ASUPRA APROXIMĂRILOR DIOFANTICE ASIMETRICE

Rezumat

În primele trei paragrafe se dă o demonstraţie completă a teoremei lui B. Segre [24]: Orice iraţional θ are o infinitate de aproximări raţionale p/q aşa că (1) să fie satisfăcută cu $\xi = \max[(1+4\tau)^{1/2}, (\tau^2+4\tau)^{1/2}]$ şi $\tau \geqslant 0$.

Folosind o idee dată de I. Niven [16, 17], autorul arată cum trebuie continuată demonstraţia aritmetică dată de C. D. Olds [20] numai pentru $\tau \geqslant 1$.

Tot aici se fac unele observaţii asupra precizărilor teoremei date de demonstraţie.

În paragrafele următoare se dau două generalizări ale teoremei lui B. Segre. Generalizarea a doua conţine drept cazuri particulare multe din teoremele clasice asupra aproximărilor diofantice simetrice.

ОБ АССИММЕТРИЧЕСКИХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

Краткое содержание

В первых трех параграфах дается полное доказательство теоремы Б. Сегре [24]. Каждый ирracional θ имеет безконечное множество рациональных приближений p/q так что (1) удовлетворяется $\xi = \max[(1+4\tau)^{1/2}, (\tau^2+4\tau)^{1/2}]$ и $\tau \geqslant 0$.

Используя идею И. Нивена [16, 17], автор указывает как должно продолжеться арифметическое доказательство которое С. Д. Олдс [20] дает только для $\tau \geqslant 1$.

Здесь же делаются некоторые замечания на счет уточнений доказаной теоремы.

В последующих параграфах даются обобщения теоремы Б. Сегре. Второе обобщение содержит как частные случаи многие классические теоремы о симметрических диофантовых приближениях.

ASUPRA ŞIRURILOR RECURENTE

DE

CORINA REISCHER-HAIMOVICI şi V. TAMAŞ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Universităţii „Al. I. Cuza" din 26–27 octombrie 1963

1. Fie

$$u_m = a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \ldots + a_n u_{m-n} \tag{1}$$

o relaţie de recurenţă de ordin n, unde a_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ sînt numere reale şi fie

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n \tag{2}$$

ecuaţia generatoare a relaţiei (1).

Dacă termenii şirului $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ satisfac relaţia (1) şirul se numeşte recurent.

O problemă importantă care se pune în legătură cu şirurile recurente este aceea de găsire a unei formule care să dea termenul general u_m în funcţie de coeficienţii relaţiei (1) sau de rădăcinile ecuaţiei (2) şi de primii n termeni ai şirului.

Astfel I. J. Schwatt [5], folosind inducţia matematică, ajunge, după calcule laborioase, la formula

$$u_m = u_0 a_2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} C^k_{m-2-k} a_1^{m-2-2k} a_2^k + u_1 \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} C^k_{m-1-k} a_1^{m-1-2k} a_2^k \tag{3}$$

pentru termenul general al unui şir oarecare ce satisface relaţia de recurenţă de ordin 2:

$$u_m = a_1 u_{m-1} + a_2 m_{m-2}.$$

L. Toscano [7], plecînd de la ecuaţia generatoare $x^2 - px + q = 0$, găseşte pentru termenul general al unui şir ce satisface relaţia de recurenţă corespunzătoare:

$$u_m = u_1 U_m - q u_0 U_{m-1},$$

unde U_m este funcţia numerică a lui Lucas,

$$U_m = \frac{\lambda_1^m - \lambda_2^m}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

λ_1 şi λ_2 fiind rădăcinile ecuaţiei de mai sus.

A. Mambriani [3], folosind un sistem ce rezultă din aplicarea produsului Cauchy, dă o expresie generală pentru u_m cu ajutorul rădăcinilor ecuaţiei generatoare.

În Nota de faţă am obţinut, pe o cale foarte simplă, o formulă pentru exprimarea termenului general u_m al unui şir ce satisface relaţia (1). Folosind această formulă, am putut obţine puterile unei matrice de ordin n.

În sfîrşit, prin particularizarea relaţiei de recurenţă (1), am regăsit unele rezultate cunoscute, precum şi altele noi.

2. Se ştie că mulţimea şirurilor care satisfac relaţia de recurenţă (1) formează un spaţiu liniar R cu n dimensiuni (elementele spaţiului R fiind şiruri).

Dacă ecuaţia generatoare (2) are rădăcini simple, fie ele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ atunci şirurile:

$$1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^m, \ldots$$
$$1, \lambda_2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_2^m, \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$1, \lambda_n, \lambda_n^2, \ldots, \lambda_n^m, \ldots$$

formează o bază în spaţiul liniar R şi sînt singurele progresii geometrice care satisfac relaţia de recurenţă (1).

Cum orice element din R este o combinaţie liniară de elementele bazei, urmează

$$u_m = A_1 \lambda_1^{m-1} + \ldots + A_n \lambda_n^{m-1} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

unde A_i sînt nişte constante.

Pentru determinarea acestor constante, folosind primii n termeni ai şirului, am obţinut sistemul liniar şi neomogen

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_n = u_1, \\ A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \ldots + A_n\lambda_n = u_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1\lambda_1^{n-1} + A_2\lambda_2^{n-1} + \ldots + A_n\lambda_n^{n-1} = u_n. \end{cases} \tag{5}$$

Determinantul coeficienţilor necunoscutelor este un determinant Vandermonde, deci diferit de zero şi prin urmare sistemul (5) are soluţie unică. Rezolvînd obţinem

$$A_j = \frac{1}{v} \begin{vmatrix} 1 & \ldots \overset{(j)}{u_1} \ldots 1 \\ \lambda_1 & \ldots u_2 \ldots \lambda_n \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots u_n \ldots \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

unde v este determinantul Vandermonde format cu rădăcinile ecuaţiei (2). Dezvoltînd determinantul de mai sus după coloana j, obţinem

$$A_j = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{ij} u_i,$$

unde M_{ij} este minorul complementar al elementului de la intersecţia liniei i cu coloana j din determinantul Vandermonde. Înlocuind pe A_j în relaţia (4) obţinem

$$u_m = \frac{1}{v} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{ij} \lambda_j^{m-1} u_i \qquad (m = n+1, n+2, \ldots)$$

sau încă

$$u_m = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{n} C_i u_i, \qquad (m \geqslant n+1), \tag{6}$$

unde am notat

$$C_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \lambda_j^{m-1} M_{ij}. \tag{7}$$

Din (7) se vede că C_i sînt nişte determinanţi care se obţin din determinantul Vandermonde, v, înlocuind linia i prin $\lambda_1^{m-1}, \lambda_2^{m-1}, \ldots, \lambda_n^{m-1}$.

Să considerăm acum cazul cînd ecuaţia generatoare (2) are rădăcini multiple. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ rădăcinile ei distincte ($k < n$) cu ordinele de multiplicitate $n_1, n_2, \ldots, n_k$ respectiv şi $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. În acest caz se ştie [4] că şirurile

$$\begin{array}{l} 1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots\ldots, \lambda_1^{m-1}, \ldots \\ 0, \lambda_1, 2\lambda_1^2, \ldots\ldots, (m-1)\lambda_1^{m-1}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, \lambda_1, 2^{n_1-1}\lambda_1^2, \ldots, (m-1)^{n_1-1}\lambda_1^{m-1}, \ldots \\ 1, \lambda_2, \lambda_2^2, \ldots\ldots, \lambda_2^{m-1}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, \lambda_2, 2^{n_2-1}\lambda_2^2, \ldots, (m-1)^{n_2-1}\lambda_1^{m-1}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{8}$$

formează o bază în spaţiul liniar R şi procedînd la fel ca mai înainte obţinem

$$u_m = \frac{1}{\lambda_1^{n_1-1}\lambda_2^{n_2-1}\dots\lambda_k^{n_k-1}}\frac{1}{v'}\sum_{i=1}^{n} C_i' u_i \quad (m > n) \tag{9}$$

unde C_i' se obţine din determinantul v':

$$v' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\dots & 0 & 1\dots \\ \lambda_1 & 1 & 1\dots & 1 & \lambda_2\dots \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1^2 & 2^2\lambda_1^2\dots & 2^{n_1-1}\lambda_1^2 & \lambda_2^2\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda_1^{n-2} & (n-1)^2\lambda_1^{n-2}\dots & (n-1)^{n_1-1}\lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-1}\dots \end{vmatrix}$$

înlocuind linia i prin

$$\lambda_1^{m-1},\ (m-1)\lambda_1^{m-1},\dots,(m-1)^{n_1-1}\lambda_1^{m-1},\ \lambda_2^{m-1},\dots,\lambda_k^{m-1},\dots(m-1)^{n_k-1}\lambda_k^{m-1}$$

În cazul cînd $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$, formula (9) se reduce la formula (6) găsită mai înainte.

3. Fie A o matrice pătratică de ordin n a cărei ecuaţie caracteristică este ecuaţia (2).

Deoarece, conform teoremei lui Cayley-Hamilton [1] matricea A satisface ecuaţia (2), urmează că progresia geometrică

$$E, A, A^2, \dots, A^m, \dots$$

unde E este matricea unitate de ordin n satisface relaţia de recurenţă (1)

Avem deci:

$$A^m = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n} C_i A^{i-1} \quad (m \geqslant n) \tag{10}$$

sau

$$A^m = \frac{1}{\lambda_1^{n_1-1}\lambda_2^{n_2-1}\dots\lambda_k^{n_k-1}}\frac{1}{v'}\sum_{i=1}^{n} C_i' A^{i-1} \quad (m \geqslant n), \tag{11}$$

după cum A are rădăcini caracteristice distincte sau rădăcini caracteristice multiple. Cu ajutorul formulelor (10) şi (11) se poate calcula orice putere a matricei A. Formula (10) a fost găsită de Lehrer [2] pe altă cale.

Formula (11) diferă de formula obţinută de Lehrer pentru cazul matricelor cu rădăcini caracteristice multiple.

4. Să considerăm acum cazul unei relaţii de recurenţă de ordin trei cu ecuaţia generatoare

$$\lambda^3 = p_1\lambda^2 - p_2\lambda + p_3. \tag{12}$$

Fie A o matrice de ordin trei a cărei ecuaţie caracteristică este ecuaţia (12). Mai presupunem că (12) admite rădăcini distincte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Oricare ar fi m, avem în baza formulei (4) $A^m = A_1\lambda_1^{m-1} + A_2\lambda_2^{m-1} + A_3\lambda_3^{m-1}$, unde

$$A_1 = \frac{1}{v}[\pi_1 d_1 E - \sigma_1 d_1 A + d_1 A^2],$$

$$A_2 = \frac{1}{v}[-\pi_2 d_2 E + \sigma_2 d_2 A - d_2 A^2],$$

$$A_3 = \frac{1}{v}[\pi_3 d_3 E - \sigma_3 d_3 A + d_3 A^2]$$

şi am notat

$$\pi_1 = \lambda_3\lambda_2, \quad \pi_2 = \lambda_3\lambda_1, \quad \pi_3 = \lambda_2\lambda_1,$$
$$\sigma_1 = \lambda_3 + \lambda_2, \quad \sigma_2 = \lambda_3 + \lambda_1, \quad \sigma_3 = \lambda_2 + \lambda_1,$$
$$d_1 = \lambda_3 - \lambda_2, \quad d_2 = \lambda_3 - \lambda_1, \quad d_3 = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Efectuînd calculele şi observînd că $v = d_1 d_2 d_3$ obţinem

$$A^m = p_3 K_{m-1} E + (K_m - p_1 K_{m-1}) A + K_{m-1} A^2,$$

unde am notat

$$K_m = \frac{\lambda_1^m}{d_2 d_3} - \frac{\lambda_2^m}{d_1 d_3} + \frac{\lambda_3^m}{d_1 d_2}.$$

Deoarece $d_2 d_3 = D'(\lambda_1)$, $d_1 d_3 = -D'(\lambda_2)$, $d_1 d_2 = D'(\lambda_3)$, unde $D(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei A, deci $D(\lambda) = |\lambda E - A|$, urmează

$$K_m = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i^m}{D'(\lambda_i)}.$$

Cantităţile K_m apar în lucrarea lui V. Tamaş [6] şi pentru cazul $p_1 = 0$ au forma

$$-108 R K_m = 9p_3^2 S_{m-2} - 5p_2^2 S_m - 3p_2 S_{m+2},$$

unde S_m sînt sumele lui Newton, sumele puterilor asemenea ale rădăcinilor lui $D(\lambda)$ şi

$$R = \frac{p_3^2}{4} - \frac{p_2^3}{27}.$$

Se arată imediat că K_m satisfac la relaţia de recurenţă corespunzătoare ecuaţiei generatoare (12) adică

$$K_m = p_1 K_{m-1} - p_2 K_{m-2} + p_3 K_{m-3} \tag{13}$$

şi deci s-a obţinut o altă cale de calcul a cantităţilor K_m.

5. Să considerăm acum cazul particular de care s-a ocupat J. Schwatt [5], deci relaţia de recurenţă de ordin doi

$$u_m = a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2}, \tag{14}$$

ecuaţia generatoare corespunzătoare avînd rădăcini distincte.

Aplicînd formula (6) pentru acest caz şi comparînd cu formula (3) a lui Schwatt, obţinem

$$\frac{\lambda_1^m - \lambda_2^m}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_{m-k}^k a_1^{m-2k} a_2^k, \tag{15}$$

formulă care permite calcularea funcţiei numerice U_m a lui Lucas.

Menţionăm că formula (15) a fost găsită şi de V. Vodička [8] pornind de la alte consideraţii.

Prin particularizarea coeficienţilor a_1 şi a_2, deci corespunzător a lui λ_1 şi λ_2, se pot obţine din formula (15) o serie de egalităţi interesante numerice sau în funcţii trigonometrice.

Vom da un singur exemplu foarte simplu: dacă $a_1 = a_2 = 1$ obţinem

$$(1+\sqrt{5})^m - (1-\sqrt{5})^m = 2^m \sqrt{5}\,(C_m^0 + C_{m-1}^1 + \ldots + C_{m-\left[\frac{m}{2}\right]}^{\left[\frac{m}{2}\right]}).$$

6. În sfîrşit o ultimă observaţie tot în legătură cu funcţiile lui Lucas.

Se ştie că Lucas consideră două funcţii numerice de rădăcinile unei ecuaţii de gradul doi

$$U_m = \frac{\lambda_1^m - \lambda_2^m}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{şi} \quad V_m = \lambda_1^m + \lambda_2^m. \tag{16}$$

L. Toscano [7] a dovedit că dacă ecuaţia generatoare de gradul doi are rădăcini distincte şi dacă este îndeplinită condiţia

$$2u_1 + a_1 u_0 = 0 \tag{17}$$

atunci

$$u_m = \frac{u_0}{2} V_m.$$

Am putut completa rezultatul lui Toscano obţinînd o formulă analogă cu aceasta, dar în cazul cînd ecuaţia generatoare are rădăcină dublă.

Folosind rezultatele găsite, am arătat uşor că

$$u_m = \frac{u_2}{2} V_{m-2} \tag{18}$$

în aceeaşi condiţie (17) a lui Toscano.

BIBLIOGRAFIE

1. Creangă I. şi Haimovici Corina — *Algebră liniară*, Bucureşti 1962.
2. Lehrer Y. — *On fonctions of matrices*. Rend. Circ. Mat Palermo (2), 6, 1957, p. 103—108.
3. Mambriani A. — *Sulla risoluzione delle equazioni ricorrenti lineari, d'ordine finito e a coefficienti costanti*. Rend. Accad. Lincei, v. XIX. serie VI, 1934, p. 16—21.
4. Маркушевич А. И. — *Возвратные последовательности*. Москва-Ленинград 1951.
5. Schwatt I. J. — *Il termine generale di una successione ricorrente finita del secondo ordine*. Rend. Lincei, serie VI, vol XVII, 1933, p. 909—917.
6. Tamaş V. — *Calculul funcţiilor de matrice pentru o matrice oarecare de ordin trei*. Stud şi cerc. şt., Matematică, Iaşi an. XIV, f. 1, 1963, p. 11—16.
7. Toscano L. — *Sulla integrazione delle successioni ricorrenti del secondo ordine lineari ed omogenee*. Rend. Lincei, serie VI, v. XIX, 1934, p. 849—854.
8. Vodička V. — O pružité vyrazu $\alpha^n + \beta^n$. Aplikace Matematiky 7, 1963, f. 3, p. 272—281.

О ВОЗВРАТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

Краткое содержание

Для общего члена u_m некоторой возвратной последовательности который удовлетворяет отношению (1) мы находили формулы (6) и (9) в зависимости от того если характеристическое уравнения (2) имеет простые или кратные корни.

Используя эти формулы мы могли находить степени матрицы n-ого порядка а именно формулы (10) и (11) в зависимости от того сели матрица A имеет простые или кратные корни.

Наконец для некоторых частных случаев формулы (1) мы вновь получили известную формулу (15) как и некоторые новые результаты.

SUR LES SUITES RÉCURRENTES

Résumé

Pour le terme général d'une suite qui satisfait à la relation de récurrence (1) nous avons obtenu les formules (6) et (9) suivant que l'équation génératrice (2) a des racines distinctes ou multiples. En utilisant ces formules, nous avons obtenu les puissances d'une matrice d'ordre n et notamment les formules (10) et (11) si la matrice A a des racines caractéristiques distinctes ou multiples.

Finalement, en particularisant la relation de récurrence (1), nous avons retrouvé la formule (15) et quelques résultats nouveaux.