gebra — over an (ordinary) associative, commutative and unitary ring R, or over a commutative field K — is a weak-ring $\mathfrak{A}$ with R (or K) as operator set, the product function αx, $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{A}$, satisfying the laws $II_1 - II_4$ and III_1; particularly, these algebras can satisfy III_5, $III_{5'}$ and — if the multiplication is associative — they are weak-fields, let us name them *division weak-algebras*. It holds, [1], the following: *Theorem I.* The weak-fields which are also weak-algebras of order $n = 2$, over a commutative field K, are commutative and there exist only two non-isomorphic such weak-fields, namely those given by the multiplicative laws (6′), (6″). In the present Note, it is proved: *Theorem II.* The division weak algebras of order n, defined by (6_n), with (7), represent only two non-isomorphic weak-fields, given by $(6'_n)$, $(6''_n)$. We construct division weak-algebras of order $n = 3$; they are given by (12), with the sufficient (and necessary, if K is algebraically closed) conditions (14)—(19), (14′), (15′), (16′), (21)—(25′). Thus we found the following types of non-isomorphic division weak-algebras of order 3: $(6'_3)$, $(6''_3)$, (28), (30) (with $\lambda \neq -1$); for different $\lambda \in K$, (30) defines an infinity of non-isomorphic weak-fields. All the above types can be deduced from (29), for which (25_1)—$(25'_3)$ hold.

UN ÉTUDE GLOBALE DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI GÉNÉRALISENT LES SYSTÈMES DE PFAFF

PAR

ADOLF HAIMOVICI

Nous nous sommes occupé récemment [1] du système

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = f_{(i)i}(x;\ u_i;\ u_{i_1 i_2};\ \ldots;\ u_{1,2,\ldots,n}),\\
&\frac{\partial u_{i_1 i_2}}{\partial x_{i_1}} = f_{(i_1 i_2)i_1}(x;\ u_{i_1};\ u_{i_1 i_2};\ \ldots;\ u_{1,2,\ldots,n}),\\
&\frac{\partial u_{i_1 i_2}}{\partial x_{i_2}} = f_{(i_1 i_2)i_2}(x;\ u_{i_1};\ u_{i_1 i_2};\ \ldots;\ u_{1,2\ldots n}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u_{1,2,\ldots,n}}{\partial x_i} = f_{(1,2,\ldots,n)i}(x;\ u_{1,2,\ldots,i-1,\,i+1,\ldots,n};\ u_{1,2,\ldots,n}),
\end{aligned}
\right.
$$

où nous avons noté:

par x un vecteur de composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

par u_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, n vecteurs à k_1 composantes,

par $u_{i_1 i_2} = u_{i_2 i_1}$ $(i_1, i_2 = 1, 2 \ldots, n)$ $i_1 \neq i_2$, $\frac{n(n-1)}{2}$ vecteurs à k_2 composantes,

. . . . . .

par $u_{1,2,\ldots,n}$ un vecteur à k_n composantes,

sous certaines conditions restrictives pour les fonctions $f_{(i_1, \ldots, i_p)i_q}$; plus précisément nous avons étudié l'existence et l'arbitrariété de l'intégrale d'un tel système, du point de vue local.

Nous allons nous occuper maintenant du même problème du point de vue global.

§ 1. *Position du problème.* Pour simplifier la notation, nous allons nous placer sans le cas $n = 3$; nous désignerons par

x un vecteur de composantes x_1, x_2, x_3,

$u_i\ (i = 1,2,3)$ trois vecteurs à k_i composantes respectivement,

$u_{ij} = u_{ji}, i, j = 1,2,3, i \neq j$ trois vecteurs à k_{ij} composantes respectivement,

u_{123} un vecteur à k_{123} composantes.

Nous supposons satisfaites les hypothèses suivantes:

A. *Ω est un domaine simplement connexe de R^3, qui peut être approximé par un ensemble F fermé et simplement connexe, réunion de parallélépipèdes aux arêtes parallèles aux axes Ox_1, Ox_2, Ox_3, tous ces parallélépipèdes ayant un point intérieur commun.*

B. a) *Les fonctions-vecteur $f_{(i)i}\ (x;\ u_r;\ u_{rs};\ u_{123})$ de $3 + K = 3 + k_1 + k_2 + k_3 + k_{12} + k_{23} + k_{31} + k_{123}$ variables sont de classe C^1 sur des domaines $\Omega \times R^K$ respectivement.*

b) *Les fonctions-vecteurs $f_{(iji)}\ (x;\ u_j;\ u_{ji};\ u_{jk};\ u_{123})$ de $3 + K_j = 3 + k_j + k_{ji} + k_{jk} + k_{123}$ variables sont de classe C^1 sur des domaines $\Omega \times R^{K_j}$ respectivement.*

c) *Les fonctions-vecteur $f_{(123)1}\ (x;\ u_{23};\ u_{123})$ de $3 + K_{23} = 3 + k_{23} + k_{123}$ variables, $f_{(123)2}\ (x;\ u_{13};\ u_{123})$ de $3 + K_{13} = 3 + k_{13} + k_{123}$, $f_{(123)3}\ (x;\ u_{12};\ u_{123})$ de $3 + K_{12} = 3 + k_{12} + k_{123}$ variables sont de classe C^1 sur les domaines $\Omega \times R^{K_{23}}$, $\Omega \times R^{K_{13}}$, $\Omega \times R^{K_{12}}$ respectivement.*

C. *Les fonctions $f_{(i)i}, f_{(ij)i}, f_{(123)i}$ satisfont sur $\Omega \times R^K$ aux inégalités*

$$(2)\qquad \begin{cases} |f_{(i)i}|,\ |f_{(ij)i}|,\ |f_{(ijk)i}| \leqslant M, \\ |Df_{(i)i}|,\ |Df_{(ij)i}|,\ |Df_{(ijk)i}| \leqslant M_1, \end{cases}$$

D étant un symbole de dérivation du premier ordre, par rapport à une variable quelconque. *Sur le même domaine $\Omega \times R^K$, les fonctions $f_{(i)i}, f_{(ij)i}, f_{(ijk)i}$ satisfont aux conditions:*

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_{(ij)i}}{\partial x_j} + \sum\limits_k \dfrac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_k} f_{(k)k} + \sum\limits_{(j,k)} \dfrac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_{jk}} f_{(jk)j} + \dfrac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_{123}} f_{(123)j} = \\ \quad = \dfrac{\partial f_{(ij)j}}{\partial x_i} + \sum\limits_k \dfrac{\partial f_{(ij)j}}{\partial u_k} f_{(k)k} + \sum\limits_{(i,k)} \dfrac{\partial f_{(ij)j}}{\partial u_{ik}} f_{(ik)i} + \dfrac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_{123}} f_{(123)i}, \\ \dfrac{\partial f_{(ijk)i}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_{(ijk)i}}{\partial u_{jk}} f_{(jk)j} + \dfrac{\partial f_{(ijk)i}}{\partial u_{123}} f_{(123)j} = \\ \quad = \dfrac{\partial f_{(ijk)j}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial f_{(ijk)j}}{\partial u_{ik}} f_{(ik)i} + \dfrac{\partial f_{(ijk)i}}{\partial u_{123}} f_{(123)i} \end{cases}$$

i, j, k — indices différents.

D. *soient* a) $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in F$, *un point commun à tous les parallélépipèdes dont la réunion est F;*

b) $\varphi_i(x_j, x_k)$ (i, j, k indices différents) *trois fonctions-vecteur de classe C, définies sur des domaines ω_{jk}, tels que* $(x_k^0, x_i, x_j) \in F$ [1]).

c) $u_{ij} = \varphi_{ij}\ (x_k)$ (i, j, k toujours différents) *trois fonctions de classe C définies sur des intervalles ω_k, tels que* $(x_i^0, x_j^0, x_k) \in F$;

d) φ_{123} *est une constante arbitraire.*

Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant:

Si les fonctions $f_{(i)i}, f_{(ij)i}, f_{(ij)j}, f_{(123)i}$ sont des fonctions-vecteur qui satisfont aux conditions **A, B, C** *alors le système*

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = f_{(i)i}\ (x;\ u_r;\ u_{rs}, u_{123}); \\ \dfrac{\partial u_{12}}{\partial x_1} = f_{(12)1}\ (x;\ u_2;\ u_{23};\ u_{21};\ u_{123}); \quad \dfrac{\partial u_{12}}{\partial x_2} = f_{(12)2}\ (x;\ u_1;\ u_{13}; u_{12};\ u_{123}) \\ \dfrac{\partial u_{23}}{\partial x_2} = f_{(23)2}\ (x;\ u_3;\ u_{31};\ u_{32};\ u_{123}); \quad \dfrac{\partial u_{23}}{\partial x_3} = f_{(23)3}(x;\ u_2;\ u_{21};\ u_{23};\ u_{123}); \\ \dfrac{\partial u_{31}}{\partial x_3} = f_{(31)3}\ (x;\ u_1;\ u_{12};\ u_{13};\ u_{123}); \quad \dfrac{\partial u_{31}}{\partial x_1} = f_{(31)1}\ (x;\ u_3;\ u_{32};\ u_{31};\ u_{123}); \\ \dfrac{\partial u_{123}}{\partial x_1} = f_{(123)1}\ (x;\ u_{23};\ u_{123}); \quad \dfrac{\partial u_{123}}{\partial x_2} = f_{(123)2}\ (x;\ u_{13};\ u_{123}); \\ \dfrac{\partial u_{123}}{\partial x_3} = f_{(123)3}\ (x;\ u_{12};\ u_{123}) \end{cases}$$

admet une intégrale unique $u_i = u_i(x)$, $u_{ij} = u_{ij}(x)$, $u_{123} = u_{123}(x)$ définie sur F, qui satisfait aux conditions:

$$(5)\qquad \begin{cases} u_i(x_i^0, x_j, x_k) = \varphi_i(x_j, x_k), \quad u_{ij}(x_i^0, x_j^0, x_k) = \varphi_{ij}(x_k), \\ u_{123}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \varphi_{123}, \end{cases}$$

où les fonctions φ_i, φ_{ij}, et le point (x_1^0, x_2^0, x_3^0) satisfont à la condition **D.**

---

[1]) Pour simplifier la notation, nous allons noter par (x_i, x_j, x_k) le point dont la i-ème coordonnée est x_i, la j-ème est x_j, et la k-ème est x_k; ainsi, par exemple, (x_2, x_3, x_1) est le point qu'on désigne habituellement par (x_1, x_2, x_3). De même $f(x_i, x_j, x_k)$ est la valeur de f au point dont la i-ème coordonnée est x_i, le j-ème est x_j, le k-ème est x_k.

§ 2. *Étude d'un système d'équations intégrales attaché au système* (4) (5). Considérons l'espace S des familles de sept fonctions-vecteur

$$u_i = u_i(x), \quad u_{ij} = u_{ij}(x), \quad u_{123} = u_{123}(x)$$

de classe C définies sur Ω, qui satisfassent à:

$$(6) \qquad \begin{cases} u_i(x)\big|_{x_i = x_i^\circ} = \varphi_i(x_j, x_k), \\ u_{ij}(x)\big|_{x_i = x_i^\circ,\, x_j = x_j^\circ} = \varphi_{ij}(x), \\ u_{123}(x)\big|_{x_1 = x_1^\circ,\, x_2 = x_2^\circ,\, x_3 = x_3^\circ} = \varphi_{123}; \end{cases}$$

nous allons désigner, d'une manière générique une des fonctions-vecteur précédentes par $z_a (a = 1, 2, \ldots, 7)$.

Dans cet espace introduisons la métrique

$$(7) \qquad \varrho(z_a, z'_a) = \sup_{i = 1, 2, \ldots, 7} \max_{x_i \in E} \left\{ |z_i - z'_i| \, e^{-\tau \sum |x_i - x_i^\circ|} \right\},$$

où τ est une constante qui satisfait à

$$(8) \qquad \tau > 7 M_1 .$$

Doué de cette métrique, l'espace S des systèmes de vecteurs z est complet.

Considérons dans l'espace S l'opérateur

$$(9) \qquad \bar{z} = Az,$$

où A est défini par:

$$(10) \qquad \begin{cases} \bar{u}_i = \varphi(x_j, x_k) + \int_{x_i^\circ}^{x_i} f_{(i)i}(x; u_r; u_{rs}; u_{123})\, dx_i, \\ \bar{u}_{ij} = \varphi_{ij}(x_k) + \int_{x_i^\circ}^{x_i} f_{(ij)i}(x; u_i; u_{ji}; u_{jk}; u_{123})\big|_{x_j = x_j^\circ} dx_i + \\ \quad + \int_{x_j^\circ}^{x_j} f_{(ij)j}(x; u_i; u_{ij}; u_{ik}; u_{123})\, dx_j, \\ \bar{u}_{123} = \varphi_{123} + \int_{x_1^\circ}^{x_1} f_{(123)1}(x; u_{23}; u_{123})\big|_{x_2 = x_2^\circ,\, x_3 = x_3^\circ} dx_1 + \\ \quad + \int_{x_2^\circ}^{x_2} f_{(123)2}(x; u_{13}; u_{123})\big|_{x_3 = x_3^\circ} dx_2 + \int_{x_3^\circ}^{x_3} f_{(123)3}(x; u_{12}; u_{123})\, dx_3, \\ \quad (x_1, x_2, x_3) \in D \\ u_{ij} = u_{ji}, \; i, j, k \text{ — indices differents}, \; i < j. \end{cases}$$

L'operateur A admet un élément fixe. En effet, on constate:

a) *qu'il transforme l'espace S en lui même*, parce que le système de vecteurs $\bar{u}_i$, $\bar{u}_{ij}$, $\bar{u}_{123}$ est formé de vecteurs continus, qui satisfont aux relations (5); et

b) *qu'il est contractant*, parce que, si

$$z(u_i, u_{ij}, u_{123}), \quad z'(u'_i, u'_{ij}, u'_{123})$$

sont deux vecteurs de S et

$$\bar{z}(\bar{u}_i, \bar{u}_{ij}, \bar{u}_{123}), \quad \bar{z}'(\bar{u}'_i, \bar{u}'_{ij}, \bar{u}'_{123})$$

leurs transformés, alors on a

$$|\bar{u}'_i - \bar{u}_i| \leqslant \int_{x_i^\circ}^{x_i} |f_{(i)i}(x; u'_r; u'_{rs}; u'_{123}) - f_{(i)i}(x; u_r; u_{rs}; u_{123})|\, dx_i \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_i^\circ}^{x_i} M_1 \left(\sum_{a=1}^{7} |z'_a - z_a| \, e^{-\tau \sum |x_i - x_i^\circ|} \right) e^{\tau \sum |x_i - x_i^\circ|}\, dx_i \leqslant$$

$$\leqslant \frac{7 M_1}{\tau} \varrho(z, z') \, e^{\tau \sum |x_i - x_i^\circ|}$$

d'où

$$|\bar{u}_i - \bar{u}'_i| \, e^{-\tau \sum |x_i - x_i^\circ|} \leqslant \frac{7 M_1}{\tau} \varrho(z, z').$$

D'une manière analogue, on obtient des autres égalités (10):

$$|\bar{u}_{ij} - \bar{u}'_{ij}| \, e^{-\tau \sum |x_i - x_i^\circ|} \leqslant \frac{4 M_1}{\tau} \varrho(z, z'),$$

$$|\bar{u}_{123} - \bar{u}'_{123}| \, e^{-\tau \sum |x_i - x_i^\circ|} \leqslant \frac{2 M_1}{\tau} \varrho(z, z').$$

En tenant compte de (8), la conclusion est évidente. Il résulte alors que le système d'équations intégrales

$$
(11)\quad \begin{cases}
u_i = \varphi_i(x_j, x_k) + \int\limits_{x_i^\circ}^{x_i} f_{(i)i}(x;\ u_r;\ u_{rs};\ u_{123})\, dx_i, \\[2ex]
u_{ij} = \varphi_{ij}(x_k) + \int\limits_{x_i^\circ}^{x_i} f_{(ij)i}(x;\ u_j;\ u_{ji};\ u_{jk};\ u_{123})\big|_{x_j = x_j^\circ}\, dx_i + \\[2ex]
\quad + \int\limits_{x_j^\circ}^{x_j} f_{(ij)j}(x;\ u_i;\ u_{ij};\ u_{ik};\ u_{123})\, dx_j, \\[2ex]
u_{123} = \varphi_{123} + \int\limits_{x_1^\circ}^{x_1} f_{(123)1}(x;\ u_{23};\ u_{123})\big|_{x_2 = x_2^\circ,\ x_3 = x_3^\circ}\, dx_1 + \\[2ex]
\quad + \int\limits_{x_2^\circ}^{x_2} f_{(123)2}(x;\ u_{13};\ u_{123})\big|_{x_3 = x_3^\circ}\, dx_2 + \int\limits_{x_3^\circ}^{x_3} f_{(123)3}(x;\ u_{12};\ u_{123})\, dx_3
\end{cases}
$$

admet une solution unique, dans la classe des systèmes de sept fonctions-vecteur continues qui satisfont à (5).

§ 3. *Relations entre le système d'équations intégrales* (11) *et le système d'équations aux dérivées partielles* (4).

Nous allons démontrer que la solution du système (11) satisfait au système (4).

Remarquons d'abord que de (11) on déduit:

$$
(12)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = f_{(i)i}(x;\ u_r;\ u_{rs};\ u_{123}), \\[2ex]
\dfrac{\partial u_{12}}{\partial x_2} = f_{(12)2}(x;\ u_1;\ u_{12};\ u_{13};\ u_{123}), \\[2ex]
\dfrac{\partial u_{23}}{\partial x_3} = f_{(23)3}(x;\ u_2;\ u_{21};\ u_{23};\ u_{123}), \\[2ex]
\dfrac{\partial u_{13}}{\partial x_3} = f_{(13)3}(x;\ u_1;\ u_{12};\ u_{13};\ u_{123}), \\[2ex]
\dfrac{\partial u_{123}}{\partial x_3} = f_{(123)3}(x;\ u_{12};\ u_{123}).
\end{cases}
$$

Pour abréger l'écriture, notons:

$$
(13)\quad \begin{cases}
P_{(ij)i} = \dfrac{\partial f_{(ij)i}}{\partial x_j} + \sum\limits_k \dfrac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_j} f_{(i)j} + \sum\limits_{jk} \dfrac{f_{(ij)i}}{\partial u_{jk}} f_{(jk)i} + \dfrac{\partial f_{(ij)i}}{\partial u_{123}} f_{(123)j}, \\[2ex]
P_{(123)ij} = \dfrac{\partial f_{(123)i}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial f_{(123)i}}{\partial u_{jk}} f_{(jk)j} + \dfrac{\partial f_{(123)i}}{\partial u_{123}} f_{(123)j}, \\[2ex]
\Delta u = \dfrac{1}{x_2' - x_2}\left(u(x_1, x_2', x_3) - u(x_1, x_2, x_3)\right), \quad (x_1, x_2, x_3) \in F.
\end{cases}
$$

Alors, de (11), en utilisant le théorème de la moyenne du calcul différentiel, ainsi que celui du calcul intégral, il résulte:

$$
(14)\quad \begin{cases}
\Delta u_{23} = (f_{(23)2})^*_{x_3 = x_3^\circ} + \int\limits_{x_3^\circ}^{x_3} \left\{ \left(\dfrac{\partial f_{(23)3}}{\partial x_2}\right)^* + \left(\dfrac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_2} f_{(2)2}\right)^* + \right. \\[2ex]
\quad \left. + \left(\dfrac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{23}}\right)^* \Delta u_{23} + \left(\dfrac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{12}} f_{(12)2}\right)^* + \left(\dfrac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{123}}\right)^* \Delta u_{123} \right\} dx_3,
\end{cases}
$$

où par $(F(x_1, x_2, x_3))^*$ nous avons désigné la valeur de F, au point $(x_1, x_2 + \theta(x_2' - x_2), x_3^\circ)$, $(|\theta| < 1)$. En tenant compte du fait que les dérivées de $f_{(23)3}$ sont bornées, nous pouvons écrire:

$$
|\Delta u_{23}| \leqslant M_1' + \int\limits_{x_3^\circ}^{x_3} \{ M_1' |\Delta u_{23}| + M_1' |\Delta u_{123}| + S \}\, dx_3,
$$

M_1' et S étant des constantes convenablement choisies.

En procédant de la même manière sur Δu_{123}, nous obtenons.

$$
|\Delta u_{123}| \leqslant M_1' + \int\limits_{x_3^\circ}^{x_3} \{ M_1' |\Delta u_{123}| + S' \}\, dx_3,
$$

S' étant également une constante.

En utilisant une généralisation du lemme de Gronwall (voir [1]), on obtient:

$$
|\Delta u_{23}|, \quad |\Delta u_{123}| \leqslant m,
$$

m étant une nouvelle constante.

Ceci posé, (14) s'écrit sous la forme:

$$\Delta u_{23} = f_{(23)2}\big|_{x_3 = x_3^\circ} + \int_{x_3^\circ}^{x_3} \left\{ P_{(23)3} + \left(\frac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{23}}\right)^{\cdot} (u_{23} - f_{(23)2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{123}} (u_{123} - f_{(123)2}) + \Phi \right\} dx_3 + \Phi_1 ,$$

où

$$\Phi = \left(\frac{\partial f_{(23)3}}{\partial x_2}\right)^{\cdot} - \frac{\partial f_{(23)2}}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_2} f_{(2)2}\right)^{\cdot} - \frac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_2} f_{(2)2} +$$

$$+ f_{(23)2} \left[\left(\frac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{23}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{23}} \right] + \left(\frac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{12}} f_{(12)2}\right)^{\cdot} -$$

$$- \frac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{12}} f_{(12)2} + f_{(123)2} \left[\left(\frac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{123}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial f_{(23)3}}{\partial u_{123}} \right],$$

$$\Phi_1 = (f_{(23)2})^{\cdot}\big|_{x_3^\circ} - f_{(23)2}\big|_{x_3^\circ} .$$

Comme conséquence de l'hypothèse, il résulte que si l'on prend $\sigma > 0$, arbitraire, on peut trouver α, tel que si $|x_2' - x_2| < \alpha$, on ait

$$|\Phi| , \quad |\Phi_1| < \sigma . \tag{15}$$

On tire alors de (14)

$$|u_{23} - f_{(23)2}| \leqslant \int_{x_3^\circ}^{x_3} \{ M |u_{23} - f_{(23)2}| + M |\Delta u_{123} - f_{(123)2}| + N \} dx_3 + Q ,$$

où

$$0 \leqslant N \leqslant \sigma , \quad 0 \leqslant Q \leqslant \sigma .$$

De la même manière, on déduit :

$$|u_{123} - f_{(123)2}| = \int_{x_3^\circ}^{x_3} \{ M |u_{123} - f_{(123)2}| + N' \} dx_3 + Q' ;$$

comme plus haut :

$$0 \leqslant N' \leqslant \sigma , \quad 0 \leqslant Q' \leqslant \sigma .$$

En utilisant la même généralisation du lemme de Gronwall, dont nous avons parlé plus haut, nous obtenons

$$\left\{ \begin{aligned} |u_{23} - f_{(23)2}| &\leqslant (2A + 1)\sigma \; e^{2MA} , \\ |u_{123} - f_{(123)2}| &\leqslant (2A + 1)\sigma \; e^{2MA} , \end{aligned} \right. \quad 0 \leqslant A \leqslant M . \tag{16}$$

Comme σ est arbitraire, il résulte que u_{23} et u_{123} admettent des limites quand x_2' tend vers x_2, que ces limites sont $\partial u_{23}/\partial x_2$, et $\partial u_{123}/\partial x_2$, et que

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_{23}}{\partial x_2} &= f_{(23)2} (x ; u_3 ; u_{31} ; u_{32} ; u_{123}) , \\ \frac{\partial u_{123}}{\partial x_2} &= f_{(123)2} (x ; u_{13} ; u_{123}) . \end{aligned} \right. \tag{17}$$

En procédant d'une manière analogue, on démontre que la solution du système d'équations intégrales (11) satisfait à

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_{13}}{\partial x_1} &= f_{(13)1} (x ; u_3 ; u_{31} ; u_{32} ; u_{123}) , \\ \frac{\partial u_{123}}{\partial x_1} &= f_{(123)1} (x ; u_{23} ; u_{123}) . \end{aligned} \right. \tag{18}$$

De cette manière nous avons démontré que la solution du système (11) satisfait aussi à (4) et, bien entendu, à (5), pour tout point de D.

Comme, d'autre part, chaque solution de (4) et (5) est une solution de (11), il résulte que l'intégrale du système donné qui généralise le système de Pfaff, est unique.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Haimovici — *Sisteme de ecuații diferențiale complet integrabile care generalizează sistemele pfaffiene*. Acta Universitatis „Babeş-Bolyai" Cluj. Series Mathematica-Physica 1962, p. 81.

STUDIUL GLOBAL AL UNOR SISTEME DE ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE CARE GENERALIZEAZĂ SISTEMELE PFAFF

Rezumat

Se studiază sistemul (5), în care *a)* u, $u_{ij} = u_{ji}$, u_{123} sînt vectori, *b)* membrii secunzi sînt de clasă C^1 pe domeniul produs cartezian dintre un domeniu $\Omega \subset R^3$ și spațiul întreg al variabilelor u_i, u_{ij}, u_{123}; Ω este un domeniu care poate fi aproximat cu o reuniune F de paralelipipede închise cu muchiile paralele cu axele, avînd un punct interior comun. Se demonstrează că sistemul (5) admite o integrală unică care satisface (5) pe orice F. Pentru demonstrație se consideră sistemul de ecuații integrale (11); se arată că acesta admite o soluție unică în orice F; se arată apoi că soluția sistemului (11) este soluție și pentru (4), cu condițiile (5).

ИССЛЕДОВАНИЕ В ЦЕЛОМ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ОБОБЩАЮЩИЕ СИСТЕМЫ ПФАФФА

Краткое содержание

Изучается система (4), в которой *а*) u_i, $u_{ij} = u_{ji}$, u_{123} некоторые векторы, *б*) правые части принадлежат классу C^1 в некоторой области-декартовое произведение между областью $\Omega \subset R^3$ и всё пространство переменных u_i, u_{ij}, u_{123}; Ω есть некоторая область могущая быть апроксимированной с соединением F замкнутых параллелепипедов, с рёбрами параллельными с осями, имеющие общую внутреную точку. Доказывается что система (4) имеет единственный интеграл удовлетворяющий (5) на всяком F.

Для доказательства принимается во внимание система интегральных уравнений (11); показывается что она имеет единственное решение во всяком B, показывается потом что решение системы (11), является решением и для (4), с условиями (5).

ASUPRA UTILIZĂRII SOLUŢIILOR ε-APROXIMATIVE LA DEMONSTRAREA EXISTENŢEI SOLUŢIILOR UNOR PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU SISTEME DIFERENŢIALE ORDINARE

DE

C. AVRAMESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Universităţii „Al. I. Cuza" din 26—27 octombrie 1963

1. Metoda soluţiilor ε-aproximative care, după cum se ştie, se foloseşte pentru demonstrarea existenţei soluţiei problemei lui Cauchy, poate fi utilizată şi în cazul unor probleme la limită. În acest ultim caz însă, spre deosebire de cazul problemei lui Cauchy, soluţiile ε-aproximative nu vor mai trece toate prin acelaşi punct, ci fiecare în parte va trece printr-un alt punct, convenabil ales.

Pentru a fi mai expliciţi în ceea ce priveşte ideea metodei pe care o propunem, să ne referim, de pildă, la cazul concret al următoarei probleme la limită:

$$x' = f(t, x, y), \qquad y' = g(t, x, y), \tag{1}$$

$$F(x(a), y(a)) = 0, \qquad G(x(b), y(b)) = 0, \tag{2}$$

unde f şi g sînt funcţii continue pe mulţimea

$$D\{t \in [a, b], \quad |x| \leqslant K, \quad |y| \leqslant K'\},$$

iar funcţiile $F(u, v)$, $G(u, v)$ sînt continue pe mulţimea

$$D_1\{|u| \leqslant L, \quad |v| \leqslant L'\}; \quad L \leqslant K, \quad L' \leqslant K'.$$

Fie ε un număr pozitiv oarecare şi fie de asemenea (x_0, y_0) un punct arbitrar din D_1. Să construim, în modul cunoscut (vezi de exemplu [1]) soluţia ε-aproximativă care pleacă din punctul (a, x_0, y_0) unde am notat $x_0 = x(a)$, $y_0 = y(a)$. Să presupunem că această soluţie ε-aproximativă este definită pe întreg intervalul $[a, b]$. Acest lucru se întîmplă dacă lungimea intervalului $[a, b]$ este suficient de mică, sau dacă numerele K