ИССЛЕДОВАНИЕ В ЦЕЛОМ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ОБОБЩАЮЩИЕ СИСТЕМЫ ПФАФФА

Краткое содержание

Изучается система (4), в которой *а*) u_i, $u_{ij} = u_{ji}$, u_{123} некоторые векторы, *б*) правые части принадлежат классу C^1 в некоторой области-декартовое произведение между областью $\Omega \subset R^3$ и всё пространство переменных u_i, u_{ij}, u_{123}; Ω есть некоторая область могущая быть апроксимированной с соединением F замкнутых параллелепипедов, с рёбрами параллельными с осями, имеющие общую внутреннюю точку. Доказывается что система (4) имеет единственный интеграл удовлетворяющий (5) на всяком F.

Для доказательства принимается во внимание система интегральных уравнений (11); показывается что она имеет единственное решение во всяком B, показывается потом что решение системы (11), является решением и для (4), с условиями (5),

ASUPRA UTILIZĂRII SOLUŢIILOR ε-APROXIMATIVE LA DEMONSTRAREA EXISTENŢEI SOLUŢIILOR UNOR PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU SISTEME DIFERENŢIALE ORDINARE

DE

C. AVRAMESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Universităţii „Al. I. Cuza" din 26—27 octombrie 1963

1. Metoda soluţiilor ε-aproximative care, după cum se ştie, se foloseşte pentru demonstrarea existenţei soluţiei problemei lui Cauchy, poate fi utilizată şi în cazul unor probleme la limită. În acest ultim caz însă, spre deosebire de cazul problemei lui Cauchy, soluţiile ε-aproximative nu vor mai trece toate prin acelaşi punct, ci fiecare în parte va trece printr-un alt punct, convenabil ales.

Pentru a fi mai expliciţi în ceea ce priveşte ideea metodei pe care o propunem, să ne referim, de pildă, la cazul concret al următoarei probleme la limită:

$$x' = f(t, x, y), \qquad y' = g(t, x, y), \tag{1}$$

$$F(x(a), y(a)) = 0, \qquad G(x(b), y(b)) = 0, \tag{2}$$

unde f şi g sînt funcţii continue pe mulţimea

$$D\{t \in [a, b], \quad |x| \leqslant K, \quad |y| \leqslant K'\},$$

iar funcţiile $F(u, v)$, $G(u, v)$ sînt continue pe mulţimea

$$D_1\{|u| \leqslant L, \quad |v| \leqslant L'\}; \quad L \leqslant K, \quad L' \leqslant K'.$$

Fie ε un număr pozitiv oarecare şi fie de asemenea (x_0, y_0) un punct arbitrar din D_1. Să construim, în modul cunoscut (vezi de exemplu [1]) soluţia ε-aproximativă care pleacă din punctul (a, x_0, y_0) unde am notat $x_0 = x(a)$, $y_0 = y(a)$. Să presupunem că această soluţie ε-aproximativă este definită pe întreg intervalul $[a, b]$. Acest lucru se întîmplă dacă lungimea intervalului $[a, b]$ este suficient de mică, sau dacă numerele K

şi K' sînt destul de mari.) Valoarea soluţiei ε-aproximative în punctul b va fi, ţinînd seama de ipotezele făcute, o funcţie continuă de x_0, y_0, ceea ce se poate exprima astfel:

$$\begin{cases} x(b) = \varphi_\varepsilon(x_0, y_0) \\ y(b) = \psi_\varepsilon(x_0, y_0), \end{cases}$$

unde φ şi ψ sînt continue pe D_1.

Să presupunem acum că avem un şir de soluţii ε-aproximative care converge uniform la o soluţie a sistemului (1); dacă fiecare soluţie ε-aproximativă din şir ar satisface condiţiei (2), atunci, în baza continuităţii funcţiilor F şi G, acelaşi lucru s-ar întîmpla şi cu soluţia obţinută prin trecere la limită. Problema se reduce aşadar la a găsi condiţii suficiente ca fiecare soluţie ε-aproximativă să satisfacă condiţiei (2). Cu alte cuvinte, ţinînd seama de cele de mai sus, e suficient să găsim condiţii pentru ca sistemul

$$F(u, v) = 0, \quad G_1(u, v) = G(\varphi_\varepsilon(u, v), \psi_\varepsilon(u, v)) = 0, \tag{3}$$

unde F şi G_1 sînt funcţii continue în D_1, să aibă soluţii în această mulţime, oricare ar fi ε.

2. Vom enunţa acum un rezultat, datorit lui C. Miranda [4], care ne oferă o condiţie suficientă pentru ca un sistem de forma (3) să admită soluţii. Acest rezultat e cuprins în următoarea

Lemă. Fie funcţiile $F(u, v)$, $G(u, v)$, continue pe mulţimea D_1, satisfăcînd condiţiilor;

$$\begin{cases} F(-L, v) \geqslant 0, & F(L, v) \leqslant 0, \\ G(u, -L') \geqslant 0, & G(u, L') \leqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

În aceste condiţii sistemul

$$F(u, v) = 0, \qquad G(u, v) = 0,$$

are cel puţin o soluţie în D_1.

Această lemă, care constituie o generalizare a teoremei lui Cauchy, nu este altceva decît o formă echivalentă a cunoscutei teoreme de punct fix a lui Brouwer.

Deoarece vom folosi ac astă lemă în cursul Notei de faţă, facem observaţia că concluzia lemei rămîne valabilă dacă în loc de relaţia (4) are loc una din următoarele relaţii:

$$\begin{cases} F(-L, v) \leqslant 0, & F(L, v) \geqslant 0, \\ G(u, -L') \leqslant 0, & G(u, L') \geqslant 0; \end{cases} \tag{4'}$$

$$\begin{cases} F(-L, v) \geqslant 0, & F(L, v) \leqslant 0, \\ G(u, -L') \leqslant 0; & G(u, L') \geqslant 0; \end{cases} \tag{4''}$$

$$\begin{cases} F(-L, v) \leqslant 0, & F(L, v) \geqslant 0, \\ G(u, -L') \geqslant 0; & G(u, L') \leqslant 0. \end{cases} \tag{4'''}$$

În adevăr nu avem decît să aplicăm lema enunţată, respectiv funcţiilor $-F, -G$; $F, -G$; $-F, G$, pentru a verifica justeţea observaţiei făcute.

3. Vom aplica metoda propusă pentru următoarea problemă la limită:

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{5}$$

$$\alpha x(a) + \alpha' x'(a) = A, \quad \beta x(b) + \beta' x'(b) = B \tag{6}$$

unde funcţia $f(t, x, y)$ este presupusă continuă pe D, iar A, B, $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sînt constante reale.

Pentru simplificarea scrisului vom face următoarele notaţii:

$$h = b - a, \quad M = \sup_{(t, x, y) \in D} |f(t, x, y)|,$$

$$P = hM\left\{\frac{h|\alpha\beta|}{2} + |\alpha\beta'| + \alpha B - \beta A\right\},$$

$$Q = hM\left\{\frac{h|\alpha\beta|}{2} + |\alpha'\beta| + \beta A - \alpha B\right\},$$

$$R = \alpha\beta' - \beta\alpha' + \alpha\beta h.$$

Are loc următoarea

Teoremă. *Să presupunem că are loc relaţia:*

$$h \leqslant \min\left\{K, \frac{K'}{M}\right\}. \tag{I}$$

şi că există două numere L şi L', satisfăcînd condiţiilor:

$$0 \leqslant L \leqslant K - hK', \quad 0 \leqslant L' \leqslant K' - hM, \tag{II}$$

astfel încît să aibă loc una din următoarele două relaţii:

$$|\alpha'| L' \leqslant \min\{\nu E, \nu H\}, \qquad |R| L' \geqslant \max\{P, Q\}, \tag{III}$$

$$\alpha' L' \leqslant \min\{-\nu E, -\nu H\}, \qquad R L' \geqslant \max\{P, Q\}, \tag{III'}$$

unde am notat,

$$E = A + \alpha L, \quad H = -A + \alpha L, \quad \nu = \operatorname{sgn} R.$$

Atunci problema (5), (6) are cel puţin o soluţie.

Demonstraţie. În locul ecuaţiei (5) vom considera sistemul echivalent,

$$x' = y, \quad y' = f(t, x, y). \tag{5'}$$

Fie L şi L' numerele de care este vorba în enunţul teoremei. Fie ε pozitiv arbitrar; funcţia $f(t, x, y)$ fiind uniform continuă pe D, dat fiind ε, putem determina un η, astfel încît,

$$|f(t, x, y) - f(t', x', y')| < \varepsilon, \tag{7}$$

oricare ar fi punctele (t, x, y), $(t', x', y') \in D$ satisfăcînd condiţiilor

$$|t-t'|<\eta;\quad |x-x'|<\eta;\quad |y-y'|<\eta.$$

Fie acum un număr natural n suficient de mare încît să aibă loc relaţia:

$$\delta=\frac{h}{n}\leqslant \min\left(\eta,\frac{\eta}{M},\frac{\eta}{K'}\right). \tag{8}$$

Împărţim segmentul $[a,b]$ în n părţi egale prin punctele:

$$t_k=a+k\delta;\ k=0,1,\ldots,n;\ t_0=a,\ t_n=b,$$

şi construim soluţiile ε-aproximative sub forma cunoscută,

$$\begin{cases} x(t)=x_k+y_k(t-t_k), & t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1},\\ y(t)=y_k+f_k(t-t_k), & k=0,1,\ldots,n-1,\end{cases} \tag{9}$$

unde

$$f_k=f(t_k,x_k,y_k),$$

iar (x_0,y_0) este un punct arbitrar din D_1. Din (9) urmează:

$$\begin{cases} x(t)=x_0+y_0(t-t_0), & t_0\leqslant t\leqslant t_1\\ y(t)=y_0+f_0(t-t_0),\\ x(t)=x_0+\delta\sum\limits_{j=0}^{k-1}y_j+y_k(t-t_k), & t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1},\\ y(t)=y+\delta\sum\limits_{j=0}^{k-1}f_j+f_k(t-t_k). & k=1,2,\ldots,n-1.\end{cases} \tag{10}$$

Ţinînd seama că,

$$|x_0|\leqslant L,\quad |y_0|\leqslant L',$$

din (10) rezultă,

$$|x(t)|\leqslant L+hK',\quad |y(t)|\leqslant L'+hM,$$

de unde, datorită ipotezei II, rezultă în definitiv,

$$|x(t)|\leqslant K,\ |y(t)|\leqslant K',\ t\in[a,b], \tag{11}$$

ceea ce ne arată că soluţiile ε-aproximative (9) sînt definite pe întreg intervalul $[a,b]$.

Din relaţiile (10) putem obţine cu uşurinţă,

$$x_k=x_0+k\delta y_0+\delta^2\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)f_{i-1};\quad k=1,2,\ldots,n,$$

ceea ce ne permite să scriem valoarea soluţiei ε-aproximative în punctul b sub forma

$$\begin{cases} x(b)=x_0+hy_0+\dfrac{h^2}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(n-i)f_{i-1},\\ y(b)=y_0+\dfrac{h}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f_i.\end{cases} \tag{12}$$

Să arătăm că putem alege (x_0,y_0) din D_1 astfel ca soluţia ε-aproximativă (9) să satisfacă condiţiei (6).

Pentru funcţiile (9) condiţia (6) se scrie:

$$\begin{cases} \alpha x_0+\alpha' y_0-A=0,\\ \beta x_0+(\beta'+h\beta)y_0+\beta\dfrac{h^2}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(n-i)f_{i-1}+\beta'\dfrac{h}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f_i-B=0.\end{cases} \tag{6'}$$

În locul sistemului (6') vom considera sistemul echivalent,

$$\begin{cases} \alpha x_0+\alpha' y_0-A=0,\\ Ry_0+\alpha\beta\dfrac{h^2}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(n-i)f_{i-1}+\alpha\beta'\dfrac{h}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f_i+\beta A-\alpha B=0.\end{cases} \tag{6''}$$

Pentru a arăta că sistemul (6'') are soluţii vom aplica lema enunţată ma sus funcţiilor

$$\begin{cases} F(x_0,y_0)=\alpha x_0+\alpha' y_0-A,\\ G(x_0,y_0)=Ry_0+\alpha\beta\dfrac{h^2}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(n-i)f_{i-1}+\alpha\beta'\dfrac{h}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f_i+\beta A-\alpha B.\end{cases} \tag{13}$$

În acest scop rămîne să verificăm că aceste funcţii, evident continue pe D_1, satisfac una din condiţiile (4), (4') (4''), (4'''). Pentru aceasta să scriem pe larg condiţiile (II') şi (III').

Să observăm mai întîi că din aceste condiţii rezultă $R\neq 0$, căci altfel ar trebui să avem simultan $P\leqslant 0$, $Q\leqslant 0$, ceea ce nu se poate. Din condiţiile (III) rezultă

$$|\alpha'|L'\leqslant \min(-E,-H),\quad RL'\leqslant \min(-P,-Q), \tag{14}$$

sau

$$|\alpha'|L'\leqslant \min(E,H),\quad RL'\geqslant \max(P,Q), \tag{14'}$$

(după cum $R<0$ sau $R>0$. În mod asemănător din (III') rezultă, după cum $R<0$ sau $R>0$, respectiv, următoarele două relaţii:

$$|\alpha'|L'\leqslant \min(E,H),\quad RL'\leqslant \min(-P,-Q), \tag{14''}$$

sau

$$|\alpha'|L'\leqslant \min\{-E,-H\},\quad RL'\geqslant \max\{P,Q\} \tag{14'''}$$

În concluzie, dacă ipotezele (III) sau (III') sînt satisfăcute, atunci are loc unul din cele patru grupuri de relaţii de mai sus:

Se observăm în continuare că au loc inegalităţile

$$\frac{h^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)f_{i-1} < \frac{Mh^2}{2}; \quad \frac{h}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f_i < Mh,$$

de unde urmează

$$-P < \alpha\beta\frac{h^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)f_i + \alpha\beta'\frac{h}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f_i + \beta A - \alpha B < Q.$$

Să presupunem că are loc relaţia (14); deoarece, după cum se verifică imediat, au loc relaţiile,

$$F(-L, y_0) \geqslant -\alpha L - \alpha' L' - A, \quad F(L, y_0) \leqslant \alpha L + \alpha' L' - A,$$
$$G(x_0, -L') \geqslant -RL' - P, \quad G(x_0, L') \leqslant RL' + Q,$$

după (14) rezultă

$$F(-L, y_0) \geqslant 0, \qquad F(L, y_0) \leqslant 0,$$
$$G(x_0, -L') \geqslant 0, \qquad G(x_0, L') \leqslant 0,$$

adică tocmai condiţiile (4).

În mod cu totul asemănător se arată că din relaţiile (14'), (14''), (14''') rezultă, respectiv relaţiile, (4''), (4'), (4''').

În concluzie, datorită condiţiilor (III) sau (III') putem alege punctul (x_0, y_0) din D_1 astfel încît soluţia ε-aproximativă să satisfacă condiţiei la limită (6); cum ε era arbitrar, acest lucru este posibil pentru orice soluţie ε-aproximativă.

Pentru a termina demonstraţia mai rămîne să arătăm că putem construi un şir de soluţii ε-aproximative care să conveargă la o soluţie a sistemului (5), fiecare soluţie din şir satisfăcînd condiţiei (6). Or acest lucru se arată într-un mod cu totul asemănător ca în cazul problemei lui Cauchy. ε_p fiind un şir de numere pozitive monoton descrescător la zero, şirul de soluţii ε-aproximative corespunzător, astfel construit încît să satisfacă (6), se verifică a fi uniform mărginit şi egal continuu Atunci el va conţine un subşir uniform convergent, a cărui limită este tocmai o soluţie a sistemului (5).

4. Să facem acum cîteva observaţii asupra condiţiilor la limită considerate. Problema (5) (6) a fost considerată pentru prima dată de C. Corduneanu în [2]. De o atenţie deosebită s-au bucurat, pentru ecuaţia (5), condiţii de forma:

$$x(a) = A; \quad x(b) = B, \tag{6'''}$$

care sînt un caz particular al condiţiilor (6). Problemei (5) (6''') i-au fost consacrate numeroase studii, obţinîndu-se rezultate interesante, ca de exemplu în [3].

Toate aceste lucrări conţin două ipoteze restrictive: 1) $K = +\infty$, $K' = +\infty$; 2) funcţia f se presupune că satisface pe D şi altor condiţii în afara continuităţii (de exemplu derivabilă în raport cu x şi y în [2]. monotonă în raport cu x şi lipsch tziană în raport cu y în [3] etc.). Teorema noastră, cu toate că ipotezele se exprimă prin relaţii complicate, are în schimb avantajul că nu conţine aceste restricţii.

În cazul condiţiilor la limită (6''') ipotezele III, III' se reduc la:

$$\text{(III'')} \qquad \begin{cases} L > A \\ L' > \max\left\{\dfrac{hM}{2} + \dfrac{B-A}{h}, \ \dfrac{hM}{2} - \dfrac{B-A}{h}\right\}. \end{cases}$$

Ipotezele I, II, III'', sînt îndeplinite în cazul particular cînd funcţia f este continuă şi mărginită pe $D_1' \{t \in [a,b], |x| < \infty, |y| < \infty\}$.

5. În încheiere să facem o ultimă observaţie, Metoda propusă permite reducerea unei probleme la limită la o problemă de tip Cauchy. Fie într-adevăr $(x^p(t), y^p(t))$ şirul de soluţii ε-aproximative convergent la soluţia ecuaţiei (5), construit astfel încît fiecare termen al şirului să satisfacă (6). Dacă notăm:

$$\bar{x}_0 = \lim_{p\to\infty} x^p(a), \quad \bar{y}_0 = \lim_{p\to\infty} y^p(a), \tag{15}$$

atunci soluţia problemei lui Cauchy,

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \bar{x}_0, \quad x'(a) = \bar{y}_0, \tag{16}$$

este în acelaşi timp o soluţie pentru problema (5), (6).

BIBLIOGRAFIE

1. Coddington E. A., Levinson N. — *Theory of ordinary differential equation* cap. I. New-York 1955.
2. Corduneanu C — *Sopra i problemi ai limiti per alcuni sistemi di equazioni differenziali non lineari*. Rend. Accad. Sc. Fis. e Mat. Napoli ser. 4, vol. XXV (1958).
3. Milton Lees — *A boundary value problem for nonlinear ordinary differential equation*. Journ. of Math. and Mech. vol 10 (1961) p. 423—430.
4. Miranda C.—*Un'osservazione su un teorema di Brouwer*. Boll. della Un mat italiana ser. 2, vol. 3 (1940—41) p. 5-7.

ОТНОСИТЕЛЬНО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ε-ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Краткое содержание

ε-приближенные решения, использованные, как известно в доказательстве существования задачи Коши (см. например [1]), можно также использовать для доказательство существования решений некоторых краевых задач. При этом использование ε-приближенных решений

сводит доказательство существования решения краевой задачи к доказательству существования фиксированный точки для непрерывного оператора определенного в эвклидовом пространстве.

Рассмотрим например задачи (1), (2) где f, g и F, G некоторые непрерывные функции в D и соответственно в D_1. В тем случае когда последовательность ε-приближенных решений удовлетворяет условиям (2) и последовательность сходитсья равномерно к некоторому решению системы (1), это решение будет также удовлетворять условию (2). Таким образом достаточно найти достаточные условия для того чтобы система (3) имела бы решение, при всяком ε. В частном случае задачи (5) (6) находится тем же методом следующий результат: В том случае когда имеет место соотношение (I) и когда существуют два числа L и L' удовлетворяющие (II), так что имеет место одна из двух соотношений (III), задача (5) (6) имеет, по крайней мере, одно решение.

SUR L'UTILISATION DES SOLUTIONS ε-APPROXIMATIVES DANS LA DÉMONSTRATION DE L'EXISTENCE DES SOLUTIONS DE CERTAINS PROBLÈMES AUX LIMITES POUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS ORDINAIRES

Résumé

Les solutions ε-approximatives, employées, comme on sait, pour la démonstration de l'existence des solutions du problème de Cauchy (voir par exemple [1]) peuvent être utilisées aussi pour démontrer l'existence des solutions de certains problèmes aux limites. L'emploi des solutions ε-approximatives dans ce but, ramène la démonstration de l'existence des solutions du problème aux limites à la démonstration de l'existence d'un point fixe pour un opérateur défini dans l'espace euclidien R^n. Considérons par exemple le problème (1) (2), où f, g et F, G sont des fonctions continues sur D et, respectivement sur D_1. Si une suite de solutions ε-approximatives, satisfaisant à la condition (2) converge uniformément vers une solution du système (1), cette solution satisfera aussi à (2). Il suffit donc de trouver des conditions suffisantes pour l'existence des solutions du système (3), quel que soit ε. Dans le cas particulier du problème (5) (6) on démontre de cette manière le résultat suivant: Supposons que les hypothèses suivantes sont remplies: a) la relation (I) a lieu; b) il existe deux nombres L et L' satisfaisant (II); c) l'une des relations (II) est satisfaite. Alors, il existe au moins une solution du problème (5) (6).

SUR UNE ÉQUATION INTÉGRALE NON-LINÉAIRE

PAR

VIOREL BARBU

Soit l'équation intégrale non-linéaire

$$x(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s) f(s, x(s))\, ds. \tag{E}$$

Cette équation a été étudiée par J. A. Nohel [3] qui a établi des résultats concernant l'existence des solutions continues sur le demi-axe $t \geqslant 0$. L'équation (E) a été aussi étudiée par V. M. Popov [4] et C. Corduneanu [1] qui ont donné des résultats liés à la théorie du réglage automatique.

Supposons que les fonctions réelles $h(t), k(t)$ et $f(t, x)$ satisfont aux conditions suivantes:

a) $f(t, x)$ est continue par rapport à x et mesurable par rapport à t dans l'ensemble $t \geqslant 0$, $|x| < \infty$;

b) $|f(t, x)| \leqslant L|x| + c(t)$, $c(t) \in L^2[0, \infty)$;

c) $h(t) \in L^2[0, \infty)$, $k(t) \in L^1[0, \infty) \cap L^2[0, \infty)$;

d) Si $\tilde{k}(i\omega) = \int_0^\infty k(t) \exp\{-i\omega t\}\, dt$, il existe $0 < |q| < L^{-1}$, tel que $\operatorname{Re}\{\tilde{k}(i\omega)^2 + q\tilde{k}(i\omega)\} \leqslant 0$.

Théorème 1. *Les conditions* a), b), c), d) *étant satisfaites, il existe au moins une solution* $x(t)$ *de l'équation* (E), *telle que*

$$x(t) \in L^2[0, \infty). \tag{1}$$

Démonstration. Nous allons appliquer le principe de point fixe de Schauder-Tychonoff dans l'espace $L^2_c(R_+, R)$ des fonctions réelles, à carré sommable sur tout ensemble compact du demi-axe $t \geqslant 0$, avec la topologie définie par la famille des semi-normes: