сводит доказательство существования решения краевой задачи к доказательству существования фиксированный точки для непрерывного оператора определенного в эвклидовом пространстве.

Рассмотрим например задачи (1), (2) где f, g и F, G некоторые непрерывные функции в D и соответственно в D_1. В тем случае когда последовательность ε-приближенных решений удовлетворяет условиям (2) и последовательность сходитсья равномерно к некоторому решению системы (1), это решение будет также удовлетворять условию (2). Таким образом достаточно найти достаточные условия для того чтобы система (3) имела бы решение, при всяком ε. В частном случае задачи (5) (6) находится тем же методом следующий результат: В том случае когда имеет место соотношение (I) и когда существуют два числа L и L' удовлетворяющие (II), так что имеет место одна из двух соотношений (III), задача (5) (6) имеет, по крайней мере, одно решение.

SUR L'UTILISATION DES SOLUTIONS ε-APPROXIMATIVES DANS LA DÉMONSTRATION DE L'EXISTENCE DES SOLUTIONS DE CERTAINS PROBLÈMES AUX LIMITES POUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS ORDINAIRES

Résumé

Les solutions ε-approximatives, employées, comme on sait, pour la démonstration de l'existence des solutions du problème de Cauchy (voir par exemple [1]) peuvent être utilisées aussi pour démontrer l'existence des solutions de certains problèmes aux limites. L'emploi des solutions ε-approximatives dans ce but, ramène la démonstration de l'existence des solutions du problème aux limites à la démonstration de l'existence d'un point fixe pour un opérateur défini dans l'espace euclidien R^n. Considérons par exemple le problème (1) (2), où f, g et F, G sont des fonctions continues sur D et, respectivement sur D_1. Si une suite de solutions ε-approximatives, satisfaisant à la condition (2) converge uniformément vers une solution du système (1), cette solution satisfera aussi à (2). Il suffit donc de trouver des conditions suffisantes pour l'existence des solutions du système (3), quel que soit ε. Dans le cas particulier du problème (5) (6) on démontre de cette manière le résultat suivant: Supposons que les hypothèses suivantes sont remplies: a) la relation (I) a lieu; b) il existe deux nombres L et L' satisfaisant (II); c) l'une des relations (II) est satisfaite. Alors, il existe au moins une solution du problème (5) (6).

SUR UNE ÉQUATION INTÉGRALE NON-LINÉAIRE

PAR

VIOREL BARBU

Soit l'équation intégrale non-linéaire

$$x(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s) f(s, x(s))\, ds. \tag{E}$$

Cette équation a été étudiée par J. A. Nohel [3] qui a établi des résultats concernant l'existence des solutions continues sur le demi-axe $t \geqslant 0$. L'équation (E) a été aussi étudiée par V. M. Popov [4] et C. Corduneanu [1] qui ont donné des résultats liés à la théorie du réglage automatique.

Supposons que les fonctions réelles $h(t)$, $k(t)$ et $f(t, x)$ satisfont aux conditions suivantes:

a) $f(t, x)$ est continue par rapport à x et mesurable par rapport à t dans l'ensemble $t \geqslant 0$, $|x| < \infty$;

b) $|f(t, x)| \leqslant L|x| + c(t)$, $c(t) \in L^2[0, \infty)$;

c) $h(t) \in L^2[0, \infty)$, $k(t) \in L^1[0, \infty) \cap L^2[0, \infty)$;

d) Si $\tilde{k}(i\omega) = \int_0^\infty k(t) \exp\{-i\omega t\}\, dt$, il existe $0 < |q| < L^{-1}$, tel que $\mathrm{Re}\{\tilde{k}(i\omega)^2 + q\tilde{k}(i\omega)\} \leqslant 0$.

Théorème 1. *Les conditions* a), b), c), d) *étant satisfaites, il existe au moins une solution* $x(t)$ *de l'équation* (E), *telle que*

$$x(t) \in L^2[0, \infty). \tag{1}$$

Démonstration. Nous allons appliquer le principe de point fixe de Schauder-Tychonoff dans l'espace $L^2_c(R_+, R)$ des fonctions réelles, à carré sommable sur tout ensemble compact du demi-axe $t \geqslant 0$, avec la topologie définie par la famille des semi-normes:

$$(2)\qquad |x|_n = \left(\int_0^n x^2(s)\,ds\right)^{1/2};\quad n = 1, 2, \ldots$$

L'espace $L_c^2(R_+, R)$ est un espace vectoriel topologique, localement convexe et métrisable.

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble convexe et fermé des $x(t) \in L_c^2(R_+, R)$ tels que

$$(3)\qquad \int_0^\infty x^2(t)\,dt \leq M^2,\quad M > \frac{c\,q + h}{1 - L\,|q|},$$

où

$$(4)\qquad h = \left(\int_0^\infty h^2(t)\,dt\right)^{1/2};\qquad c = \left(\int_0^\infty c^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Considérons l'opérateur A défini à l'aide de la relation

$$(5)\qquad Ax(t) = h(t) + \int_0^t k(t-s)\,f(s, x(s))\,ds.$$

Pour montrer la continuité de l'opérateur A, il suffit d'établir l'affirmation suivante. Quel que soit $n = 1, 2, \ldots$, l'opérateur A défini sur $L^2[0, n]$ par la formule (5) est continu. Il suffit d'observer que $x(t) \to f(t, x(t))$ de $L^2[0, n]$ dans $L^2[0, n]$ est continue [2], ce qui nous conduit immédiatement au résultat.

Considérons, en suivant V. M. Popov [4], [5], la fonction

$$(6)\qquad f_t(\tau) = \begin{cases} f(\tau, x(\tau)), & 0 \leq \tau \leq t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathfrak{M}$. Posons encore

$$(7)\qquad \chi_t(\tau) = \int_0^\tau k(\tau - s)\,f_t(s)\,ds.$$

On peut voir que, sous les conditions a), b), c),

$$\chi_t(\tau),\ f_t(\tau) \in L^1[0, \infty) \cap L^2[0, \infty).$$

En effet, on a

$$\chi_t(\tau) = \int_0^t k(\tau - s)\,f(s, x(s))\,ds,\qquad \tau \geq t.$$

Donc

$$\chi_t^2(\tau) \leq \int_0^t k^2(\tau - s)\,f^2(s, x(s))\,ds \int_0^t ds \text{ p. p.}$$

Dans le second membre de l'inégalité apparaît le produit de composition des fonctions sommables $k^2(t)$ et $f^2(t, x(t))$, ce qui prouve que $\chi_t^2(\tau) \in L^1[0, \infty)$.

Soit

$$(8)\qquad \tilde{\chi}_t(i\omega) = \int_0^\infty \chi_t(\tau)\,\exp\{-i\omega\tau\}\,d\tau = \tilde{k}(i\omega)\,\tilde{f}_t(i\omega)$$

où

$$\tilde{f}_t(i\omega) = \int_0^\infty f_t(\tau)\,\exp\{-i\omega\tau\}\,d\tau.$$

L'égalité de Parseval nous donne

$$(9)\qquad \int_0^\infty \chi_t(\tau)\,[\chi_t(\tau) + q\,f_t(\tau)]\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\tilde{\chi}_t(i\omega)\left[\tilde{\chi}_t(-i\omega) + q\tilde{f}(-i\omega)\right]\right] d\omega.$$

La relation (9) et la condition d) nous permettent d'écrire

$$(10)\qquad \int_0^\infty \chi_t(\tau)\,[\chi_t(\tau) + q\,f_t(\tau)]\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\left[|\tilde{k}(i\omega)|^2 + q\tilde{k}(i\omega)\right] |f_t(i\omega)|^2\,d\omega \leq 0.$$

Les relations (10), (6), (7) et les conditions a), b) nous donnent l'inégalité

$$(11)\qquad \int_0^t \chi^2(\tau)\,d\tau \leq |q|\left(\int_0^t \chi^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}\left[L\left(\int_0^\infty x^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2} + c\right]$$

où

$$\chi(\tau) = \int_0^\tau k(\tau - s)\,f(s, x(s))\,ds.$$

Mais

$$(12)\qquad A\,x(t) = h(t) + \chi(t).$$

Des relations (11), (12), (3) il s'ensuit

$$(13)\qquad \int_0^\infty |Ax(t)|^2\,dt \leq h + (LM + c)\,|q|$$

c'est-à-dire

$$(14)\qquad A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}.$$

Maintenant, remarquons que

$$(15)\qquad \left(\int_0^n |Ax(t+\tau)-Ax(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^n |h(t+\tau)-h(t)|^2\,dt\right)^{1/2} +$$

$$+\left[\int_0^n dt\left(\int_0^t |k(t+\tau-s)-k(t-s)|\,|f(s,x(s))|\,ds\right)^2\right]^{1/2} +$$

$$+\left[\int_0^n dt\left(\int_t^{t+\tau} |k(t+\tau-s)|\,|f(s,x(s))|\,ds\right)^2\right]^{1/2}.$$

L'inégalité de Schwartz-Bouniakovsky nous donne

$$(16)\qquad \left(\int_0^n |Ax(t+\tau)-Ax(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \varphi_0(\tau)+M_1(\varphi_1(\tau)+\varphi_2(\tau))$$

où

$$\varphi_0(\tau)=\left(\int_0^n |h(t+\tau)-h(t)|^2\,dt\right)^{1/2},$$

$$\varphi_1(\tau)=\left[\int_0^n dt\int_0^t |k(t+\tau-s)-k(t-s)|^2\,ds\right]^{1/2},$$

$$\varphi_2(\tau)=\left[\int_0^n dt\int_t^{t+\tau} |k(t+\tau-s)|^2\,ds\right]^{1/2},$$

$$M_1=\left(\int_0^\infty f^2(t,x(t))\,dt\right)^{1/2}.$$

Mais il résulte aisément que les fonctions $\varphi_0(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ sont continues en $\tau=0$, quel que soit n. Donc.

$$(17)\qquad \int_0^n |Ax(t+\tau)-Ax(t)|^2\,dt \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour } x(t)\in\mathfrak{M} \text{ et } |\tau|<\delta(\varepsilon,n)$$

Évidemment

$$(18)\qquad \int_0^n |Ax(t)|^2\,dt \leqslant M \qquad \text{pour} \qquad x(t)\in\mathfrak{M}.$$

Les conditions (17), (18) étant satisfaites, un théorème de M. Riesz [6] nous montre que l'ensemble $A\mathfrak{M}$ est relativement compact dans $L^2(R_+, R)$.

Par conséquent, les conditions du théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff sont satisfaites, ce qui prouve l'existence d'une solution (au moins) de l'équation (E). Cette solution appartient à $\mathfrak{M}$, donc $x(t)\in L^2[0,\infty)$.

L'unicité de la solution peut s'établir aisément si l'on remplace la condition b) de l'énoncé par la condition plus forte

$$\text{b}')\qquad |f(t,x)-f(t,y)| \leqslant L\,|x-y|,\ f(t,0)\in L^2[0,\infty).$$

Sous des conditions supplémentaires, on peut démontrer que la solution $x(t)$ de l'équation (E) tend vers zéro pour $t\to\infty$.

En effet, si l'on admet de plus $h'(t)$, $k'(t)\in L^1[0,\infty)$, alors la solution $x(t)$ résulte uniformément continue et appartient à $L^2[0,\infty)$. D'après un résultat connu, $x(t)\to 0$ pour $t\to\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Corduneanu C. — *Sur une équation intégrale de la théorie du réglage automatique.* C. R. Acad. Sci. Paris, 256 (1963), p. 3564–3567.
2. Красносельский М. А. — *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Москва, 1956.
3. Nohel J. A. — *Some problems in nonlinear Volterra integral equations.* Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), p. 323–329.
4. Popov V. M. — *Criterii de stabilitate pentru sistemele de reglare automată bazate pe utilizarea transformatei Laplace.* Şt. şi cerc. de energetică, IX (1959), p. 119—135.
5. Попов В. М. — *Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования.* Автоматика и телемеханика, XXII (1961), стр. 961—979.
6. Riesz M. — *Sur les ensembles compacts de fonctions sommables.* Act. Litt. Sci. Univ. Szeged, v. 6 (1933), p. 136—142.

ASUPRA UNEI ECUAŢII INTEGRALE NELINIARE

Rezumat

În această Notă se stabileşte un criteriu de existenţă a unei soluţii de pătrat sumabil pe $[0,\infty)$ pentru ecuaţia (E), utilizînd transformata Fourier în felul indicat de V. M. Popov.

О НЕЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Краткое содержание

В работе устанавливается критерий существования решения с суммируемым квадратом на $[0,\infty)$, для уравнения (E), употребляя преобразование Фурье, по способу В. М. Попова.