondamental près (deux solutions différentes du système (23) coïncident par la transformation du groupe fondamental qui fait coïncider les repères préférentiels initiaux qui les ont déterminés).

À l'aide de la solution trouvée $A_i(u)$ et des fonctions $a^i, a^i_{a_1}, \dots, a^i_{a_1 \dots a_q}$ on peut écrire, par (29), les points $z, z_{a_1}, \dots, z_{a_1 \dots a_q}$. La variété V^v_m, solution de notre problème, sera donnée par les relations

$$
(35)\qquad z = z(u^1, \dots, u^m) = a^i A_i.
$$

En vertu des conditions (34:$\mathbf{C}_5$) les points $z, z_{a_1}, \dots, z_{a_1 \dots a_q}$ satisferont aux relations (28). Les conditions (34:$\mathbf{C}_1$) nous montrent que l'on peut trouver une carte locale, notée par φ_0, de sorte que dans cette carte les points $z, z_{a_1}, \dots, z_{a_1 \dots a_q}$ seront les points dérivés jusqu'à l'ordre q de $z = z(u^a)$. En considérant la carte φ_0 et le système de points $z, z_{\{\tau_1\}^*}, \dots, z_{\{\tau_1 \dots \tau_g\}^*}$, par normalisation à l'aide des conditions Ω, en vertu de (34:$\mathbf{C}_4$), nous trouverons les points $A_i(u^a)$. La carte locale φ_0 n'est pas unique. En effet, les différentielles totales exactes ω^a nous définiront une classe, notée par Φ_0, de cartes locales qui peuvent jouer le rôle de φ_0. Les cartes locales de Φ_0 sont obtenues de φ_0 par la transformation $u'^a = u^a + c^a$, $a = 1, \dots, m$; c^a — constantes arbitraires. En tenant compte du fait que la condition (34: $\mathbf{C}_6$) est équivalente à la condition de normation absolue (16), il en résulte que la variété V^v_m (35) est normalisée à l'aide des cartes locales Φ_0. *Q.E.D.*

Pour calculer l'ordre des invariants $a^i_{a_1 \dots a_h}$, g^i_{ja} du théorème fondamental (donc l'ordre maximum des dérivées des fonctions (3) qui entrent dans le calcul de ces invariants) nous utiliserons les cartes locales de Φ_0. En vertu des relations (20) (29) et des équations fondamentales, il s'ensuit que l'ordre est au plus $\max(l, g) + 1$.

6. *Exemples*

Comme exemples, pour pouvoir apprécier facilement la méthode exposée ci-dessus, nous l'appliquerons dans deux cas bien connus: le cas des surfaces de l'espace projectif à 3 dimensions sur le corps des réels et le cas des surfaces de l'espace d'Euclide à 3 dimensions. La méthode a été appliquée par l'auteur dans le cas des variétés de l'espace Klein à groupe linéaire complètement réductible ([4], [5]) et elle sera appliquée, dans une Note ultérieure, dans le cas des variétés de l'espace axial à n dimensions.

a) *Les surfaces de l'espace projectif à 3 dimensions.* Soit P_3 l'espace projectif à 3 dimensions sur le corps des réels. Les repères préférentiels de P_3 sont les repères projectifs. Les conditions Ω (p. 160) qui déterminent à partir de chaque repère projectif un repère préférentiel, sont en ce cas les conditions de coïncidence: les points du repère projectif coïncideront avec les points du repère préférentiel respectif.

Supposons que l'espace P_3 est rapporté à un repère préférentiel; le système de coordonnées projectives homogènes obtenu sera noté par χ_0. Les transformations du groupe fondamental seront représentées, en χ_0, par les relations (1).

Soit S une surface arbitraire de P_3. Une carte locale de cette surface sera définie par les relations

$$
x^i = x^i(u^1, u^2),\ i = 0, 1, 2, 3.
$$

On suppose que les hypothèses **A**, **B**, **C** sont satisfaites.

On choisit une carte locale de S, notée par φ_0, et on suppose que pour cette carte

$$l_{\varphi_0}(x) = \det_{\varphi_0}(x,\ \partial_1 x,\ \partial_2 x,\ \partial_{11} x) \neq 0 .$$

(Géométriquement cela signifie que les lignes $u^2 = \text{const.}$ dans la carte locale φ_0 ne sont pas des lignes asymptotiques).

On considère les champs vectoriels e_a, $a = 1,2$ (11), définis à l'aide de la carte φ_0. Ces champs nous permettent de définir la connexion affine $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (12) et le vecteur normalisateur l_a (14). En utilisant les vecteurs e_a, la connexion affine $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et le vecteur normalisateur l_a, nous pourrons construire les points (19). En tenant compte du fait que les repères préférentiels sont les repères projectifs, le système (22) sera formé par les points z, z_1, z_2, z_{11}. L'ensemble de conditions Ω (p. 160) qui nous permet de définir le repère préférentiel normalisateur sont en ce cas

$$z = A_0,\ z_1 = A_1,\ z_2 = A_2,\ z_{11} = A_3 . \tag{36}$$

La condition (16) de normation absolue des coordonnées des points de la surface devient

$$(z,\ z_1,\ z_2,\ z_{11}) = (A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3) = \text{const.} \tag{37}$$

On voit que dans ce cas $l = g = 2$.

La surface S a été normalisée à l'aide des cartes locales. Nous traduirons dans ce cas le théorème fondamental établi dans cette Note et nous comparerons les résultats trouvés avec les résultats bien connus de Fubini et Čech [2].

Le théorème fondamental (p. 171) implique la considération des pfaffiens ω^a et des invariants α^i, $\alpha^i_{a_1}$, $\alpha^i_{a_1a_2}$, g^i_{ja}, $i, j = 0, 1, 2, 3$; $a, a_1, a_2 = 1, 2$, fonctions analytiques de u^1, u^2, satisfaisant aux conditions (34).

Nous établirons tour à tour, dans notre cas, les conditions (34).

Les conditions (34: $\mathbf{C}_1$,$\mathbf{C}_2$) sont les conditions de complète intégrabilité du système (23). Ces conditions restent inchangées.

Les repères préférentiels étant les repères projectifs, les conditions (34: $\mathbf{C}_3$) disparaissent.

En tenant compte du fait qu'en vertu des relations Ω les relations (29) deviennent les relations (36), on voit que les conditions (34: $\mathbf{C}_4$) sont

$$\begin{aligned} &\alpha^0 = 1, \quad \alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = 0, \\ &\alpha^0_1 = 0, \quad \alpha^1_1 = 1, \alpha^2_1 = \alpha^3_1 = 0, \\ &\alpha^0_2 = \alpha^1_2 = 0, \ \alpha^2_2 = 1, \ \alpha^3_2 = 0, \\ &\alpha^0_3 = \alpha^1_3 = \alpha^2_3 = 0, \quad \alpha^3_3 = 1 . \end{aligned} \tag{38}$$

En considérant les relations

$$dz = z_a \omega^a, \quad dz_{a_1} = z_{a_1 a} \omega^a, \tag{39}$$

et en tenant compte du fait que

$$z = \alpha^i A_i, \quad z_{a_1} = \alpha^i_{a_1} A_i, \quad z_{a_1a_2} = \alpha^i_{a_1a_2} A_i \tag{40}$$

et en utilisant les relations (38), (23) et (33), les conditions (34: $\mathbf{C}_5$) deviennent dans ce cas:

$$\begin{gathered} g^i_{01} = \alpha^i_1,\ g^i_{02} = \alpha^i_2,\ g^i_{11} = \alpha^i_3,\ g^i_{12} = \alpha^i_{12},\ g^i_{21} = g^i_{12},\ g^i_{22} = \alpha^i_{22}, \\ i = 0, 1, 2, 3 . \end{gathered} \tag{41}$$

Par différentiation de (37) on obtient les conditions (34: $\mathbf{C}_6$)

$$\sum_{i=0}^{3} g^i_{ia} = 0, \quad a = 1, 2 . \tag{42}$$

Le théorème fondamental traduit dans ce cas devient: *Une surface S de l'espace projectif à 3 dimensions est déterminée à une transformation du groupe fondamental près par les pfaffiens ω^1, ω^2 et les fonctions analytiques α^i, $\alpha^i_{a_1}$, $\alpha^i_{a_1a_2}$, g^i_{ja}, $i, j = 0, 1, 2, 3$; $a, a_1, a_2 = 1, 2$ satisfaisant aux conditions* (34: $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$), (38), (41) *et* (42). *La surface S est normalisée à l'aide des cartes locales définies par $\omega^1 = du^1$, $\omega^2 = du^2$.*

Observation. En vertu de (38) et (41) le système d'invariants du théorème fondamental se réduit à un système formé par les fonctions g^i_{j2}, g^i_{3j}, $j = 1, 2$; $i = 0, 1, 2, 3$. Ces invariants sont de l'ordre 3 au plus.

Pour comparer le résultat obtenu avec celui de Fubini et Čech [2], nous utiliserons les équations fondamentales (I) et (III), ([2], p. 79, t. 1). Nous noterons avec $\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}$ les symboles de Christoffel de seconde espèce définis par le tenseur $a_{\alpha\beta}$ de la forme F_2 et par $B_{a_1 \ldots a_h, a}$ la dérivée covariante du tenseur $B_{a_1 \ldots a_h}$ construite à l'aide des symboles précédents. Enfin, nous utiliserons le tenseur $T^{\gamma}_{\alpha\beta} = \left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$. Avec ces notations pour les points (17) nous aurons

$$y_a = x_a - l_a x ,$$

$$y_{a_1a_2} = x_{a_1a_2} + (T^{\gamma}_{a_1a_2} - l_{a_1}\delta^{\gamma}_{a_2} - l_{a_2}\delta^{\gamma}_{a_1})\, x_{\gamma} - (l_{a_1a_2} + T^{\gamma}_{a_1a_2} l_{\gamma} - l_{a_1} l_{a_2})\, x .$$

En contractant ces relations avec les vecteurs e_1, e_2 on obtient les points z_1, z_2, z_{11}. En tenant compte des équations (I) de [2], p. 70, t. 1, la condition de normation absolue des coordonnées $(z, z_1, z_2, z_{11}) = \text{const.}$ devient

$$(z,\ z_1,\ z_2,\ z_{11}) = \begin{vmatrix} e^1_1 & e^2_1 \\ e^1_2 & e^2_2 \end{vmatrix} (x,\ x_1,\ x_2,\ X)\, a_{a_1a_2} e^{a_1}_1 e^{a_2}_1 = \text{const.}$$

En supposant cette condition satisfaite, nous aurons:

$$y_\alpha = x_\alpha ,$$

$$y_{\alpha_1\alpha_2} = x_{\alpha_1,\alpha_2} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} x_\gamma ,$$

(43)
$$y_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = x_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} x_{\gamma,\alpha_3} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_3} x_{\gamma,\alpha_2} + T^\gamma_{\alpha_2\alpha_3} x_{\alpha_1,\gamma} +$$
$$+ (T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3} + T^\beta_{\alpha_1\alpha_3} T^\gamma_{\beta\alpha_2} + T^\beta_{\alpha_2\alpha_3} T^\gamma_{\alpha_1\beta}) x_\gamma$$

où, de (I) ([2], p. 79, t. 1)

$$x_{\alpha_1,\alpha_2} = b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} x_\gamma + a_{\alpha_1\alpha_2} X + p_{\alpha_1\alpha_2} x ,$$

(44)
$$x_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = (b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3} + b^\beta_{\alpha_1\alpha_2} b^\gamma_{\beta\alpha_3} + a_{\alpha_1\alpha_2} a^{\gamma\beta} m_{\alpha_3\beta} + p_{\alpha_1\alpha_2} \delta^\gamma_{\alpha_3}) x_\gamma +$$
$$+ b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} a_{\gamma\alpha_3} X + (b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} p_{\gamma\alpha_3} + n_{\alpha_3} a_{\alpha_1\alpha_2} + p_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3}) x .$$

Ici nous avons utilisé l'équation (III) de [2], p. 81, t. 1 sous la forme $X_\alpha = n_\alpha x + a^{\beta\gamma} m_{\alpha\beta} x_\gamma$. En introduisant (44) dans (43), on obtient

$$y_\alpha = x_\alpha ,$$

$$y_{\alpha_1\alpha_2} = (b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2}) x_\gamma + a_{\alpha_1\alpha_2} X + p_{\alpha_1\alpha_2} x ,$$

(44')
$$y_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = (b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3} + b^\beta_{\alpha_1\alpha_2} b^\gamma_{\beta\alpha_3} + a_{\alpha_1\alpha_2} a^{\gamma\beta} m_{\alpha_3\beta} + p_{\alpha_1\alpha_2} \delta^\gamma_{\alpha_3} +$$
$$+ T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3} + T^\beta_{\alpha_1\alpha_3} T^\gamma_{\beta\alpha_2} + T^\beta_{\alpha_2\alpha_3} T^\gamma_{\alpha_1\beta} + T^\beta_{\alpha_1\alpha_2} b^\gamma_{\beta\alpha_3} + T^\beta_{\alpha_1\alpha_3} b^\gamma_{\alpha_2\beta}) x_\gamma +$$
$$+ (T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} a_{\gamma\alpha_3} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_3} a_{\gamma\alpha_2} + T^\gamma_{\alpha_2\alpha_3} a_{\alpha_1\gamma} + b^\gamma_{\alpha_1\alpha_3} a_{\gamma\alpha_2}) X +$$
$$+ (b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} p_{\gamma\alpha_3} + n_{\alpha_3} a_{\alpha_1\alpha_2} + p_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} p_{\gamma\alpha_3} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_3} p_{\gamma\alpha_2} + T^\gamma_{\alpha_2\alpha_3} p_{\alpha_1\gamma}) x .$$

On considère à présent les relations

$$A_0 = x , \quad A_j = y_\alpha e^\alpha_j , \quad A_3 = y_{\alpha_1\alpha_2} e^{\alpha_1}_1 e^{\alpha_2}_1$$

et

$$dA_0 = y_\alpha e^\alpha_a \omega^a , \; dA_j = y_{\alpha_1\alpha_2} e^{\alpha_1}_j e^{\alpha_2}_a \omega^a , \; dA_3 = y_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} e^{\alpha_1}_1 e^{\alpha_2}_1 e^{\alpha_3}_a \omega^a$$

En utilisant les relations (44') et en les substituant dans le système (23) on obtient :

$$g^0_{j2} = \frac{1}{F_2(e_1)} \begin{vmatrix} P(e_j, e_2) & P(e_1) \\ F_2(e_j, e_2) & F_2(e_1) \end{vmatrix} , \qquad g^3_{j2} = \frac{F_2(e_j, e_2)}{F_2(e_1)} ,$$

$$g^1_{j2} = [e^{\alpha_1}_j e^{\alpha_2}_1 F_2(e_1) - e^{\alpha_1}_1 e^{\alpha_2}_1 F_2(e_j, e_2)] \begin{pmatrix} F_2(e_1) & \begin{matrix} e^1_1 e^2_1 \\ e^1_2 e^2_2 \end{matrix} \end{pmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} b^1_{\alpha_1\alpha_2} + T^1_{\alpha_1\alpha_2} e^1_2 \\ b^2_{\alpha_1\alpha_2} + T^2_{\alpha_1\alpha_2} e^2_2 \end{vmatrix} ,$$

$$g^2_{j2} = -[e^{\alpha_1}_j e^{\alpha_2}_1 F_2(e_1) - e^{\alpha_1}_1 e^{\alpha_2}_1 F_2(e_j, e_2)] \begin{pmatrix} F_2(e_1) & \begin{matrix} e^1_1 e^2_1 \\ e^1_2 e^2_2 \end{matrix} \end{pmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} b^1_{\alpha_1\alpha_2} + T^1_{\alpha_1\alpha_2} e^1_1 \\ b^2_{\alpha_1\alpha_2} + T^2_{\alpha_1\alpha_2} e^2_1 \end{vmatrix} ,$$

$$g^3_{3j} = (F_2(e_1))^{-1} (T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} a_{\gamma\alpha_3} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_3} a_{\gamma\alpha_2} + T^\gamma_{\alpha_2\alpha_3} a_{\gamma\alpha_1} + b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} a_{\gamma\alpha_3}) e^{\alpha_1}_1 e^{\alpha_2}_1 e^{\alpha_3}_j$$

$$g^0_{3j} = (b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} p_{\gamma\alpha_3} + n_{\alpha_3} a_{\alpha_1\alpha_2} + p_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} p_{\gamma\alpha_3} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_3} p_{\gamma\alpha_2} +$$
$$+ T^\gamma_{\alpha_2\alpha_3} p_{\alpha_1\gamma}) e^{\alpha_1}_1 e^{\alpha_2}_1 e^{\alpha_3}_j - g^3_{3j} P(e_1) ,$$

$$(b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3} + b^\beta_{\alpha_1\alpha_2} b^\gamma_{\beta\alpha_3} + a_{\alpha_1\alpha_2} a^{\gamma\beta} m_{\alpha_3\beta} + p_{\alpha_1\alpha_2} \delta^\gamma_{\alpha_3} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3} + T^\beta_{\alpha_1\alpha_2} T^\gamma_{\beta\alpha_3} +$$
$$+ T^\beta_{\alpha_2\alpha_3} T^\gamma_{\alpha_1\beta} + T^\beta_{\alpha_1\alpha_2} b^\gamma_{\beta\alpha_3} + T^\beta_{\alpha_1\alpha_3} b^\gamma_{\beta\alpha_2} + T^\beta_{\alpha_2\alpha_3} b^\gamma_{\alpha_1\beta}) e^{\alpha_1}_1 e^{\alpha_2}_1 e^{\alpha_3}_j -$$
$$- g^3_{3j} (b^\gamma_{\alpha_1\alpha_2} + T^\gamma_{\alpha_1\alpha_2}) e^{\alpha_1}_1 e^{\alpha_2}_1 = g^1_{3j} e^\gamma_1 + g^2_{3j} e^\gamma_2 ,$$
$$j = 1, 2; \; \gamma = 1, 2.$$

En utilisant les cartes locales Φ_0, on peut voir que le système constitué par les formes pfaffiennes ω^a et les invariants g^i_{j2}, g^i_{3j}, $j = 1, 2$; $i = 0, 1, 2, 3$ est équivalent au système constitué par les formes fondamentales de Fubini F_2, F_3, Ω ([2], t. 1, p. 83) et les formes pfaffiennes ω^a. En effet, dans les cartes locales Φ_0, en vertu des relations (10) nous aurons

(44'')

a) $$g^0_{j2} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} p_{j2} & p_{11} \\ a_{j2} & a_{11} \end{vmatrix} , \qquad \text{b)} \; g^3_{j2} = \frac{a_{j2}}{a_{11}} ,$$

c) $$g^\gamma_{j2} = \frac{1}{a_{11}} [(b^\gamma_{j2} + T^\gamma_{j2}) a_{11} - (b^\gamma_{11} + T^\gamma_{11}) a_{j2}] ,$$

d) $$g^2_{3j} = \frac{1}{a_{11}} [T^\beta_{11} a_{\beta j} + 2 T^\beta_{1j} a_{\beta 1} + b^\beta_{11} a_{\beta j}] ,$$

e) $$g^0_{3j} = b^\beta_{11} p_{\beta j} + n_j a_{11} + p_{11,j} + T^\beta_{11} p_{\beta j} + T^\beta_{1j} p_{\beta 1} +$$
$$+ T^\beta_{1j} p_{1\beta} - \frac{p_{11}}{a_{11}} (T^\beta_{11} a_{\beta j} + 2 T^\beta_{1j} a_{\beta 1} + b^\beta_{11} a_{\beta j}) ,$$

f) $$g^\gamma_{3j} = b^\gamma_{11,j} + b^\beta_{11} b^\gamma_{\beta j} + a_{11} a^{\gamma\beta} m_{j\beta} + p_{11} \delta^\gamma_j + T^\gamma_{11,j} + T^\beta_{11} T^\gamma_{\beta j} +$$
$$+ T^\beta_{1j} T^\gamma_{1\beta} + T^\beta_{11} b^\gamma_{\beta j} + 2 T^\beta_{1j} b^\gamma_{\beta 1} -$$
$$- \frac{1}{a_{11}} (b^\gamma_{11} + T^\gamma_{11}) (T^\beta_{11} a_{\beta j} + 2 T^\beta_{1j} a_{\beta 1} + a_{\beta j} b^\beta_{11}) ,$$

Ces relations nous montrent que dans les cartes locales Φ_0 les formes F_2, F_3, Q déterminent de manière unique les invariants g^1_{ia} (dans les cartes Φ_0 nous avons $T^\gamma_{\alpha\beta} = \{^{\gamma}_{\alpha\beta}\}$). Mais à l'aide des relations (44″), en supposant donnés les invariants g^i_{j2}, g^i_{3j}, $j = 1, 2$; $i = 0, 1, 2, 3$ on peut calculer tous les coefficients des F_2, F_3, Q. Ainsi les relations (44″; b) nous donnent

$$a_{11} = \varrho \neq 0, \quad a_{12} = \varrho g^3_{12}, \quad a_{22} = \varrho g^3_{22}.$$

De (44″: a) on obtient

$$p_{11} = \tau, \quad p_{12} = g^0_{12} + \tau g^3_{12}, \quad p_{22} = g^0_{22} + \tau g^3_{22}.$$

Les relations (44″: c, d) nous permettent de calculer les valeurs de $b^\alpha_{\beta\gamma}$, les relations (44″: e) nous donnent les valeurs de n_α et les relations (44″: f) nous donnent les valeurs de $m_{\alpha\beta}$. Les conditions de normation absolue (42) nous permettent de déterminer le facteur ϱ un facteur constant près et les conditions d'intégrabilité nous permettent de trouver la valeur de τ.

On a établi de cette manière que les systèmes d'invariants ω^a, g^i_{j2}, g^i_{3j}, ($j = 1, 2$; $i = 0, 1, 2, 3$; $a = 1, 2$) *et* F_2, F_3, Q, ω^a, $a = 1, 2$ *sont deux systèmes équivalents.*

b) *Les surfaces de l'espace euclidien à 3 dimensions.* Soit E_3 l'espace euclidien à 3 dimensions. Les repères préférentiels de E_3 seront les repères cartésiens orthogonaux. Étant donné que l'espace E_3 est subordonné à l'espace affine, le système de conditions Ω (p. 160) déterminera à partir de chaque repère affine, un repère cartésien orthogonal unique. Si le repère affine est $R(x, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ alors à l'aide du point x et des vecteurs $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ nous définirons un repère orthogonal unique $R(x, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$ par les conditions:

$$(45) \qquad \bar{r} = \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|}, \quad \bar{r}_2 = \frac{-(\bar{v}_1\bar{v}_2)\,\bar{v}_1 + \bar{v}_1^2\,\bar{v}_2}{|\bar{v}_1|\,|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2|}, \quad \bar{r}_3 = \bar{r}_1 \times \bar{r}_2 = \frac{\bar{v}_1 \times \bar{v}_2}{|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2|}.$$

Les relations (45) constituent le système Ω et évidemment celui-ci est géométrique (voir p. 160).

Supposons que l'espace E_3 est rapporté à un repère cartésien orthogonal; le système de coordonnées non-homogènes obtenu sera noté par χ_0. En χ_0 les transformations du groupe fondamental sont représentées par les relations

$$(46) \qquad x'^i = a^i_j x^j + C^i, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

où la matrice $\|a^i_j\|$ est orthogonale.

Soit S une surface arbitraire de E_3. Une carte locale de cette surface sera définie par les relations

$$(47) \qquad \bar{x} = \bar{x}(u^1, u^2).$$

On suppose que les conditions **A**, **B′** sont satisfaites.

On notera par φ_0 une carte locale donnée de S. On considérera les champs vectoriels e_a, $a = 1, 2$ (11) définis à l'aide de la carte φ_0. L'analogue du système (22) dans ce cas est le système

$$(48) \qquad \bar{x}, \quad \bar{v}_1 = \bar{x}_a e^a_1, \quad \bar{v}_2 = \bar{x}_a e^a_2.$$

En utilisant les conditions Ω, à l'aide du système (48) on définira un repère cartésien orthogonal $R(\bar{x}; \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$ attaché au point $\bar{x}$. Dans ce cas $g = 1$. En vertu de la condition **B′** (p. 163) nous avons $\bar{v}_1 \neq 0$, $|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2| \neq 0$.

La surface S a été normalisée à l'aide des cartes locales Φ_0 (ce sont les cartes locales obtenues de φ_0 par la transformation $u'^a = u^a + c^a$). Nous traduirons dans ce cas le théorème fondamental établi dans cette Note et nous comparerons les résultats trouvés avec les résultats classiques que l'on obtient en utilisant les formes fondamentales de Gauss.

Les équations différentielles fondamentales sont dans ce cas

$$(49) \qquad d\bar{x} = \omega^i_0 \bar{r}_i, \quad d\bar{r}_j = \omega^i_j \bar{r}_i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

En utilisant les pfaffiens $\omega^a = e^i_a\, du^a$ on obtiendra

$$(50) \qquad \omega^i_0 = g^i_{0a}\,\omega^a, \quad \omega^i_j = g^i_{ja}\,\omega^a.$$

Les conditions de complète intégrabilité du système (49) (les analogues de 34: $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$) sont

$$(51) \qquad D\omega^a = 0, \quad [dg^i_{ka}, \omega^a] + g^j_{ka}\, g^i_{jb}\, [\omega^a, \omega^b] = 0.$$
$$a = 1, 2; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Les conditions qui nous assurent que le repère $R(\bar{x}; \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$, solution de (49), est un repère orthogonal, donc les analogues de (34: $\mathbf{C}_3$), sont

$$(52) \qquad \omega^i_i = 0, \quad \omega^i_j + \omega^j_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

ou, sous forme équivalente

$$(52') \qquad g^i_{ia} = 0, \quad g^i_{ja} + g^j_{ia} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Soit $R(\bar{x}; \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$ un repère cartésien orthogonal, solution du système (49). Les analogues des relations (29) sont

$$(53) \qquad \bar{x} = \bar{x}, \quad \bar{v}_1 = a^i_1 \bar{r}_i, \quad \bar{v}_2 = a^i_2 \bar{r}_i.$$

Les conditions pour que le repère cartésien orthogonal défini par les éléments (53) à l'aide du système Ω (45), soit précisément le repère donné $R(\bar{x}; \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$, sont

$$(54)\qquad \begin{aligned} &a_1^1 > 0, \quad a_1^2 = a_1^3 = 0, \\ &a_2^2 > 0, \quad a_2^3 = 0. \end{aligned}$$

Ce sont les analogues de (34 : $\mathbf{C}_4$).

Les conditions qui nous assurent que les éléments (53) satisferont à la relation

$$(55)\qquad d\bar{x} = \bar{v}_a \omega^a$$

(les analogues de (28)) sont

$$(56)\qquad g_{0a}^i = a_a^i, \quad a = 1, 2: \quad i = 1, 2, 3.$$

Ces relations sont les analogues de (34 : $\mathbf{C}_5$).

Le théorème fondamental devient en ce cas:

La surface S est déterminée à une transformation du groupe orthogonal près, par les pfaffiens ω^1, ω^2 et les fonctions a_1^i, a_2^i, g_{ka}^i, $i = 1, 2, 3$; $k = 0, 1, 2, 3$; $a = 1, 2$, fonctions analytiques en u^1, u^2, satisfaisant aux conditions (51), (52′), (54), (56). *La surface S est normalisée à l'aide des cartes locales définies par les relations $\omega^1 = du'^1$, $\omega^2 = du'^2$.*

Remarque. Dans ce cas particulier la condition **C** est superflue, les dérivées de premier ordre de $\bar{x}$ étant suffisantes pour déterminer, grâce au système de conditions Ω (45), le repère normalisateur. La nécessité de considérer le vecteur normalisateur l_a disparaît dans ce cas. Les invariants a_1^i, a_2^i, g_{ka}^i ont l'ordre $\leqq 2$.

Nous démontrerons à présent que le système d'invariants de la surface S considéré dans le théorème énoncé ci-dessus est équivalent au système constitué par les formes fondamentales de Gauss et les formes pfaffiennes ω^a, $a = 1, 2$.

En notant les formes fondamentales de la surface S par $\Phi = d\bar{x}^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\beta$ et $\Psi = L_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta$, les relations (48), (45) et (53) nous donnent:

$$(47)\qquad \begin{aligned} &a_1^1 = \sqrt{\Phi(e_1)}, \quad a_2^1 = (\Phi(e_1))^{-1/2}\, \Phi(e_1, e_2), \\ &a_2^2 = (\Phi(e_1))^{-1/2} \sqrt{\Phi(e_1)\Phi(e_2) - \Phi^2(e_1, e_2)} \end{aligned}$$

En notant avec $\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}$ les symboles de Christoffel de seconde espèce définis par le tenseur g_{ij}, par $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ la connexion affine sans torsion et courbure qui conserve dans le transport parallèle les champs e_a et $T_{\beta\gamma}^\alpha = \left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ alors les relations

$$\bar{r}_2\, d\bar{r}_1 = \omega_1^2, \quad \bar{r}_3\, d\bar{r}_1 = \omega_1^3, \quad \bar{r}_3\, d\bar{r}_3 = \omega_2^3$$

et les relations (45) et (47), à l'aide de

$$d\bar{v}_1 = d(\bar{x}_\alpha e_1^\alpha) = \bar{x}_{\alpha/\beta}\, e_1^\alpha du^\beta, \quad d\bar{v}_2 = d(\bar{x}_\alpha e_2^\alpha) = x_{\alpha/\beta}\, e_2^\alpha du^\beta,$$

nous permettent d'obtenir les relations

$$\omega_1^2 = \frac{-\Phi(e_1, e_2)\, e_1^\mu + \Phi(e_1)\, e_2^\mu}{\Phi(e_1)\sqrt{\Phi(e_1)\Phi(e_2) - \Phi^2(e_1, e_2)}}\, T_{\alpha\beta}^\gamma\, g_{\gamma\mu}\, e_1^\alpha e_a^\beta \omega^a,$$

$$(58)\qquad \omega_1^3 = \frac{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\; L_{\alpha\beta}\, e_1^\alpha e_a^\beta \omega^a}{\sqrt{\Phi(e_1)}\sqrt{\Phi(e_1)\Phi(e_2) - \Phi^2(e_1, e_2)}} \begin{vmatrix} e_1^1 & e_1^2 \\ e_2^1 & e_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\omega_2^3 = \frac{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\; L_{\alpha\beta}\, e_a^\beta \omega^a \left[-\Phi(e_1, e_2)\, e_1^\alpha + \Phi(e_2)\, e_2^\alpha \right]}{\sqrt{\Phi(e_1)}\left(\Phi(e_1)\Phi(e_2) - \Phi(e_1, e_2)^2\right)}$$

Les relations (57) et (58) nous montrent que les formes fondamentales Φ, Ψ et les formes pfaffiennes ω^a $(a = 1, 2)$ déterminent de manière unique les formes pfaffiennes ω^a et les invariants a_1^i, a_2^i, g_{ka}^i du théorème fondamental (p. 180).

Dans la carte locale φ_0 nous aurons

$$a_1^1 = \sqrt{g_{11}}, \quad a_2^1 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}, \quad a_2^2 = \frac{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}{\sqrt{g_{11}}},$$

$$g_{1a}^3 = \frac{L_{1a}}{\sqrt{g_{11}}}, \quad g_{2a}^3 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}\left(-L_{1a} g_{12} + L_{2a} g_{11}^2\right).$$

Ces relations nous montrent que les systèmes d'invariants $\omega^a, a_1^1, a_2^1, a_2^2, g_{1a}^2, g_{1a}^3, g_{2a}^3$, $a = 1, 2$ et Φ, Ψ, ω^a, $a = 1, 2$ sont équivalents.

En choisissant comme carte locale φ_0 les cartes locales dont les lignes paramétriques sont les lignes de courbure, ou les lignes asymptotiques, on obtient immédiatement les systèmes d'invariants classiques de la surface S.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Favard — *Cours de géométrie différentielle locale.* Paris, 1957 (Edition russe, Moscou, 1960).
2. G. Fubini et E. Čech — *Geometria proiettiva differenziale.* Bologna, 1926.
3. А. П. Норден — *Пространства аффинной связности.* Москва 1950.
4. Dan I. Papuc — *Sur la théorie des variétés des espaces Kleinéens à groupe linéaire complètement reductible.* C. R. Ac. Sci. Paris, t. 257, p. 589–591.
5. Dan I. Papuc — *Sur les variétés différentiables plongées dans un espace Klein à groupe linéaire complètement reductible.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I. t. IX. 1963, f. 2, p. 423–436.

O NOUĂ METODĂ ÎN TEORIA VARIETĂŢILOR UNUI SPAŢIU OMOGEN CU GRUP LINIAR

Rezumat

Se indică o metodă directă care permite stabilirea unei teoreme locale de existenţă şi unicitate pentru o varietate scufundată într-un spaţiu $K(S_n, G)$ (un spaţiu Klein subordonat, în sensul programului de la Erlangen, spaţiului proiectiv).

Se consideră o varietate $V_m^n \subset K(S_n, G)$ dotată cu un sistem de m diferenţiale totale exacte, $\omega^a = e_\alpha^a du^\alpha = df^a$, $a = 1, \ldots, m$, liniar independente, sau echivalent, dotată cu o clasă, notată cu Φ_0, de hărţi locale obţinute una din alta prin translaţii efectuate asupra parametrilor. Cu ajutorul cîmpurilor de vectori e^a, $a = 1, \ldots, m$, se defineşte o conexiune afină, fără curbură şi torsiune (conexiunea ce păstrează în paralelism cîmpurile de vectori e^a) şi un vector normalizator. Aceste elemente permit construirea unui cîmp local de repere, ataşat în mod invariant varietăţii. Se spune că varietatea V_m^n a fost normalizată cu ajutorul hărţilor locale Φ_0. Pentru varietatea normalizată se demonstrează o teoremă locală de existenţă şi unicitate (p. 171). Teorema permite descrierea hărţilor cu ajutorul cărora am normalizat varietatea considerată.

Ca exemple sînt considerate cazurile clasice ale suprafeţelor spaţiului proiectiv şi euclidian cu 3 dimensiuni.

НОВЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С ЛИНЕЙНОЙ ГРУППОЙ

Краткое содержание

Предлагается прямой метод позволяющий вывести локальную теорему существования и единства для многообразия вложенного в пространство $K(S_n, G)$ (пространство Клейна подчиненое проективному пространству в смысле программы из Ерлангена).

Учитывается многообразие $V_m^n \subset K(S_n, G)$ оснащенное системой m общих точных линейно независимых дифференциалов $\omega^a = e_\alpha^a du^\alpha = df^a$, $a = 1, \ldots, m$. Оно же равносильно при оснащении одним классом локальных карт, полученных одна из другой произведенной над параметрами трансляцией, отмеченным Φ_0. При помощи векторных полей e^a, $a = 1, \ldots, m$, определяется аффинная связность без кривизны и кручения (связность сохраняющая в параллелизме векторные поля e^a) и один вектор-нормализатор. Эти элементы позволяют построение локального поля реперов, прикрепленного инвариантно многообразию. Многообразие V_m^n было нормализовано при помощи локальных карт Φ_0. Для нормализованного многообразия демонстрируется локальная теорема существования и единства. Это теорема позволяет распознавать локальные карты, при помощи которых было нормализовано учтенное многообразие.

Как примеры приведены классические случаи поверхностей, трехмерные проективное и эвклидового пространства.

DESPRE CONEXIUNILE AFINE ALE UNUI SPAŢIU OMOGEN

DE

GHEORGHE GHEORGHIEV

În lucrare se aplică G-structurile, introduse de S. Chern, la determinarea conexiunilor afine ale unui spaţiu omogen.

1. Fie un grup Lie abstract G_r, avînd r parametri, dat prin formele Pfaff stîng invariante ω^a $(a = 1 \ldots r)$, şi un subgrup Lie, al acestuia, determinat prin ecuaţiile sale de definiţie

$$\omega^i = 0, \qquad i = 1 \ldots n. \tag{1}$$

Acest subgrup se va nota cu H_{r-n} (de $r - n$ parametri); se presupune că H_{r-n} nu conţine vreun subgrup invariant al lui G_r.

Ecuaţiile de structură ale grupului G_r vor fi

$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \tag{2}$$

în care $C^\alpha_{\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1 \ldots r)$ sînt constantele de structură ale lui G_r; se ştie că ele verifică relaţiile

$$C^\alpha_{(\beta\gamma)} = 0, \qquad C^\alpha_{\beta|\lambda} C^\beta_{\mu\nu|} = 0. \tag{3}$$

Fie x^i $(i = 1 \ldots n)$ un sistem de integrale prime independente ale sistemului de ecuaţii Pfaff (1), pe care le vom alege drept primii n parametri ce acţionează în spaţiul parametrilor grupului G_r, restul notîndu-se prin u^a $(a = n + 1 \ldots r)$; x^i se vor numi parametri principali, iar u^a parametri secundari. În general primele n forme stîng invariante ω^i vor fi atunci $\omega^i(x, u; dx)$, iar restul formelor invariante ω^a vor fi: $\omega^a(x, u; dx, du)$.

Sistemul de ecuaţii (1) va determina un subgrup H_{r-n} atunci şi numai atunci cînd o parte din constantele de structură satisfac relaţiile