ASUPRA ALGEBRELOR SLABE DE ORDIN 3, CU DIVIZIUNE

DE

TUDORA LUCHIAN

Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Universității „Al. I. Cuza" din 26—27 octombrie 1963

1. Este bine cunoscut faptul că, în teoria inelelor, înlocuirea axiomei asociativității prin legi mai puțin restrictive, sau chiar îndepărtarea ei, a constituit o idee foarte fructuoasă, care a condus în ultimele 3 decenii, la crearea unor noi ramuri în algebra abstractă (algebre neasociative, algebre Lie, algebre Jordan), unele dintre ele cu frumoase interpretări în geometrie sau topologie. Se pare însă că, în privința axiomei distributivității, cercetătorii au fost mai conservatori. Totuși înlocuirea acestei axiome cu legi mai slabe ar apărea destul de naturală, o dată ce însăși geometria oferă exemple de structuri analoge inelului, dar cu distributivitate de o singură parte, așa cum sînt exemplele date de L. E. Dickson [2], O. Veblen, J. H. M. Wedderburn [3], [4].

Într-o Notă [1] publicată în 1961, profesorul Al. Climescu introduce noțiunile de inel slab, algebră slabă, corp slab, înlocuind în sistemele de axiome respective legile de distributivitate prin următoarele legi mai generale:

$$x(y+z)+x0=xy+xz \tag{1}$$

$$(y+z)x+0x=yx+zx \tag{2}$$

punînd în plus condiția

$$0x=x0=x \tag{3}$$

pentru orice x din structura considerată, adică se cere ca 0 să fie element neutru și pentru înmulțire.

Definițiile acestor structuri algebrice sînt deci următoarele:

I. S. Se numește *inel slab* o mulțime S cu două legi de compunere internă, adunarea și înmulțirea, ce satisfac condițiile (1), (2), (3); adunarea satisface axiomele grupului abelian.

C. S. Se numeşte *corp slab* (de prima specie) un inel slab în care înmulţirea satisface axiomele de grup.

A. S. Se numeşte *algebră slabă*, peste un inel (obişnuit) R, asociativ, comutativ şi cu unitate, un inel slab $\mathfrak{A}$ ce admite R ca domeniu de operatori, compunerea cu operatori satisfăcînd axiomele operaţiei externe dintr-un spaţiu liniar, în plus fiind satisfăcută condiţia:

$$(4) \qquad (\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(xy) + \alpha(1-\beta)x + \beta(1-\alpha)y$$

$$\alpha, \beta \in R;\ x, y \in \mathfrak{A}.$$

În Nota citată, prof. Al. Climescu se ocupă de algebrele slabe de ordin 2 peste un corp comutativ oarecare K, ce satisfac încă condiţiile:

(5) „Ecuaţiile $ay = 0$, $xa = 0$ au fiecare soluţie unică pentru orice $a \in \mathfrak{A}$". Sau: orice element are un invers la dreapta unic şi un invers la stînga unic.

D-sa găseşte că aceste algebre au înmulţirea dată de legea:

$$(6) \qquad xy = (\xi^1 + \eta^1 + p_1(k_1\xi^1 + k_2\xi^2)(k_1\eta^1 + k_2\eta^2),$$
$$\xi^2 + \eta^2 + p_2(k_1\xi^1 + k_2\xi^2)(k_1\eta^1 + k_2\eta^2))$$

cu $x = (\xi^1, \xi^2)$, $y = (\eta^1, \eta^2)$ şi condiţia $p_1k_1 + p_2k_2 = 0$ şi sînt corpuri slabe, ce se reduc toate la numai 2 tipuri neizomorfe, date respectiv de legile de înmulţire

$$(6') \qquad xy = (\xi^1 + \eta^1, \xi^2 + \eta^2); \qquad (6'') \qquad xy = (\xi^1 + \eta^1 + \xi^2\eta^2, \xi^2 + \eta^2).$$

S-a arătat astfel că:

Teorema I. Corpurile slabe (de specia I) care sînt în acelaşi timp şi algebre slabe de ordin $n = 2$ peste un corp comutativ oarecare, sînt corpuri slabe comutative şi numărul lor este 2, ele fiind date de (6') şi (6").

Prof. Al. Climescu pune problema dacă acest rezultat este sau nu adevărat pentru n oarecare, de exemplu pentru $n = 3$. În Nota de faţă mă ocup de această problemă.

2. Să enumerăm axiomele unei algebre slabe $\mathfrak{A}$ de ordin n, peste un corp comutativ K, care admite invers la dreapta unic şi invers la stînga unic, pentru orice element; elementele algebrei le vom considera ca elemente din produsul cartezian $\underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n \text{ ori}}$

$$x = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in K \times K \times \ldots \times K$$

I. Adunarea este definită prin

$$x + y = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) + (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n) = (\xi^1 + \eta^1, \ldots, \xi^n + \eta^n); \qquad \xi^i, \eta^i \in K$$

şi satisface axiomele grupului aditiv abelian (elementul neutru la adunare îl notăm 0).

II. Înmulţirea cu scalari, definită prin

$$\alpha x = \alpha(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) = (\alpha\xi^1, \alpha\xi^2, \ldots, \alpha\xi^n), \quad \alpha \in K,$$

satisface axiomele

II_1. $1x = x$; $\qquad$ II_2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

II_3. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$; $\qquad$ II_4. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

cu $\alpha, \beta, 1 \in K$; $x, y \in \mathfrak{A}$

III. Înmulţirea elementelor din $\mathfrak{A}$ satisface axiomele

III'_1. $x(y + z) + x0 = xy + xz$;

III_2. $(y + z)x + 0x = yx + zx$;

III_3. $x0 = 0x = x$;

III_4. $(\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(xy) + \alpha(1-\beta)x + \beta(1-\alpha)y$;

III_5. Ecuaţia $ay = 0$ are soluţie unică $y = a^{-1}$;

$\mathrm{III}_{5'}$. Ecuaţia $xa = 0$ are soluţie unică $x = {}^{-1}a$.

Din axiomele I—III_3 se deduce, [1], consecinţa

$$\mathrm{III}_6. \quad \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) + (m-1)\left(\sum_{1}^{n} y_j\right) + (n-1)\left(\sum_{1}^{m} x_i\right) = \sum_{i,j=1}^{m,n} x_i y_j.$$

Observaţia 1. Evident că dacă la axiomele III_3, III_5, $\mathrm{III}_{5'}$, adăugăm asociativitatea, înmulţirea internă satisface axiomele grupului multiplicativ, deci algebra este corp slab.

Observaţia 2. Există algebre slabe cu inverse unice pentru orice n. Căci spaţiul liniar în care înmulţirea elementelor este definită prin

$$(6_n) \qquad xy = (\xi^1, \ldots, \xi^k, \ldots, \xi^n)(\eta^1, \ldots, \eta^k, \ldots, \eta^n) = (\ldots, \xi^k + \eta^k +$$
$$+ p_k(k_i\xi^i)(k_i\eta^i), \ldots)$$

cu condiţia

(7) $p_1k_1 + \ldots + p_nk_n = 0$, (cu $i = 1, 2, \ldots, n$ indice de sumare)

satisface axiomele III_1—$\mathrm{III}_{5'}$; în plus are înmulţirea asociativă, deci este şi corp slab [1], prin urmare:

Observaţia 2'. Există corpuri slabe ce sînt algebre slabe de ordin n, pentru orice n.

Putem numi astfel de corpuri slabe, *algebre slabe cu diviziune*, şi atunci observaţia 2' se mai poate enunţa:

Observaţia 2". Există algebre slabe de ordin n *cu diviziune*, peste orice corp comutativ (în particular peste corpul real şi peste corpul complex) pentru orice n.

Acest fapt constituie o deosebire fundamentală față de algebrele asociative obișnuite cu diviziune, peste corpul real, unde n trebuie să fie 2^k, sau peste corpul complex, unde $n = 1$.

3. În legătură cu problema enunțată la sfîrșitul paragrafului 1, să arătăm mai întîi că algebrele slabe cu diviziune de tipul (6_n) cu n oarecare, au aceeași proprietate ca în cazul $n = 2$, anume:

Teorema II. Algebrele slabe cu diviziune de tipul (6_n) sînt numai două neizomorfe, anume acelea cu legile de înmulțire,

$$(6'_n) \qquad xy = (\xi^1 + \eta^1, \ldots, \xi^n + \eta^n)$$

obținută din (6_n), punînd $p_t = \ldots\ldots = p_n = 0$ și

$$(6''_n) \qquad xy = (\xi^1 + \eta^1, \ldots, \xi^{n-1} + \eta^{n-1}, \xi^n + \eta^n + \xi^1 \eta^1)$$

obținută din (6_n), punînd $k_1 = 1, k_2 = \ldots\ldots = k_n = 0$, $p_1 = \ldots\ldots = p_{n-1} = 0$, $p_n = 1$.

În prealabil, să observăm că un izomorfism între două algebre $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, cu legile de înmulțire respectiv $x^{L_1} y$ și $x^{L_2} y$, este un operator liniar nesingular, definit pe spațiile liniare S_1, S_2 ale algebrelor, și avînd în plus proprietatea

$$A(x^{L_1} y) = (Ax)^{L_2}(Ay).$$

Componentele imaginii Ax vor fi, deci, funcții liniare de componentele elementului x,

$$(8) \qquad Ax = A(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) = (a_i^1 \xi^i, a_i^2 \xi^i, \ldots, a_i^n \xi^i)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n \text{ indice de sumare})$$

cu

$$(8') \qquad \det A = \alpha = \det \| a_i^j \| \neq 0.$$

Să arătăm că putem găsi o funcție A de acest tip, care să aplice algebra slabă $\mathfrak{A}_{(6''_n)}$ pe algebra $\mathfrak{A}_{(6_n)}$ — în care nu toți p_t și k_t sînt nuli și verifică (7) — și care să satisfacă condiția

$$(9) \qquad A(x^{6''_n} y) = (Ax)^{6_n}(Ay),$$

$$A(x^{6''_n} y) = \{a_i^1(\xi^i + \eta^i) + a_n^1 \xi^1 \eta^1, \ldots, a_i^n(\xi^i + \eta^i) + a_n^n \xi^1 \eta^1\},$$

$$(Ax)^{6_n}(Ay) = \{a_i^1(\xi^i + \eta^i) + p_1[k_j a_i^j \xi^i][k_j a_i^j \eta^i], \ldots, a_i^n(\xi^i + \eta^i) +$$

$$+ p_n[k_j a_i^j \xi^i][k_j a_i^j \eta^i]\}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ indici de sumare}).$$

Condițiile ca (9) să fie satisfăcută, sînt:

$$(10^c) \qquad \alpha_1 = k_j a_1^j \neq 0,$$

$$(10) \qquad k_j a_i^j = 0 \text{ pentru } i = 2, 3, \ldots, n,$$

$$(10') \qquad p_i a_1^2 = a_n^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se observă că relațiile (10') sînt compatibile cu relația (10) pentru $i = n$, $k_1 a_n^1 + k_2 a_n^2 + \ldots + k_n a_n^n = 0$ căci, ținînd seama de (10') aceasta devine $\alpha_1^2 [p_1 k_1 + p_2 k_2 + \ldots + p_n k_n] = 0$ verificată, conform cu (7).

Presupunînd pentru moment, $k_1 \neq 0$, determinantul α se poate scrie, ținînd seama de (10°), (10').

$$(11) \qquad \det A = \alpha = \frac{1}{k_1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \frac{\alpha_1}{k_1} \begin{vmatrix} a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = \frac{\alpha_1}{k_1} \alpha.$$

Observînd că relațiile (10) cer ca elementele fiecărei coloane din α să satisfacă aceeași ecuație

$$k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n = 0$$

și această ecuație admițînd $n - 1$ soluții independente (măcar un $k_t \neq 0$), se pot alege aceste soluții astfel ca determinantul de ordin $n - 1$, α, să fie $\neq 0$; cu acestea, funcția A este inversabilă și are proprietatea (9).

Dacă $k_1 = 0$, măcar un $k_t \neq 0$, și operația de la (11) asupra lui α am fi aplicat-o liniei t, căci atunci $\alpha_t = k_j a_t^j \neq 0$.

În concluzie

$$\mathfrak{A}_{6''_n} \cong \mathfrak{A}_{6_n}$$

pentru orice valori ale constantelor p_t, k_t ce satisfac (7).

În particular, pentru $n = 3$, teorema II ne dă 2 algebre slabe cu diviziune, comutative:

$$(6'_3) \qquad xy = (\xi^1 + \eta^1, \xi^2 + \eta^2, \xi^3 + \eta^3) \text{ (cazul banal)};$$

$$(6''_3) \qquad xy = (\xi^1 + \eta^1, \xi^2 + \eta^2, \xi^3 + \xi^3 + \xi^1 \eta^1).$$

4. Ne propunem să găsim condiții suficiente pentru ca o algebră slabă de ordin 3 să aibă inverse unilaterale unice.

Fie $x = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3$, cu $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

$$y = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3, \qquad 1 \in K$$

și

$$e_i e_j = \gamma_{ij}^k e_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad \gamma_{ij}^k \in K.$$

Aplicînd consecința III_6, apoi axioma III_4, se găsește

$$(12) \qquad \begin{aligned} xy = {} & [(\gamma_{11}^1 - 2)\xi^1 \eta^1 + (\gamma_{12}^1 - 1)\xi^1 \eta^2 + (\gamma_{13}^1 - 1)\xi^1 \eta^3 + (\gamma_{21}^1 - 1)\xi^2 \eta^1 + \\ & + \gamma_{22}^1 \xi^2 \eta^2 + \gamma_{23}^1 \xi^2 \eta^3 + (\gamma_{31}^1 - 1)\xi^3 \eta^1 + \gamma_{32}^1 \xi^3 \eta^2 + \gamma_{33}^1 \xi^3 \eta^3 + \xi^1 + \eta^1] e_1 + \\ & + [\gamma_{11}^2 \xi^1 \eta^1 + (\gamma_{12}^2 - 1)\xi^1 \eta^2 + \gamma_{13}^2 \xi_1 \eta_3 + (\gamma_{21}^1 - 1)\xi^2 \eta^1 + (\gamma_{22}^2 - 2)\xi^2 \eta^2 + \\ & + (\gamma_{23}^2 - 1)\xi^2 \eta^3 + \gamma_{31}^2 \xi^3 \eta^1 + (\gamma_{32}^2 - 1)\xi^3 \eta^2 + \gamma_{33}^2 \xi^3 \eta^3 + \xi^2 + \eta^2] e_2 + \\ & + [\gamma_{11}^3 \xi^1 \eta^1 + \gamma_{12}^3 \xi^1 \eta^2 + (\gamma_{13}^3 - 1)\xi^1 \eta^3 + \gamma_{21}^3 \xi^2 \eta^1 + \gamma_{22}^3 \xi^2 \eta^2 + (\gamma_{23}^3 - 1)\xi^2 \eta^3 + \\ & + (\gamma_{31}^3 - 1)\xi^3 \eta^1 + (\gamma_{32}^3 - 1)\xi^3 \eta^2 + (\gamma_{33}^3 - 2)\xi^3 \eta^3 + \xi^3 + \eta^3] e_3. \end{aligned}$$

Pentru satisfacerea legii III_5, unde $a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3$, avem sistemul:

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&[(\gamma_{11}^1 - 2)a^1 + (\gamma_{21}^1 - 1)a^2 + (\gamma_{31}^1 - 1)a^3 + 1]\eta^1 + [(\gamma_{12}^1 - 1)a^1 + \gamma_{22}^1 a^2 + \\
&\quad \gamma_{32}^1 a^3]\eta^2 + [(\gamma_{13}^1 - 1)a^1 + \gamma_{23}^1 a^2 + \gamma_{33}^1 a^3]\eta^3 = -a^1, \\
&[\gamma_{11}^2 a^1 + (\gamma_{21}^2 - 1)a^2 + \gamma_{31}^2 a^3]\eta^1 + [(\gamma_{12}^2 - 1)a^1 + (\gamma_{22}^2 - 2)a^2 + \\
&\quad (\gamma_{32}^2 - 1)a^3 + 1]\eta^2 + [\gamma_{13}^2 a^1 + (\gamma_{23}^2 - 1)a^2 + \gamma_{33}^2 a^3]\eta^3 = -a^2, \\
&[\gamma_{11}^3 a^1 + \gamma_{21}^3 a^2 + (\gamma_{31}^3 - 1)a^3]\eta^1 + [\gamma_{12}^3 a^1 + \gamma_{22}^3 a^2 + (\gamma_{32}^3 - 1)a^3]\eta^2 + \\
&\quad + [(\gamma_{13}^3 - 1)a^1 + (\gamma_{23}^3 - 1)a^2 + (\gamma_{33}^3 - 2)a^3 + 1]\eta^3 = -a^3.
\end{aligned}
$$

Pentru ca sistemul (13) să aibă soluţie unică, $y = (\eta^1, \eta^2, \eta^3)$, este necesar şi suficient ca determinantul coeficienţilor lui să fie $D(a^1, a^2, a^3) \neq 0$, pentru orice a.

Pentru aceasta este necesar ca nici o coloană sau linie a lui D să nu se poată anula. Pentru ca coloana I să nu se poată anula, este necesar şi suficient ca sistemul liniar neomogen în a^1, a^2, a^3, obţinut prin egalarea cu 0 a elementelor coloanei I, să fie incompatibil; în acest scop este necesar ca determinantul coeficienţilor acestui sistem să fie 0:

$$
(14)\qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \gamma_{11}^1 - 2 & \gamma_{21}^1 - 1 & \gamma_{31}^1 - 1 \\ \gamma_{11}^2 & \gamma_{21}^2 - 1 & \gamma_{31}^2 \\ \gamma_{11}^3 & \gamma_{21}^3 & \gamma_{31}^3 - 1 \end{vmatrix}
$$

Pentru incompatibilitatea sistemului de mai sus, este suficient ca anularea lui Δ_1 să se facă în una dintre condiţiile:

(a_1) Linia I să se anuleze: $L_1 = 0$;

(a_2) $L_2 = 0$ şi $L_1 = kL_3$ (sau $L_3 = 0$ şi $L_1 = hL_2$);

(b_1) $L_1 = kL_2$ (sau $L_1 = kL_3$);

(b_2) $L_2 = kL_3$, şi $L_1 = k'L_3$;

(c) $k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3 = 0$ cu $k_1 \neq 0$ şi L_1, L_2, liniar independente.

Cu raţionament analog pentru coloana II, III se găsesc condiţiile:

$$
(15)\qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \gamma_{12}^1 - 1 & \gamma_{22}^1 & \gamma_{32}^1 \\ \gamma_{12}^2 - 1 & \gamma_{22}^2 - 2 & \gamma_{32}^2 - 1 \\ \gamma_{12}^3 & \gamma_{22}^3 & \gamma_{32}^3 - 1 \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
(16)\qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \gamma_{13}^1 - 1 & \gamma_{23}^1 & \gamma_{33}^1 \\ \gamma_{13}^2 & \gamma_{23}^2 - 1 & \gamma_{33}^2 \\ \gamma_{13}^3 - 1 & \gamma_{23}^3 - 1 & \gamma_{33}^3 - 2 \end{vmatrix} = 0
$$

cu condiţii suficiente de incompatibilitate analoge cu condiţiile (a_1)—(c), în care rolul liniei 1 îl ocupă respectiv linia 2, linia 3.

Pentru ca liniile determinantului D să nu se anuleze sînt necesare condiţiile:

$$
(17)\qquad \Gamma_1 = \begin{vmatrix} \gamma_{11}^1 - 2 & \gamma_{21}^1 - 1 & \gamma_{31}^1 - 1 \\ \gamma_{12}^1 - 1 & \gamma_{22}^1 & \gamma_{32}^1 \\ \gamma_{13}^1 - 1 & \gamma_{23}^1 & \gamma_{33}^1 \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
(18)\qquad \Gamma_2 = \begin{vmatrix} \gamma_{11}^2 & \gamma_{21}^2 - 1 & \gamma_{31}^2 \\ \gamma_{12}^2 - 1 & \gamma_{22}^2 - 2 & \gamma_{32}^2 - 1 \\ \gamma_{13}^2 & \gamma_{23}^2 - 1 & \gamma_{33}^2 \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
(19)\qquad \Gamma_3 = \begin{vmatrix} \gamma_{11}^3 & \gamma_{21}^3 & \gamma_{31}^3 - 1 \\ \gamma_{12}^3 & \gamma_{22}^3 & \gamma_{32}^3 - 1 \\ \gamma_{13}^3 - 1 & \gamma_{23}^3 - 1 & \gamma_{33}^3 - 2 \end{vmatrix} = 0
$$

şi sînt suficiente cîte una din condiţiile (a_1) – (c) în care, pentru anularea lui Γ_i, rolul liniei 1 îl are linia i.

Pentru satisfacerea legii III_5 — „$xa = 0$ are soluţie unică pentru orice a“ — este necesar şi suficient ca determinantul sistemului dedus din această ecuaţie să fie $D'(a^1, a^2, a^3) \neq 0$.

Se deduc de aici condiţiile:

$$
(14')\qquad \Delta_1' = \begin{vmatrix} \gamma_{11}^1 - 2 & \gamma_{12}^1 - 1 & \gamma_{13}^1 - 1 \\ \gamma_{11}^2 & \gamma_{12}^2 - 1 & \gamma_{13}^2 \\ \gamma_{11}^3 & \gamma_{12}^3 & \gamma_{13}^3 - 1 \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
(15')\qquad \Delta_2' = \begin{vmatrix} \gamma_{21}^1 - 1 & \gamma_{22}^1 & \gamma_{23}^1 \\ \gamma_{21}^2 - 1 & \gamma_{22}^2 - 2 & \gamma_{23}^2 - 1 \\ \gamma_{21}^3 & \gamma_{22}^3 & \gamma_{23}^3 - 1 \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
(16')\qquad \Delta_3' = \begin{vmatrix} \gamma_{31}^1 - 1 & \gamma_{32}^1 & \gamma_{33}^1 \\ \gamma_{31}^2 & \gamma_{32}^2 - 1 & \gamma_{33}^2 \\ \gamma_{31}^3 - 1 & \gamma_{32}^3 - 1 & \gamma_{33}^3 - 2 \end{vmatrix} = 0.
$$

Se observă că $\Gamma_1 = \Gamma_1'$, $\Gamma_2 = \Gamma_2'$, $\Gamma_3 = \Gamma_3'$, aşa încît anularea lor este implicată de (17), (18), (19).

Dacă corpul K (peste care este definită algebra slabă) este algebric închis, condiţiile $D(a^1, a^2, a^3) \neq 0$ şi $D'(a^1, a^2, a^3) \neq 0$ sînt satisfăcute atunci şi numai atunci cînd se anulează coeficienţii tuturor termenilor de grad > 0, deci atunci şi numai atunci cînd

(20) $$D(a^1, a^2, a^3) = D'(a^1, a^2, a^3) = 1 .$$

În acest caz se obţin, — pe lîngă (14), (15), (16), (14'), (15'), (16') — următoarele condiţii

(21) $$|i\,i\,j| + |i\,j\,i| + |j\,i\,i| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3;$$

(21') $$|i'\,i'\,j'| + |i'\,j'\,i'| + |j'\,i'\,i'| = 0, \quad i', j' = 1, 2, 3;$$

(22) $$\sum_{(ijk)} |i\,j\,k| = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3;$$

(22') $$\sum_{(i'j'k')} |i'\,j'\,k'| = 0, \quad i', j', k' = 1, 2, 3$$

unde am notat, de exemplu, cu $|i\,i\,j|$ determinantul de ordin 3 format cu coloana 1 din Δ_i, coloana 2 din Δ_i, coloana 3 din Δ_j; $|i'\,i'\,j'|$ este un determinant analog format cu coloanele lui Δ'_i şi Δ'_j; $|i\,j\,k|$ este determinantul format cu coloana 1 din Δ_i, coloana 2 din Δ_j, coloana 3 din Δ_k, cu $i \neq j \neq k$; sumele (22) şi (22') sînt întinse la toate permutările celor 3 indici;

(23) $$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} = 0, \qquad (23')\ \sum_{j=1}^{3} \delta'_{ij} = 0, \qquad i = 1, 2, 3;$$

adică suma minorilor principali de ordin 2 din Δ_i, respectiv Δ'_i, este zero;

(24) $$\sum_{k=1}^{6} \varepsilon^k_{ij} = 0, \qquad (24')\ \sum_{k=1}^{6} \varepsilon'^k_{ij} = 0,$$

adică suma minorilor principali de ordin 2 din determinanţii fiecăreia dintre relaţiile (21), respectiv (21'), formaţi cu o coloană din Δ_i şi una din Δ_j, $i \neq j$, este zero;

(25) $$\mathfrak{M}(\Delta_i) = 0, \qquad (25')\ \mathfrak{M}(\Delta'_i) = 0, \qquad i = 1, 2, 3$$

unde am notat cu $\mathfrak{M}(\Delta_i)$ urma matricei Δ_i.

Dacă corpul K este oarecare, condiţiile (21) — (25') sînt numai suficiente, pentru satisfacerea axiomelor III_5 şi $III_{5'}$.

5. Cu ajutorul condiţiilor din § **4**, am construit algebre slabe cu inverse unilaterale unice.

Algebrele (A) cu legea de înmulţire

(26) $$xy = \{\xi^1 + \eta^1,\ \lambda\xi^1\eta^1 + \xi^2 + \eta^2,\ \mu\xi^2\eta^2 + \xi^3 + \eta^3\} \text{ cu } \lambda = \gamma^2_{11},\ \mu = \gamma^3_{22}$$

sînt *algebre slabe comutative, cu invers bilateral unic pentru orice element.*

Se găseşte că algebrele (A) *nu sînt asociative*, deci *nu sînt corpuri slabe.*

Algebre (B) $\gamma^2_{11} = 0,\ \gamma^1_{32} = \nu \neq 0,\ \gamma^3_{22} = \mu$

(27) $$xy = \{\xi^1 + \eta^1 + \nu\xi^3\eta^2,\ \xi^2 + \eta^2,\ \xi^3 + \eta^3 + \mu\xi^2\eta^2\}$$

(B_1). Dacă $\mu \neq 0$, aceste algebre au ${}^{-1}a \neq a^{-1}$ pentru orice a şi nu sînt asociative.

(B_2). Dacă $\mu = 0$, atunci avem algebre slabe cu ${}^{-1}a = a^{-1}$ şi asociative, deci *corpuri slabe*, necomutative, toate izomorfe între ele, dar evident neizomorfe cu ($6'_3$), ($6''_3$),

(28) $$xy = \{\xi^1 + \eta^1 + \nu\xi^3\eta^2,\ \xi^2 + \eta^2,\ \xi^3 + \eta^3\}.$$

O clasă mai generală de algebre slabe cu inverse unilaterale unice este dată de legea de înmulţire

(29) $$\begin{aligned} xy = \{ & k_1[\lambda_x\eta^1 + \mu_x\eta^2 + \nu_x\eta^3] + \xi^1 + \eta^1, \\ & k_2[\lambda_x\eta^1 + \mu_x\eta^2 + \nu_x\eta^3] + \xi^2 + \eta^2, \\ & \lambda_x\eta^1 + \mu_x\eta^2 + \nu_x\eta^3 + \xi^3 + \eta^3\} \end{aligned}$$

unde

$$\lambda_x = \gamma^3_{11}\xi^1 + \gamma^3_{21}\xi^2 + (\gamma^3_{31} - 1)\xi^3, \qquad \mu_x = \gamma^3_{12}\xi^1 + \gamma^3_{22}\xi^2 + (\gamma^3_{32} - 1)\xi^3,$$
$$\nu_x = (\gamma^3_{13} - 1)\xi^1 + (\gamma^3_{23} - 1)\xi^2 + (\gamma^3_{33} - 2)\xi^3$$

cu condiţiile

(25_1) $k_1\gamma^3_{11} + k_2\gamma^3_{21} + \gamma^3_{31} - 1 = 0$, ($25'_1$) $k_1\gamma^3_{11} + k_2\gamma^3_{12} + \gamma^3_{13} - 1 = 0$,

(25_2) $k_1\gamma^3_{12} + k_2\gamma^3_{22} + \gamma^3_{32} - 1 = 0$, ($25'_2$) $k_1\gamma^3_{21} + k_2\gamma^3_{22} + \gamma^3_{23} - 1 = 0$,

(25_3) $k_1(\gamma^3_{13} - 1) + k_2(\gamma^3_{23} - 1) + \gamma^3_{33} - 2 = 0$,

($25'_3$) $k_1(\gamma^3_{31} - 1) + k_2(\gamma^3_{32} - 1) + \gamma^3_{33} - 2 = 0$.

Se găseşte că

$D = 1 \neq 0$ pe baza relaţiilor ($25'_1$), ($25'_2$), ($25'_3$);

$D' = 1 \neq 0$ pe baza relaţiilor (25_1), (25_2), (25_3).

Deci algebrele cu înmulţirea (29) sînt algebre slabe cu inverse unilaterale unice.

Legea (29) defineşte chiar corpuri slabe; e suficient să verificăm asociativitatea înmulţirii (29).

În adevăr se găseşte

$$[xy]z = x[yz] = \{W_1, W_2, W_3\}$$

cu $$W_1 = k_1[\lambda_x(\eta^1 + \zeta^1) + \mu_x(\eta^2 + \zeta^2) + \nu_x(\eta^3 + \zeta^3) + \lambda_y\zeta^1 + \mu_y\zeta^2 + \nu_y\zeta^3] + \xi^1 + \eta^1 + \zeta^1, \text{ sau}$$

$$W_1 = k_1\,\Omega(x, y, z) + \xi^1 + \eta^1 + \zeta^1;$$
$$W_2 = k_2\,\Omega(x, y, z) + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2;$$
$$W_3 = \Omega(x, y, z) + \xi^3 + \eta^3 + \zeta^3.$$

În particular, luînd

$$\gamma_{11}^3 = 1, \quad \gamma_{21}^3 = -1, \quad \gamma_{31}^3 = 2, \quad k_1 = 1, \quad \gamma_{12}^3 = 1, \quad \gamma_{22}^3 = \lambda$$

se calculează din $(25_1) \ldots (25'_3)$.

$$k_2 = 2, \quad \gamma_{13}^3 = -2, \quad \gamma_{32}^3 = -2\lambda, \quad \gamma_{23}^3 = -2\lambda + 2, \quad \gamma_{33}^3 = 4\lambda + 3$$

și se găsește algebra slabă necomutativă cu diviziune, dată de legea de înmulțire

(30) $$xy = \{A(x,y) + \xi^1 + \eta^1,\ 2A(x,y) + \xi^2 + \eta^2,\ A(x,y) + \xi^3 + \eta^3\}$$

cu

$$A(x,y) = (\xi^1 - \xi^2 + \xi^3)\eta^1 + [\xi^1 + \lambda\xi^2 - (2\lambda + 1)\xi^3]\eta^2 +$$
$$+ [-3\xi^1 + (-2\lambda + 1)\xi^2 + (4\lambda + 1)\xi^3]\eta^3 = \overset{\circ}{\lambda}_x \eta^1 + \overset{\circ}{\mu}_x \eta^2 + \overset{\circ}{\nu}_x \eta^3.$$

Fiind corp slab necomutativ, evident că $\mathfrak{A}_{(30)}$ nu este izomorf cu $\mathfrak{A}_{(6\frac{1}{3})}$ nici cu $\mathfrak{A}_{(6\frac{1}{3}')}$.

Să cercetăm dacă există izomorfism cu $\mathfrak{A}_{(28)}$ din § 5.

Căutăm dacă există o funcție liniară inversabilă

$$Ax = A(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \{\beta\xi^1 + \gamma\xi^2 + \delta\xi^3,\ \beta'\xi^1 + \gamma'\xi^2 + \delta'\xi^3,\ \beta''\xi^1 + \gamma''\xi^2 + \delta''\xi^3\}$$

care să aplice $\mathfrak{A}_{(30)}$ pe $\mathfrak{A}_{(28)}$, cu păstrarea înmulțirii, adică

(31) $$A(x^{(30)}y) = (Ax)^{(28)}(Ay) \text{ și } \det A \neq 0.$$

Notînd $\beta + 2\gamma + \delta = \sigma$, relația (31) conduce la sistemul

$$\beta' + 2\gamma' + \delta' = 0, \qquad \beta'' + 2\gamma'' + \delta'' = 0,$$

$$\nu\beta'\beta'' = \sigma, \qquad \nu\gamma''\beta' = -\sigma, \qquad \nu\delta''\beta' = \sigma,$$
$$\nu\beta''\gamma' = \sigma, \qquad \nu\gamma''\gamma' = \lambda\sigma, \qquad \nu\delta''\gamma' = -(2\lambda + 1)\sigma,$$
$$\nu\beta''\delta' = -3\sigma, \qquad \nu\gamma''\delta' = (-2\lambda + 1)\sigma, \qquad \nu\delta''\delta' = (4\lambda + 1)\sigma.$$

Pentru ca A să fie inversabilă ($\det A \neq 0$), trebuie să avem $\sigma \neq 0$. Se găsește că sistemul precedent este compatibil numai pentru $\lambda = -1$ și că $\det A = -2\sigma\beta'\beta'' \neq 0$.

Deci: pentru $\lambda = -1$, $\mathfrak{A}_{(30)} \cong \mathfrak{A}_{(28)}$.

Pentru $\lambda \neq 1$, algebrele slabe cu diviziune (30) nu sînt izomorfe cu algebra slabă cu diviziune (28).

6. Voi demonstra că, pentru valori diferite ale lui $\lambda \neq -1$, legea de înmulțire (30) definește algebre slabe cu diviziune neizomorfe între ele.

În primul rînd vom găsi o lege de înmulțire mai simplă pentru algebrele (30). Anume, aplicînd acestor algebre funcția liniară

$$\Phi(x) = \Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{\xi}^3) = \bar{x}$$

$$\Phi \begin{cases} \bar{\xi}^1 = \xi^1 \\ \bar{\xi}^2 = \overset{\circ}{\mu}_x = \xi^1 + \lambda\xi^2 - (2\lambda + 1)\xi^3 \\ \bar{\xi}^3 = \overset{\circ}{\nu}_x = -3\xi^1 + (-2\lambda + 1)\xi^2 + (4\lambda + 1)\xi^3 \end{cases} \qquad \text{cu } \det \Phi = \lambda + 1 \neq 0$$

se obține noua lege de înmulțire (30_1), care definește algebre izomorfe cu acele date de (30)

$$\Phi[x^{(30)}y] = \bar{x}^{(30_1)}\bar{y}$$

(30_1) $$\bar{x}^{(30_1)}\bar{y} = \{(\alpha\xi^2 + \beta\xi^3)\eta^2 + (\gamma\xi^2 + \delta\xi^3)\eta^3 + \xi^1 + \eta^1,\ \xi^2 + \eta^2,\ \xi^3 + \eta^3\}$$

(32) $$\text{cu } \alpha = \frac{1 + 4\lambda}{1 + \lambda}, \quad \beta = \frac{2\lambda - 1}{\lambda + 1}, \quad \gamma = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1}, \quad \delta = \frac{\lambda}{1 + \lambda}.$$

Notînd cu λ, λ' (respectiv $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$) două valori fixate diferite ale lui $\lambda\ (\neq -1)$, să căutăm dacă există un izomorfism între algebrele $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{A}_{\lambda'}$, date respectiv de legile de înmulțire

(30_1) $$x^\lambda y = \{(\alpha\xi^2 + \beta\xi^3)\eta^2 + (\gamma\xi^2 + \delta\xi^3)\eta^3 + \xi^1 + \eta^1,\ \xi^2 + \eta^2,\ \xi^3 + \eta^3\},$$
$$x^{\lambda'} y = \{(\alpha'\xi^2 + \beta'\xi^3)\eta^2 + (\gamma'\xi^2 + \delta'\xi^3)\eta^3 + \xi^1 + \eta^1,\ \xi^2 + \eta^2,\ \xi^3 + \eta^3\}.$$

Fie

$$A(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \{a\xi^1 + b\xi^2 + c\xi^3,\ a'\xi^1 + b'\xi^2 + c'\xi^3,\ a''\xi^1 + b''\xi^2 + c''\xi^3\}$$

care va trebui supusă la condiția

(33) $$A(x^\lambda y) = (Ax)^{\lambda'}(Ay).$$

Condiția (33) conduce la sistemul de ecuații

$$a' = 0, \qquad a'' = 0,$$

(34) $$\begin{aligned} (\alpha' b' + \beta' b'')b' + (\gamma' b' + \delta' b'')b'' &= a\alpha, \\ (\alpha' b' + \beta' b'')c' + (\gamma' b' + \delta' b'')c'' &= a\gamma, \\ (\alpha' c' + \beta' c'')b' + (\gamma' c' + \delta' c'')b'' &= a\beta, \\ (\alpha' c' + \beta' c'')c' + (\gamma' c' + \delta' c'')c'' &= a\delta, \end{aligned}$$

care este compatibil numai atunci cînd $\lambda = \lambda'$.

Deci *legea de înmulțire* (30_1), (*sau* (30)), *pentru valori diferite ale lui* $\lambda \neq -1$, *definește o infinitate de algebre slabe de ordin* 3, *cu diviziune, neizomorfe între ele.*

7. Toate algebrele slabe cu diviziune, puse în evidenţă în această Notă, se pot obţine din acele definite de înmulţirea (29).

1° Algebra slabă cu diviziune, cazul banal, $(6'_3)$ se obţine punînd

$$\gamma_{11}^3 = 0,\ \gamma_{21}^3 = \gamma_{12}^3 = 0,\ \gamma_{31}^3 = \gamma_{13}^3 = 1,\ \gamma_{23}^3 = \gamma_{32}^3 = 1,\ \gamma_{22}^3 = 0,\ \gamma_{33}^3 = 2.$$

2° Punînd în (29)

$$k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ \gamma_{11}^3 = 1,\ \gamma_{21}^3 = 0,\ \gamma_{31}^3 = \gamma_{13}^3 = 1,\ \gamma_{12}^3 = \gamma_{21}^3 = 0,\ \gamma_{22}^3 = 0,$$
$$\gamma_{32}^3 = \gamma_{23}^3 = 1,\ \gamma_{33}^3 = 2,$$

valori ce satisfac condiţiile $(25_1)\ldots(25'_3)$, se obţine legea de înmulţire

$$(\bar{6}_3) \qquad x^{\bar{6}} y = \{\xi^1 + \eta^1,\ \xi^2 + \eta^2 + \xi^1\eta^1,\ \xi^3 + \eta^3 + \xi^1\eta^1\}.$$

Dar, această algebră este izomorfă cu algebra $(6'_3)$, cum se poate constata, de exemplu, aplicînd algebrei $(6''_3)$ funcţia liniară definită de

$$A(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \{a\xi^1, b'\xi^2 + a^2\xi^3, a^2\xi^3\} \text{ cu } a \neq 0,\ b' \neq 0$$

şi

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = a^3 b' \neq 0$$

care este un izomorfism ce aplică $\mathfrak{A}_{(6''_3)}$ pe $\mathfrak{A}_{(\bar{6}_3)}$, căci

$$A(x^{6''} y) = \{a(\xi^1 + \eta^1),\ b'(\xi^2 + \eta^2) + a^2(\xi^3 + \eta^3 + \xi^1\eta^1),\ a^2(\xi^3 + \eta^3 + \xi^1\eta^1)\},$$
$$(Ax)^{\bar{6}}(Ay) = \{a(\xi^1 + \eta^1),\ b'(\xi^2 + \eta^2) + a^2(\xi^3 + \eta^3) + a^2\xi^1\eta^1,\ a^2(\xi^3 + \eta^3) + a^2\xi^1\eta^1\}$$
$$A(x^{6''} y) = (Ax)^{\bar{6}}(Ay).$$

3° Algebrele (30) s-au obţinut din (29), punînd

$$k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ \gamma_{11}^3 = 1,\ \gamma_{12}^3 = 1,\ \gamma_{21}^3 = -1,\ \gamma_{13}^3 = -2,\ \gamma_{31}^3 = 2,\ \gamma_{22}^3 = \lambda,$$
$$\gamma_{23}^3 = 2 - 2\lambda,\ \gamma_{32}^3 = -2\lambda,\ \gamma_{33}^3 = 4\lambda + 3.$$

4° Algebra cu tabela (28) s-a arătat că este izomorfă cu algebra (30) pentru $\lambda = -1$, deci se obţine din algebrele (30) punînd

$$k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ \gamma_{11}^3 = 1,\ \gamma_{12}^3 = 1,\ \gamma_{21}^3 = -1,\ \gamma_{13}^3 = -2,\ \gamma_{31}^3 = 2,\ \gamma_{22}^3 = -1,$$
$$\gamma_{23}^3 = 4,\ \gamma_{32}^3 = 2,\ \gamma_{33}^3 = -1.$$

Conform observaţiei 3, dacă corpul K — peste care sînt construite algebrele slabe — este corpul complex, avem toate aceste tipuri de algebre slabe cu diviziune; cînd K este un alt corp comutativ oarecare, avem *cel puţin* aceste tipuri.

În concluzie, oricare ar fi corpul comutativ K, există o infinitate de algebre slabe de ordin 3 peste K, ce sînt corpuri slabe.

BIBLIOGRAFIE

1 Climescu Al. — *Anneaux faibles*. Bul. Inst. Polit. Iaşi, f. 1—2, T. VII, 1961.
2 Dickson, E. L. — *On finite algebras*. Nachrichten Wiss. Göttingen, 1905.
3 Hall Marshall Jr. — *The theory of groups*. New York 1959.
4 Veblen O, Wedderburn M. J. H. — *Finite projective geometry*. Trans. Amer. Math. Soc. 8, 1907.

О СЛАБЫХ АЛГЕБРАХ С ДЕЛЕНИЕМ, ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Краткое содержание

Понятия слабого кольца, тела алгебры, введённые Климеском [1], определяются следующим образом. *Слебое колацо*, это-множество S с двумя операцйями, сложение и умножение удовлетворяющие аксиомам аддитивной абелевой группы и (1), (2), (3). *Слабое тело* (первого типа) это-слабое кольцо где и умножение удовлетворяет аксиомам группы. *Слабая алгебра*, над обычным ассоциативным и коммутативным кольцом с единицей R, в частности над коммутативным полем K, это-слабое кольцо $\mathfrak{A}$ допускающее R (или K) областью операторов и удовлетворяющее аксиомам $II_1 - II_4$, III_4. В частности, эти алгебры могут удовлетворять ещё аксиомам III_5, III_5, если и умножение является ассоциативной они суть слабые тела. Этих, мы называли алабыми алгебрами с делением. Справедлива [1]: *Теорема I*: Слабые тела которые суть слабые алгебры порядка $n=2$, над коммутативным полем K, коммутативны и существуют только две такие алгебры неизоморфны с законами умножения (6′) и (6″). В этой заметке, доказывается *Теорема II*: Слабые алгебры с делением порядка и которые даны через (6_n) с (7) существуют только двух видов $(6'_n)$ и $(6''_n)$. Разыскиваются слабые алгебры с делением порядка $n=3$; они определяются через (12), для которых достаточны (и необходимы когда K-алгебраически замкнутое поле) условия (14)—(19), (14′), (15′), (16′), (21)—(25′). Определяются следующие виды слабых алгебр третьего порядка с делением: $(6'_3)$, $(6''_3)$, (28), (30) (при $\lambda \neq -1$); для различных значений λ, (30) представляет бесконечное число слабых алгебр, неизоморфные между собой. Все выявленные виды являются частными случаями вида (29), который удовлетворяет условиям $(25_1)-(25'_3)$.

ON DIVISION WEAK-ALGEBRAS OF ORDER 3

Abstract

The concepts of *weak-ring*, *weak-field*, *weak-algebra* introduced by Climescu [1], are defined as follows: A *weak-ring* is a set S with two binary operations, addition and multiplication, which satisfy the laws of an additive abelian group and (1), (2), (3). A *weak-field* (of species *I*) is a weak-ring which is also a multiplicative group. A *weak-al-*

gebra — over an (ordinary) associative, commutative and unitary ring R, or over a commutative field K — is a weak-ring $\mathfrak{A}$ with R (or K) as operator set, the product function αx, $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{A}$, satisfying the laws II_1—II_4 and III_1; particularly, these algebras can satisfy III_5, $III_{5'}$ and — if the multiplication is associative — they are weak-fields, let us name them *division weak-algebras*. It holds, [1], the following: *Theorem I.* The weak-fields which are also weak-algebras of order $n = 2$, over a commutative field K, are commutative and there exist only two non-isomorphic such weak-fields, namely those given by the multiplicative laws (6′), (6″). In the present Note, it is proved: *Theorem II.* The division weak algebras of order n, defined by (6_n), with (7), represent only two non-isomorphic weak-fields, given by $(6'_n)$, $(6''_n)$. We construct division weak-algebras of order $n = 3$; they are given by (12), with the sufficient (and necessary, if K is algebraically closed) conditions (14)—(19), (14′), (15′), (16′), (21)—(25′). Thus we found the following types of non-isomorphic division weak-algebras of order 3: $(6'_3)$, $(6''_3)$, (28), (30) (with $\lambda \neq -1$); for different $\lambda \in K$, (30) defines an infinity of non-isomorphic weak-fields. All the above types can be deduced from (29), for which (25_1)—$(25'_3)$ hold.

UN ÉTUDE GLOBALE DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI GÉNÉRALISENT LES SYSTÈMES DE PFAFF

PAR

ADOLF HAIMOVICI

Nous nous sommes occupé récemment [1] du système

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = f_{(i)i}(x;\ u_i;\ u_{(i)i_2};\ \ldots;\ u_{1,2,\ldots,n}),\\
&\frac{\partial u_{i_1 i_2}}{\partial x_{i_1}} = f_{(i_1 i_2)i_1}(x;\ u_{i_2};\ u_{i_1 i_2};\ \ldots;\ u_{1,2,\ldots,n}),\\
&\frac{\partial u_{i_1 i_2}}{\partial x_{i_2}} = f_{(i_1 i_2)i_2}(x;\ u_{i_1};\ u_{i_1 i_2};\ \ldots;\ u_{1,2\ldots n}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u_{1,2,\ldots,n}}{\partial x_i} = f_{(1,2,\ldots,n)i}(x;\ u_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n};\ u_{1,2,\ldots,n}),
\end{aligned}
\right.
$$

où nous avons noté:

par x un vecteur de composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

par u_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, n vecteurs à k_i composantes,

par $u_{i_1 i_2} = u_{i_2 i_1}$ $(i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, n)$ $i_1 \neq i_2$, $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs à k_2 composantes,

. . . . . .

par $u_{1,2,\ldots,n}$ un vecteur à k_n composantes,