Se consideră o varietate $V_m^n \subset K(S_n, G)$ dotată cu un sistem de $m$ diferenţiale totale exacte, $\omega^a = e_\alpha^a du^\alpha = df^a$, $a = 1, \ldots, m$, liniar independente, sau echivalent, dotată cu o clasă, notată cu $\Phi_0$, de hărţi locale obţinute una din alta prin translaţii efectuate asupra parametrilor. Cu ajutorul cîmpurilor de vectori $e^a$, $a = 1, \ldots, m$, se defineşte o conexiune afină, fără curbură şi torsiune (conexiunea ce păstrează în paralelism cîmpurile de vectori $e^a$) şi un vector normalizator. Aceste elemente permit construirea unui cîmp local de repere, ataşat în mod invariant varietăţii. Se spune că varietatea $V_m^n$ a fost normalizată cu ajutorul hărţilor locale $\Phi_0$. Pentru varietatea normalizată se demonstrează o teoremă locală de existenţă şi unicitate (p. 171). Teorema permite descrierea hărţilor cu ajutorul cărora am normalizat varietatea considerată.

Ca exemple sînt considerate cazurile clasice ale suprafeţelor spaţiului proiectiv şi euclidian cu 3 dimensiuni.

## НОВЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ МНОГООБРАЗИЙ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С ЛИНЕЙНОЙ ГРУППОЙ


Краткое содержание

Предлагается прямой метод позволяющий вывести локальную теорему существования и единства для многообразия вложенного в пространство $K(S_n, G)$ (пространство Клейна подчиненое проективному пространству в смысле программы из Ерлангена).

Учитывается многообразие $V_m^n \subset K(S_n, G)$ оснащенное системой $m$ общих точных линейно независимых дифференциалов $\omega^a = e_\alpha^a du^\alpha = df^a$, $a = 1, \ldots, m$. Оно же равносильно при оснащении одним классом локальных карт, полученных одна из другой произведенной над параметрами трансляцией, отмеченным $\Phi_0$. При помощи векторных полей $e^a$, $a = 1, \ldots, m$, определяется аффинная связность без кривизны и кручения (связность сохраняющая в параллелизме векторные поля $e^a$) и один вектор-нормализатор. Эти элементы позволяют построение локального поля реперов, прикрепленного инвариантно многообразию. Многообразие $V_m^n$ было нормализовано при помощи локальных карт $\Phi_0$. Для нормализованного многообразия демонстрируется локальная теорема существования и единства. Это теорема позволяет распозновать локальные карты, при помощи которых было нормализовано учтенное многообразие.

Как примеры приведены классические случаи поверхностей, трехмерные проективное и эвклидового пространства.


# DESPRE CONEXIUNILE AFINE ALE UNUI SPAŢIU OMOGEN


DE

GHEORGHE GHEORGHIEV


În lucrare se aplică $G$-structurile, introduse de S. Chern, la determinarea conexiunilor afine ale unui spaţiu omogen.

**1.** Fie un grup Lie abstract $G_r$, avînd $r$ parametri, dat prin formele Pfaff stîng invariante $\omega^a$ $(a = 1 \ldots r)$, şi un subgrup Lie, al acestuia, determinat prin ecuaţiile sale de definiţie

$$\omega^i = 0, \qquad i = 1 \ldots n. \tag{1}$$

Acest subgrup se va nota cu $H_{r-n}$ (de $r - n$ parametri); se presupune că $H_{r-n}$ nu conţine vreun subgrup invariant al lui $G_r$.

Ecuaţiile de structură ale grupului $G_r$ vor fi

$$d\omega^a = \frac{1}{2} C^a_{\beta\gamma}\, \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \tag{2}$$

în care $C^a_{\beta\gamma}$ $(a, \beta, \gamma = 1 \ldots r)$ sînt constantele de structură ale lui $G_r$; se ştie că ele verifică relaţiile

$$C^a_{(\beta\gamma)} = 0, \qquad C^a_{\beta|\lambda} C^\beta_{\mu\nu|} = 0. \tag{3}$$

Fie $x^i$ $(i = 1 \ldots n)$ un sistem de integrale prime independente ale sistemului de ecuaţii Pfaff (1), pe care le vom alege drept primii $n$ parametri ce acţionează în spaţiul parametrilor grupului $G_r$, restul notîndu-se prin $u^a$ $(a = n + 1 \ldots r)$; $x^i$ se vor numi parametri principali, iar $u^a$ parametri secundari. În general primele $n$ forme stîng invariante $\omega^i$ vor fi atunci $\omega^i(x, u; dx)$, iar restul formelor invariante $\omega^a$ vor fi: $\omega^a(x, u; dx, du)$.

Sistemul de ecuaţii (1) va determina un subgrup $H_{r-n}$ atunci şi numai atunci cînd o parte din constantele de structură satisfac relaţiile

(4) $$C^i_{ab} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad a, b = n+1, \ldots r;$$

ca o consecinţă a condiţiilor (4) urmează imediat că

(5) $$d\bar{\omega}^a = \frac{1}{2} C^a_{bd}\, \bar{\omega}^b \wedge \bar{\omega}^d, \text{ cu}$$

(6) $$\bar{\omega}^a = \omega^a \pmod{\omega^i}$$

şi că

(7) $$C^a_{(bd)} = 0, \qquad C^a_{b[c} C^e_{d]e} = 0, \qquad a, b, c, d, e = n+1, \ldots, r.$$

Aici $\bar{\omega}^a(x, u;\, du)$, determinate prin relaţiile (6) sînt formele stîng invariante ale subgrupului $H_{r-n}$, (5) sînt ecuaţiile de structură ale lui $H_{r-n}$, iar (7) exprimă condiţiile teoremei a III-a fundamentale a lui S. Lie pentru acest subgrup.

Ecuaţiile de structură (2) ale grupului $G_r$ se vor mai putea scrie atunci

($8_1$) $$d\omega^i = C^i_{ja}\, \omega^j \wedge \omega^a + \frac{1}{2} C^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k, \qquad i, j, h, k = 1, \ldots, n,$$

($8_2$) $$d\omega^a = \frac{1}{2} C^a_{bd}\, \omega^b \wedge \omega^d + C^a_{bi}\, \omega^b \wedge \omega^i + \frac{1}{2} C^a_{hk}\, \omega^h \wedge \omega^k$$
$$a, b, c, d, e, f = n+1, \ldots, r.$$

În fine reamintim că într-un punct $p(x, u)$ al spaţiului $G_r$, $\omega^i$, $\omega^a$ reprezintă un coreper stîng invariant ($G_r$ fiind o varietate cu paralelism absolut); în punctul unitate $e(x_0, u_0)$, spaţiul liniar $E'_r$ tangent la $G_r$ în $e$, dual cu acel al formelor $\omega^a$ în $e$ este spaţiul algebrei Lie $G'_r$ a grupului $G_r$. Subgrupul $H_{r-n}$ este o varietate analitică $r-n$-dimensională integrală a sistemului (1), care trece prin $e$, $\bar{\omega}^a$ în orice punct al ei determină un coreper din spaţiul dual tangent la această varietate; în punctul $e$ spaţiul tangent la varietatea $H_{r-n}$ este spaţiul suport al subalgebrei $H'_{r-n}$ a algebrei $G'_r$.

**2.** Se consideră spaţiul omogen $n$-dimensional cu grup fundamental $G_r$, al cărui subgrup de stabilitate este $H_{r-n}$; se presupune că acest spaţiu este o varietate analitică $V^n$ generată de punctele $x(x^i)$, avînd o familie finită sau numărabilă de vecinătăţi $\{U\}$ de acoperire şi că $x \in U$, aparţine uneia din aceste vecinătăţi. Vom arăta că putem echipa $V^n$ cu o $G$-structură în sensul lui S. Chern [1], cu alte cuvinte vom construi efectiv spaţiul fibrat principal $B_\Gamma$, avînd drept bază spaţiul omogen $V^n$, iar drept grup de structură, grupul $\Gamma$, o anume realizare liniară a subgrupului de stabilitate $H_{r-n}$ în spaţiul liniar $E_n$ tangent la $V^n$ în $x$.

Să ne ocupăm întîi de realizarea liniară a lui $H_{r-n}$ despre care este vorba. Se consideră în $E_n$ tangent la $V^n$ în $x$, $r-n$ transformări infinitezimale definite de operatorii



(9) $$X_a f = C^i_{ja}\, x^j \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Vom vedea că ele determină o realizare liniară a lui $H_{r-n}$. În locul operatorilor (9), putem considera sistemul echivalent de ecuaţii Pfaff

(10) $$dx^i = -C^i_{ja}\, x^j \bar{\omega}^a.$$

Din teorema I fundamentală a lui S. Lie se ştie că sistemul (10) va determina o reprezentare a grupului $H_{r-n}$, dat de formele stîng invariante $\bar{\omega}^a$ $(a = n+1, \ldots, r)$, dacă acesta este complet integrabil; atunci reprezentarea va fi evident liniară şi omogenă.

În acest scop vom folosi criteriul lui Frobenius; diferenţiind exterior (10) avem

$$C^i_{ja}\, dx^j \wedge \bar{\omega}^a + C^i_{ja}\, x^j\, d\bar{\omega}^a.$$

Folosind (5) şi (10), această expresie devine

$$-C^i_{ja} C^j_{kb}\, x^k \bar{\omega}^b \wedge \bar{\omega}^a + C^i_{ja}\, x^j \frac{1}{2} C^a_{bc}\, \bar{\omega}^b \wedge \bar{\omega}^c;$$

făcînd uşoare modificări în notaţia indicilor de sumare vom obţine

(11) $$\frac{1}{2}\, x^k \bar{\omega}^b \wedge \bar{\omega}^c (C^i_{ka} C^a_{bc} - C^i_{jc} C^j_{kb} + C^i_{jb} C^j_{kc}).$$

Or, utilizînd (3) şi anume $C^i_{a[k} C^a_{bc]} = 0$ precum şi (4) se verifică uşor că (11) este identic nulă.

Se vede imediat că rezultatul obţinut se mai poate formula şi astfel: s-a realizat o reprezentare a subgrupului $H'_{r-n}$ (evident liniară) corespunzător lui $H_{r-n}$ din algebra Lie $G'_r$ într-un $n$-plan oarecare al ei $E'_n$, ce nu are elemente comune cu $r-n$-planul $H'_{r-n}$ (în afara originii).

Grupul de transformări astfel obţinut din $H_{r-n}$ ce acţionează în $E_n$ se va nota cu $\Gamma$; componentele relative ale reperului mobil al grupului $\Gamma$ vor fi atunci

(12) $$\bar{\omega}^i_j = C^i_{ja}\, \bar{\omega}^a.$$

Din cele $n^2$ forma Pfaff $\bar{\omega}^i_j$ vor fi evident cel mult $r-n$ independente.

Vom presupune pe viitor că matricea

(13) $$[C^i_{ja}] \quad \text{cu} \quad \begin{matrix} n^2 \text{ linii (după } i, j) \text{ şi} \\ r-n \text{ coloane (după } a) \end{matrix}$$

are rangul $r-n$, ceea ce impune ca $r \leq n(n+1)$.

**3.** O altă problemă ce se impune rezolvată în prealabil se referă la homeomorfismul ce se stabileşte între reperele (coreperele) din $E_n$ tangente în punctul $x$ cînd acesta aparţine la două vecinătăţi $U_\alpha \wedge U_\beta \neq 0$ ale familiei de acoperire a lui $V^n$.

În acest scop vom porni de la sistemul

$$\omega^a = \tilde{\omega}^a + \Gamma^a_i \omega^i \tag{14}$$

care se deduce imediat din (6). Coeficienţii $\Gamma^a_i$ se pot evident determina, deoarece atît grupul $G_r$ cît şi subgrupul său $H_{r-n}$ sînt date prin formele sale stîng invariante $\omega^i$, $\omega^a$ ce verifică (8) şi respectiv prin $\tilde{\omega}^a$, ce verifică (5); putem deci determina pe $\Gamma^a_i(x, u)$. În acest scop se diferenţiază exterior (14):

$$d\omega^a = d\tilde{\omega}^a + d\Gamma^a_i \wedge \omega^i + \Gamma^a_i d\omega^i$$

care, în virtutea ecuaţiilor de structură (5) şi (8), în urma unor calcule ce nu le reproducem, devine

$$\Pi^a_k \wedge \omega^k = 0, \tag{15}$$

unde

$$\begin{aligned} \Pi^a_k = d\Gamma^a_k &+ \omega^b(-C^a_{bk} + C^a_{db}\Gamma^d_k - \Gamma^a_h C^h_{kb}) + \\ &+ \omega^h(-C^a_{hk} + C^a_{bc}\Gamma^b_h \Gamma^c_k + \Gamma^a_i C^i_{hk}). \end{aligned} \tag{16}$$

Din (15), în baza lemei lui Cartan, urmează imediat

$$\Pi^a_k = \Gamma^a_{kl}\omega^l, \text{ cu } \Gamma^a_{kl} = \Gamma^a_{lk} \text{ funcţii arbitrare de } x^i, u^a. \tag{17}$$

Sistemul (17) este complet integrabil şi ne furnizează soluţii $\Gamma^a_i(x, u)$.

Ţinîndu-se seamă că atît $G_r$ cît şi $H_{r-n}$ sînt date prin formele lor stîng invariante, putem dovedi uşor că există soluţia $\Gamma^a_i(x)$, care nu depinde de parametri secundari. În adevăr, pentru $\omega^i = 0$ avem $\omega^b = \tilde{\omega}^b$ şi dacă se notează în acest caz $d\Gamma^a_i = \delta\Gamma^a_i$, din (17) rezultă imediat

$$\delta\Gamma^a_k + \tilde{\omega}^b(-C^a_{bk} + C^a_{dc}\Gamma^d_k - \Gamma^a_h C^h_{kb}) = 0. \tag{17'}$$

Sistemul (17') fiind evident complet integrabil ne dă o nouă realizare liniară a grupului $H_{r-n}$ în spaţiul afin (în general neomogen) $E_{n(r-n)}$ al coeficienţilor $\Gamma^a_k$. Cu alte cuvinte, $(\Gamma^a_k)$ determină un obiect geometric liniar sau cvasitensor, relativ la $G_r$ şi $H_{r-n}$ [2].



Adaptînd la problema noastră cunoscutul procedeu al lui E. Cartan din teoria reperului mobil, vom da valori numerice convenabile la $r-n$ din $\Gamma^a_k$ astfel ca acestea să atragă anularea formelor Pfaff secundare $\tilde{\omega}^a(x, u, du)$ şi atunci restul coeficienţilor $\Gamma^a_k$ devin invarianţi. Cu alte cuvinte, putem determina valori pentru $\Gamma^a_k$ funcţiuni numai de punctul $x \in V^n$, toţi pfaffienii $\omega^a$ devenind principali. Aşadar putem avea soluţia

$$\omega^a(x, u;\, dx, du) = \tilde{\omega}^a(x, u;\, du) + \Gamma^a_i(x)\,\omega^i(x, u;\, dx).$$

**4.** În modul arătat în paragrafele precedente am reuşit să construim spaţiul fibrat $B_\Gamma$ de dimensiune $r$, tangent la spaţiul omogen $V^n$ (bază), fibra locală fiind formată din reperele spaţiului tangent $E_n$ la $V^n$ în $x$, $\Gamma$ din §2 fiind grupul său de structură; aici reprezentarea fibrei locale pe fibra tip este dată de sistemul complet integrabil

$$\omega^a = \tilde{\omega}^a \pmod{\omega^i}. \tag{6}$$

Formele $\omega^i$, definite în spaţiul fibrat $B_\Gamma$ sînt independente de alegerea vecinătăţilor $U \subset V^n$ ce conţin pe $x$. Ele verifică ecuaţiile de structură

$$d\omega^i = C^i_{ja}\,\omega^j \wedge \tilde{\omega}^a + \frac{1}{2} T^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k, \tag{18}$$

în care

$$T^i_{jk} = C^i_{jk} + C^i_{ja}\Gamma^a_k - C^i_{ka}\Gamma^a_j. \tag{19}$$

Conexiunea afină definită în $B_\Gamma$ este dată de

$$\tilde{\omega}^i_j = C^i_{ja}\,\tilde{\omega}^a. \tag{12'}$$

Tensorul de torsiune al conexiunii afine este dat de (19), de unde se vede că torsiunea în cazul nostru este un invariant al spaţiului omogen $V^n$.

Să demonstrăm că curbura conexiunii afine este nulă. În adevăr, diferenţiind exterior (12) avem

$$d\tilde{\omega}^i_j = \frac{1}{2} C^i_{ja} C^a_{bc}\,\tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^c.$$

Cum

$$\tilde{\omega}^i_h \wedge \tilde{\omega}^h_j = C^i_{hb} C^h_{jc}\,\tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^c = \frac{1}{2}(C^i_{hb} C^h_{jc} - C^i_{hc} C^h_{jb})\,\tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^c,$$

adunînd membru cu membru ultimele două şiruri de relaţii se obţine

$$d\tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^i_h \wedge \tilde{\omega}^h_j = \frac{1}{2}(C^i_{ja} C^a_{bc} + C^i_{hb} C^h_{jc} - C^i_{hc} C^h_{jb})\,\tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^c. \tag{20}$$

Or, utilizînd (4) şi (3) pentru cazul $C^i_{a|j} C^a_{bc|} = 0$, se verifică imediat că paranteza din membrul al doilea din (20) este identic nulă. Aşadar

(21) $$d\tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^i_h \wedge \tilde{\omega}^h_j = 0,$$

ceea ce dovedeşte că tensorul de curbură al conexiunii afine determinate este nul. Ecuaţiile de structură ale acestei conexiuni afine sînt date de (18) şi (21).

Pentru a determina întreaga familie de conexiuni afine cu care putem echipa spaţiul nostru omogen, vom efectua substituţia

(22) $$\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^a + \tilde{\Gamma}^a_j \omega^j$$

analogă cu (14), care evident nu modifică forma ecuaţiilor de structură (18); ele devin

(18') $$d\omega^i = C^i_{ja}\, \omega^j \wedge \tilde{\omega}^a + \frac{1}{2}\, \tilde{T}^i_{jk}\, \omega^j \wedge \omega^k,$$

în care

(19') $$\tilde{T}^i_{jk} = T^i_{jk} + C^i_{ja}\, \tilde{\Gamma}^a_k - C^i_{ka}\, \tilde{\Gamma}^a_j.$$

Vom avea noi conexiuni afine date de

(23) $$\tilde{\omega}^i_j = C^i_{ja}\, \tilde{\omega}^a + C^i_{ja}\, \tilde{\Gamma}^a_k\, \omega^k = \tilde{\omega}^i_j + \omega^i_j,$$

în care $\tilde{\omega}^i_j$ este dat de (12), iar $\omega^i_j = C^i_{ja}\, \tilde{\Gamma}^a_k\, \omega^k$, dacă [3]

(24) $$d\tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^i_h \wedge \tilde{\omega}^h_j = \frac{1}{2}\, R^i_{jkl}(x, u)\, \omega^k \wedge \omega^l.$$

Vom căuta aşadar soluţii pentru $\tilde{\Gamma}^a_i(x, u)$ care să verifice (24). Diferenţiind exterior (23), efectuîndu-se calcul similar cu cel de mai sus şi ţinîndu-se seamă de (18) şi de (21) se ajunge la

(25) $$\tilde{\Omega}^i_j = d\tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^i_h \wedge \tilde{\omega}^h_j = \{C^i_{ja}\, d\tilde{\Gamma}^a_m + [C^i_{ja}\, \tilde{\Gamma}^a_k\, C^k_{bm} + \tilde{\Gamma}^a_m (C^i_{ha}\, C^h_{bj} + C^i_{hb}\, C^h_{ja})]\, \tilde{\omega}^b + (C^i_{ja}\, \tilde{\Gamma}^a_k\, T^k_{lm} + C^i_{ha}\, \Gamma^a_l\, C^h_{jb}\, \tilde{\Gamma}^b_m)\, \omega^l\}_j \wedge \omega^m.$$

Or, deoarece $C^i_{a[a}\, C^a_{bj]} = 0$ şi $C^i_{ab} = 0$, rezultă că

(26) $$C^i_{ha}\, C^h_{bj} + C^i_{hb}\, C^h_{ja} = C^i_{jd}\, C^d_{ab}.$$

Folosind acum (26), (25) devine

(25') $$\tilde{\Omega}^i_j = \{C^i_{ja}\, [d\tilde{\Gamma}^a_m + (C^a_{db}\, \tilde{\Gamma}^d_m + \tilde{\Gamma}^a_k\, C^k_{bm})\, \tilde{\omega}^b] + (C^i_{ja}\, \tilde{\Gamma}^a_k\, T^k_{lm} + C^i_{ha}\, \tilde{\Gamma}^a_l\, C^h_{jb}\, \tilde{\Gamma}^b_m)\, \omega^l\} \wedge \omega^m.$$



Cum $\tilde{\Omega}^i_j = \frac{1}{2}\, R^i_{jlm}(x, u)\, \omega^l \wedge \omega^m$, din (25') rezultă că trebuie să avem $C^i_{ja}\, [\delta\tilde{\Gamma}^a_m + (C^a_{db}\, \tilde{\Gamma}^d_m + \tilde{\Gamma}^a_k\, C^k_{bm})\, \tilde{\omega}^b] = 0$. Or, în baza faptului că matricea (13) are rangul $r - n$, urmează imediat

(27) $$\delta\tilde{\Gamma}^a_m + (C^a_{db}\, \tilde{\Gamma}^d_m + \tilde{\Gamma}^a_k\, C^k_{bm})\, \tilde{\omega}^b = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega^i).$$

Sistemul (27) fiind complet integrabil, vom putea determina toate conexiunile afine (prin cunoaşterea soluţiilor $\tilde{\Gamma}^a_k(x, u)$) cu care putem echipa spaţiul fibrat $B_\Gamma$ al spaţiului omogen $V^n$. Din (27) se vede că am obţinut o nouă realizare liniară şi omogenă a subgrupului $H_{r-n}$ şi că $\{\tilde{\Gamma}^a_i\}$ sînt componentele unui obiect geometric-tensor [2].

Reunind rezultatele de pînă acum putem enunţa următoarea

T e o r e m ă. *Spaţiul fibrat $B_\Gamma$ tangent la spaţiul omogen $V^n$ cu grup de structură $\Gamma$ (o realizare determinată a subgrupului de stabilitate $H_{r-n}$) poate fi echipat cu o conexiune afină de curbură nulă şi de torsiune invariantă pe $V^n$ şi cu o infinitate de conexiuni afine locale determinate de (23), unde $\tilde{\Gamma}^a_i$ sînt soluţii ale sistemului complet integrabil (27).*

Această teoremă concretizează rezultatele obţinute de prof. W. S l e b o d z i n s k i [5, cap. IV, § 3] pentru o $G$-structură oarecare introdusă axiomatic.

5. Confruntînd (27) cu (17') rezultă imediat că

(28) $$\omega^i_j = C^i_{ja}\, \omega^a$$

va determina o conexiune afină numai dacă

(29) $$C^a_{bk} = 0.$$

Din $(8_2)$ urmează evident că dacă avem (29), atunci (28) determină o conexiune afină şi că ecuaţiile de structură în acest caz vor fi $(8_1)$ şi $(8_2)$ cu simplificarea ce rezultă din (29). Aşadar, în cazul în care grupul de stabilitate $H_{r-n}$ al spaţiului omogen $V^n$ verifică condiţia (29) şi numai în acest caz, din înseşi ecuaţiile de structură ale grupului $G_r$, rezultă o conexiune afină naturală pentru $V^n$, celelalte conexiuni fiind date ca soluţii ale sistemului (27). Pentru conexiunea afină naturală (28) tensorii de torsiune şi de curbură ale ei, după cum rezultă din (8), vor fi:

$$T^i_{jk} = C^i_{jk}, \quad R^i_{jhk} = C^i_{ja}\, C^a_{hk}.$$

Calculînd acum diferenţiala absolută a acestor doi tensori vom avea

$$DT^i_{jk} = dC^i_{jk} + \omega^i_h\, C^h_{jk} - \omega^h_j\, C^i_{hk} - \omega^h_k\, C^i_{jh},$$

$$DR^i_{jhk} = d(C^i_{ja}\, C^a_{hk}) + \omega^i_l\, C^l_{ja}\, C^a_{hk} - \omega^l_j\, C^i_{la}\, C^a_{hk} - \omega^l_h\, C^i_{ja}\, C^a_{lk} - \omega^l_k\, C^i_{ja}\, C^a_{hl}.$$

Cum $dC^i_{jk} = d(C^i_{ja} C^a_{hk}) = 0$ şi folosind (4) şi $(3_2)$ în cazurile concrete

$$C^i_{a[a} C^a_{jk]} = 0, \quad C^a_{a[k} C^a_{hb]} = 0$$

se stabileşte că

$$DT^i_{jk} = 0, \quad DR^i_{jhk} = 0. \tag{30}$$

Aşadar, în acest caz remarcabil conexiunea afină este simetrică. Se stabileşte uşor şi proprietatea caracteristică a subgrupului $H_{r-n}$ relativă la algebra Lie; pentru aceasta folosim ecuaţiile de structură ale lui Lie, echivalente cu (8) şi anume:

$$(X_i, X_j) = C^k_{ji} X_k + C^a_{ji} X_a, \quad (X_i, X_a) = C^j_{ai} X_j + C^b_{ai} X_b, \tag{8'}$$

$$(X_a, X_b) = C^d_{ba} X_d.$$

Cum în acest caz

$$(X_i, X_a) = C^j_{ai} X_j; \tag{31}$$

de unde urmează că planul $E''_n$ din algebra Lie $G'_r$, în care acţionează subgrupul $H_{r-n}$ ca grup de transformări liniare, rămîne invariant la aceste transformări, după cum rezultă din (31).

Acest caz remarcabil a fost studiat de P. K. Raşevski [4], G. Vrănceanu [6] şi de alţi numeroşi geometri.

**6.** Pentru un grup Lie generic $G_r$ şi un grup oarecare al său $H_{r-n}$, după determinarea spaţiului fibrat $B_\Gamma$ construit pe spaţiul omogen $V^n$ (cu grup fundamental $G_r$ şi grup de stabilitate $H_{r-n}$), putem aplica procedeul preconizat de S. Chern şi concretizat de W. Slebodzinski, în lucrările citate, de prelungire a $G$-structurilor; aceste prelungiri succesive vor permite a se face o clasificare a subgrupurilor $H_{r-n}$ ale unui grup $G_r$ şi, în consecinţă, o clasificare corespunzătoare a spaţiilor omogene. Se consideră acum ca bază varietatea diferenţiabilă $B_\Gamma$; spaţiul liniar tangent $E_r$ într-un punct al ei $b(x^i; u^a)$ este determinat ca produs cartezian al spaţiului $E_n$ tangent în $x$ la $V^n$ şi al spaţiului $E_{r-n}$ tangent în punctul $u(u^a)$ al fibrei locale. Cum formele Pfaff $\omega^i$ determină coreperele lui $V^n$ pînă la o transformare a grupului $\Gamma(u)$, iar $\tilde{\omega}^a$ sînt determinate pînă la o transformare (22)

$$\tilde{\omega}^a = \bar{\omega}^a + \Gamma^a_i \omega^i, \tag{22}$$

se pune problema pentru ce valori ale nedeterminatelor $\Gamma^a_i$ torsiunea spaţiului $T^i_{jk}$ rămîne invariantă; după cum rezultă din (19'), aceasta va avea loc dacă vom avea

$$C^i_{ja} \Gamma^a_k - C^i_{ka} \Gamma^a_j = 0. \tag{32}$$

Se poate întîmpla ca acest sistem de ecuaţii liniare şi omogene în $\Gamma^a_i$, cu coeficienţi constanţi, să admită numai soluţia banală şi atunci prelungirea conexiunii nu este posibilă. Aceasta va avea loc de exemplu



dacă grupul liniar $\Gamma$ este grupul ortogonal sau grupul asemănării [5]. De exemplu, în cazul conexiunii afine naturale (29), aceasta atrage că $\omega^a = \bar{\omega}^a$ şi cum rezultă din $(8_2)$, vom avea, pe lîngă (29), şi $C^a_{hk} = 0$. Din (8') se vede că transformările infinitezimale $X_i$ formează un subgrup invariant al grupului $G_r$, iar $H_{r-n}$ este grupul factor corespunzător.

În general însă sistemul liniar şi omogen (32) va admite un sistem fundamental de soluţii $C^a_{ia_1}$, $a_1 = 1, \ldots, m_1$ şi vom avea deci

$$C^i_{ja} C^a_{ka_1} - C^i_{ka} C^a_{ja_1} = 0. \tag{32'}$$

Atunci toate soluţiile sistemului (32) vor fi date de

$$\Gamma^a_k = C^a_{ka_1} u^{a_1}_1, \tag{33}$$

în care $u^{a_1}_1$ sînt $m_1$ noi parametri arbitrari, iar (22) devine

$$\tilde{\omega}^a = \bar{\omega}^a + C^a_{ia_1} u^{a_1}_1 \omega^i. \tag{22'}$$

Cum avem şi

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i, \tag{34}$$

relaţiile (22') şi (34) determină în spaţiul liniar $E_r$ transformări ale unui grup liniar $\Gamma_1$ de $m_1$ parametri ale cărui transformări infinitezimale sînt date de

$$X_{a_1} f = C^a_{ia_1} x^i \frac{\partial f}{\partial u^a}.$$

Or, se vede imediat că

$$X_{\beta_1}(X_{a_1} f) = C^b_{j\beta_1} x^j \frac{\partial}{\partial u^b}\left(C^a_{ia_1} x^i \frac{\partial f}{\partial u^a}\right) = C^b_{j\beta_1} C^a_{ia_1} x^i x^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^a \partial u^b},$$

de unde rezultă că parantezele Poisson ale acestui grup $(X_{a_1}, X_{\beta_1}) f = 0$ sînt nule şi în consecinţă grupul liniar $\Gamma_1$ asociat lui $\Gamma$ este abelian.

Vom defini o primă prelungire a conexiunii afine considerînd spaţiul fibrat principal $B_{\Gamma_1}$ tangent la $B_\Gamma$ cu grup de structură $\Gamma_1$.

Diferenţiind exterior (22) şi eventual utilizînd substituţia

$$\bar{\omega}^{a_1} = du^{a_1}_1 + \Gamma^{a_1}_a \tilde{\omega}^a,$$

se obţine

$$d\tilde{\omega}^a = C^a_{ia_1} \bar{\omega}^{a_1} \wedge \omega^i + \frac{1}{2} C^a_{bc} \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^c + \frac{1}{2} T^a_{ij} \omega^i \wedge \omega^j. \tag{35}$$

Folosind (22) şi (32), (18) devin

$$(18'') \qquad d\omega_i = C^i_{ja}\,\omega^j \wedge \tilde{\omega}^a + \frac{1}{2}\,T^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k.$$

O parte din ecuaţiile de structură ale lui $B_\Gamma$ vor fi date de (35) şi (18''); conexiunea prelungită va fi $\omega^a_i = C^a_{ia}\,\tilde{\omega}^a$ cu care se procedează ca şi în § 4 pentru a determina toate conexiunile afine cu care se poate echipa $B_{\Gamma_1}$.

Operînd în acelaşi mod ca în prima etapă (§ 6), procesul de prelungire se poate opri, sau va continua, obţinîndu-se astfel conexiuni afine, prelungite succesiv, ale primului grup de parametri şi punctele $b(x^i, u^a) \in B_\Gamma$ ale spaţiului fibrat iniţial $B_\Gamma$ tangent la spaţiul omogen $V^n$.

Procesul acesta permite a se asocia oricărui subgrup $H_{r-n}$ al unui grup Lie $G_r$, întîi realizarea liniară indicată $\Gamma$ a lui $H_{r-n}$, iar apoi un şir de grupuri abeliene $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, legate evident intrinsec de $H_{r-n}$ şi deci de spaţiul omogen $V^n$.

De aici rezultă o posibilitate de clasificare a subgrupurilor unui grup Lie şi a spaţiilor omogene corespunzătoare.

*Observaţii.* 1°. În paragrafele 4 şi 5 s-a stabilit o corespondenţă naturală între punctele $p(x^i, u^a) \in G_r$ ale primului grup de parametri şi punctele $b(x^i, u^a) \in B_\Gamma$ ale spaţiului fibrat tangent; ar fi interesant să se cerceteze această corespondenţă.

2°. Procesul de determinare a diverselor conexiuni afine ale spaţiului $B_\Gamma$ este bazat pe alegerea unui $n$-uplu de congruenţe de pe $V^n$ care să-i asigure transportul paralel; cu alte cuvinte este vorba de determinarea unei familii de repere ale spaţiului omogen. În această familie putem distinge subfamilii cu proprietăţi geometrice remarcabile. Alegerea acestor subfamilii se face, după cum s-a văzut în §§ 3 şi 5, după un procedeu cu totul similar metodei reperului mobil a lui Cartan în studiul varietăţilor scufundate într-un spaţiu Klein. În cazul $G$-structurilor sau, cel puţin, pentru cazul considerat de noi şi anume al spaţiului omogen ca bază din $B_\Gamma$, se poate extinde metoda lui Cartan nu numai la studiul lui $V^n$ ci şi al varietăţilor scufundate în acesta din urmă. În cazul unui grup Lie infinit, dacă se ia în considerare procesul de prelungire a $G$-structurilor, care de această dată este infinit [5], atunci este posibilă extinderea metodei reperului mobil şi la studiul spaţiilor lui omogene şi la acel al varietăţilor scufundate în ele; ne propunem a dezvolta acest subiect în altă lucrare.

## BIBLIOGRAFIE


1. Chern S. S. — *Pseudo-groupes continus infinis*. Coll. Géométrie differentielle, Strassbourg 1953, p. 119—136.
2. Лаптев Г. Ф. — *Геометрия погруженных многообразий*. Труды Моск. мат. общ., т. 2, 1953, стр. 275—382.
3. Лаптев Г. Ф. — *Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований*. Труды 3-го мат. съезда, 1956, т. III, стр. 409—418.
4. Рашевский П. К. — *О геометрии однородных пространств*. Труды семин. по вект. анализу, IX, 1952, стр. 49—74.
5. Słebodzinski W. — *Formes extérieures et leurs applications*. II. Warszawa 1963.
6. Vrănceanu G. — *Spaţii cu conexiune afină omogene*. Lucrările consfătuirii de geometrie şi topologie, Iaşi 1958, p. 43—46.




## ОБ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЯХ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА


Краткое содержание

В этой заметке применяются $G$-структуры, введенные С. Чернoм [1], для исследования аффинных связностей однородного пространства.


## SUR LES CONNEXIONS AFFINES D'UN ESPACE HOMOGÈNE


Résumé

Dans cette Note on applique les structures $G$, introduites par M. S. Chern [1], pour l'étude des connexions affines d'un espace homogène.