ECUAŢIILE MOUTARD CU TREI VARIABILE

DE

E. GOLDHAGEN

Introducere. Ecuaţiile de ordinul al doilea cu o funcţie necunoscută de două variabile independente

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

admiţînd o integrală generală de forma

$$z = f[x, y, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \ldots, \varphi^{(m)}(\alpha); \psi(\beta), \psi'(\beta), \ldots, \psi^{(m)}(\beta)], \tag{2}$$

unde φ şi ψ sînt funcţii arbitrare de clasă C^{m+2}, respectiv C^{m+2}, $\varphi', \varphi'', \ldots$; $\psi', \psi'', \ldots$ derivatele lor, iar α şi β două funcţii de x şi y independente între ele, au fost studiate pentru prima dată de Moutard [4]. Aceste ecuaţii, care intervin în diverse probleme de geometrie şi fizică, sînt remarcabile prin aceea că putem rezolva pentru ele problemele la limită cu ajutorul soluţiei generale (2). Această proprietate, studiată pentru unele cazuri particulare în [3] şi [5], este demonstrată în [2]. Legătura aceasta dintre problema clasică a găsirii integralei generale şi rezolvarea problemelor la limită, există la toate ecuaţiile, care admit o integrală generală explicită. De asemenea, pentru ecuaţiile integrabile explicit, putem lărgi clasa soluţiilor folosind teoria lui Sobolev a soluţiilor generalizate. În această Notă, considerăm ecuaţiile de ordinul al doilea cu o funcţie z de trei variabile independente x, y, t şi arătăm, că, în cazul general definit în § 1, ecuaţiile integrabile explicit sînt reductibile la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial t} = F\left(x, y, t, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial t}\right). \tag{3}$$

Pentru studiul ecuaţiilor (3) putem folosi metoda lui Cosserat [1].

§ 1. *Punerea problemei.* Să examinăm clasele de ecuaţii

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial t} = F\left(x, y, t, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial t}\right), \tag{4}$$

care admit soluţii de forma

$$z = f[x, y, t, \varphi_{ij}(\beta, \gamma), \psi_{lm}(\delta, \alpha)] \quad \begin{pmatrix} i + j = 0, 1, \ldots, h \\ l + m = 0, 1, \ldots, k \end{pmatrix}, \tag{5}$$

unde $\varphi_{00} = \varphi$ este o funcţie arbitrară de β şi γ de clasă C^{h+2}, $\psi_{00} = \psi$ este o funcţie arbitrară de δ şi α de clasă C^{k+2}, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ funcţii determinate de variabilele independente, iar

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial^{i+j}\varphi}{\partial\beta^i \partial\gamma^j}, \quad \psi_{lm} = \frac{\partial^{l+m}\psi}{\partial\delta^l \partial\alpha^m}.$$

Vom mai presupune că F şi f sînt funcţii de clasă C^2, respectiv C^3, în raport cu toate argumentele lor şi că f depinde efectiv de cel puţin una dintre derivatele de ordinul h ale lui φ şi una dintre derivatele de ordinul k ale lui ψ.

Vom examina în această Notă cazul generic cînd trei dintre funcţiile $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sînt independente între ele. Dacă β, γ, δ satisfac această condiţie şi sînt considerate drept noi variabile independente, soluţia (5) devine

$$z = f[x, y, t, \varphi_{ij}(x, y), \psi_{lm}(t, \alpha)] \quad \begin{pmatrix} i + j = 0, 1, \ldots, h \\ l + m = 0, 1, \ldots, k \end{pmatrix}, \tag{6}$$

unde α este o funcţie determinată de x, y, t, pe care o presupunem de clasă C^2, într-un domeniu D din spaţiul variabilelor independente. Din (6), obţinem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= f_x + f_{\varphi_{ij}} \varphi_{i+1,j} + f_{\psi_{lm}} \psi_{l,m+1} \alpha_x, \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= f_y + f_{\varphi_{ij}} \varphi_{i,j+1} + f_{\psi_{lm}} \psi_{l,m+1} \alpha_y, \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= f_t + f_{\psi_{lm}} (\psi_{l+1,m} + \psi_{l,m+1} \alpha_t), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} &= f_{xt} + f_{t\varphi_{ij}} \varphi_{i+1,j} + f_{t\psi_{lm}} \psi_{l,m+1} \alpha_x + \\
&+ f_{\psi_{lm}} \psi_{l,m+1} \alpha_{xt} + f_{\psi_{lm}} \alpha_x (\psi_{l+1,m+1} + \psi_{l,m+2} \alpha_t) + \\
&+ (f_{x\psi_{lm}} + f_{\varphi_{ij}\psi_{lm}} \varphi_{i+1,j} + f_{\psi_{l_1 m_1}\psi_{lm}} \psi_{l_1,m_1+1} \alpha_x)(\psi_{l+1,m} + \psi_{l,m+1} \alpha_t), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t} &= f_{yt} + f_{t\varphi_{ij}} \varphi_{i,j+1} + f_{t\psi_{lm}} \psi_{l,m+1} \alpha_y + \\
&+ f_{\psi_{lm}} \psi_{l,m+1} \alpha_{yt} + f_{\psi_{lm}} \alpha_y (\psi_{l+1,m+1} + \psi_{l,m+2} \alpha_t) + \\
&+ (f_{y\psi_{lm}} + f_{\varphi_{ij}\psi_{lm}} \varphi_{i,j+1} + f_{\psi_{l_1 m_1}\psi_{lm}} \psi_{l_1,m_1+1} \alpha_y)(\psi_{l+1,m} + \psi_{l,m+1} \alpha_t), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f_{\varphi_{ij}} \varphi_{i+2,j} + \ldots, \ldots
\end{aligned} \tag{7}$$

unde am folosit convenţia indicilor muţi şi notaţia

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_{\varphi_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ij}}, \ldots, f_{\psi_{lm}\psi_{l_1 m_1}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \psi_{lm} \partial \psi_{l_1 m_1}}.$$

Să considerăm acum derivatele lui φ şi ψ de ordinul h, respectiv k

$$\varphi_{h0}, \varphi_{h-1,1}, \ldots, \varphi_{0h}; \quad \psi_{k0}, \psi_{k-1,1}, \ldots, \psi_{0k}$$

şi să presupunem că $\varphi_{r,h-r}$ şi $\psi_{s,k-s}$ sînt primele derivate din aceste şiruri, iar $\varphi_{p,h-p}$ şi $\psi_{l,k-l}$ ultimele derivate din şirurile de mai sus, care intervin efectiv în (6). Avem deci

$$f_{i,h-i} = 0 \quad (r < i < p), \quad f_{\psi_{j,k-j}} = 0 \quad (s < j < l) \tag{8}$$

şi

$$f_{\varphi_{r,h-r}} \neq 0, \quad f_{\varphi_{p,h-p}} \neq 0, \quad f_{\psi_{s,k-s}} \neq 0, \quad f_{\psi_{l,k-l}} \neq 0. \tag{9}$$

Dacă înlocuim (7) în (4) şi derivăm identitatea obţinută, pe rînd, în raport cu $\varphi_{r+2,h-r}$, $\varphi_{r+1,h-r+1}$, $\varphi_{r,h-r+2}$ şi $\psi_{t+2,k-s}$ vedem că F nu depinde de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ şi $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, deci ecuaţia (4) este de forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = F\left(x, y, t, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t}\right). \tag{10}$$

Să înlocuim acum (7) în (10) şi să notăm cu (10′) noua identitate. Dacă derivăm (10′) în raport cu $\psi_{s+1,k-s+1}$ şi folosim $(8)_2$ şi $(9)_3$, vedem că

$$\alpha_x = \frac{\partial F}{\partial z_{yt}} \alpha_y \quad \left(z_{yt} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial t}\right). \tag{11}$$

§ 2. *Consecinţele condiţiei* (11). Să presupunem întîi că $\alpha_x = 0$. Atunci din (11) rezultă

$$\alpha_y \frac{\partial F}{\partial z_{yt}} = 0. \tag{12}$$

Dacă $\alpha_y = 0$, avem $\alpha = \alpha(t)$ şi $\psi(t, \alpha(t)) = \psi^*(t)$. Soluţia (6) depinde în acest caz de o singură funcţie arbitrară de două argumente şi nu poate reprezenta integrala generală pentru o ecuaţie de forma (10). Deci, în acest caz avem

$$\partial F / \partial z_{yt} = 0. \tag{13}$$

Dacă derivăm (10′) în raport cu $\varphi_{p,h-p+1}$ şi ţinem seama de $(8)_1$, $(9)_2$ şi (13), vedem că ecuaţia (10) devine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = F\left(x, y, t, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial t}\right), \tag{14}$$

adică este de forma (3), deoarece variabila y intervine ca un parametru.

Să considerăm acum $\alpha_x \neq 0$. În acest caz, din (8) rezultă

$$\frac{\partial F}{\partial z_{yt}} = \alpha_x/\alpha_y = A(x, y, t)\,; \tag{15}$$

deci putem scrie ecuaţia (10) sub forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = A(x, y, t)\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial t} + G\left(x, y, t, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial t}\right). \tag{16}$$

Folosind faptul că primele cinci derivate din (7) se exprimă liniar în fiecare dintre mărimile $\varphi_{r,h-r}$, $\varphi_{p,h-p}$ şi $\psi_{s,k-s}$, vedem că ecuaţia (16) trebuie să fie de forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = A(x, y, t)\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial t} + B\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t} + C\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial t} + D\frac{\partial z}{\partial x} + G\frac{\partial z}{\partial t} + E\frac{\partial z}{\partial y} + L, \tag{17}$$

unde B, C, D, E, G, L sînt funcţii de x, y, t, z.

Să înlocuim în continuare (7) în (17) şi să derivăm identitatea obţinută în raport cu $\psi_{s+1,k-s}$. Dacă ţinem seama de (15), $(8)_2$ şi $(9)_3$, vedem că

$$f_{x\psi_{s,k-s}} + f_{\varphi_{ij}\psi_{s,k-s}}\varphi_{i+1,j} = A\left(f_{y\psi_{s,k-s}} + f_{\varphi_{ij}\psi_{s,k-s}}\varphi_{i,j+1}\right) + \tag{18}$$

$$+ \left(B\frac{\partial z}{\partial x} + C\frac{\partial z}{\partial y} + G\right)^{*} f_{\psi_{s,k-s}},$$

unde prin $(\ )^*$ înţelegem expresia care se obţine după folosirea formulelor (7). Derivînd (18) în raport cu $\psi_{s,k-s+1}$ şi folosind (15), vedem că

$$C + BA = 0. \tag{19}$$

Să înlocuim din nou (7) în (17) şi să notăm identitatea obţinută $H = 0$. Să mai notăm

$$\begin{matrix} \varphi_1 \equiv \varphi_{r,h-r}, & \varphi_2 \equiv \varphi_{r-1,h-r+1}, \ldots, \varphi_u \equiv \varphi_{p,h-p} \\ \psi_1 \equiv \psi_{s,k-s}, & \psi_2 \equiv \psi_{s-1,k-s+1}, \ldots, \psi_v \equiv \psi_{l,k-l} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} u = r - p + 1 \\ v = s - l + 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Dacă folosim (8), (9), (15) şi (19), identităţile

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\psi_{s+1,k-s}\,\partial\varphi_{r+1,h-r}} = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial\psi_{s+1,k-s}\,\partial\varphi_{p,h-p+1}} = 0$$

ne conduc la următoarele relaţii

$$f_{\varphi_1\psi_1} = Bf_{\varphi_1}f_{\psi_1}, \quad f_{\varphi_u\psi_1} = Bf_{\varphi_u}f_{\psi_1}. \tag{21}$$

Integrînd sistemul (21), obţinem

$$f_{\varphi_1} = \beta(x, y, t, \varphi_{ij}, \psi_{lm}, \varphi_1, \varphi_u)\,e^{b(x,y,t,z)}, \tag{22$_1$}$$

$$f_{\varphi_u} = \gamma(x, y, t, \varphi_{ij}, \psi_{lm}, \varphi_1, \varphi_u)\,e^{b(x,y,t,z)}, \tag{22$_2$}$$

aici am notat cu φ_{ij} pe φ şi derivatele sale pînă la ordinul h, diferite de φ_1 şi φ_u şi cu ψ_{lm} pe ψ şi derivatele sale pînă la ordinul k, cu excepţia lui ψ_1, iar b este o soluţie particulară a ecuaţiei

$$\frac{\partial b}{\partial z} = B(x, y, t, z). \tag{23}$$

Înmulţind relaţiile (22) cu e^{-b} şi integrînd rezultă

$$c(x, y, t, z) = \beta_1(x, y, t, \varphi_{ij}, \psi_{lm}, \varphi_1, \varphi_u) + \delta_1(x, y, t, \varphi_{ij}, \psi_{lm}, \varphi_u, \psi_1) =$$

$$= \gamma_1(x, y, t, \varphi_{ij}, \psi_{lm}, \varphi_1, \varphi_u) + \delta_2(x, y, t, \varphi_{ij}, \psi_{lm}, \varphi_1, \psi_1),$$

de unde

$$c(x, y, t, z) = \beta_2(x, y, t, \varphi_{ij}, \psi_{lm}, \varphi_1, \varphi_u) + \delta(x, y, t, \varphi_{ij}, \psi_{lm}, \psi_1), \tag{24}$$

$c(x, y, t, z)$ fiind o soluţie particulară a ecuaţiei

$$\frac{\partial c}{\partial z} = e^{-b(x,y,t,z)}.$$

Dacă considerăm transformarea

$$z = c(x, y, t, z), \tag{25}$$

obţinem din nou o ecuaţie (17), iar soluţia (6) devine

$$z = f_1(x, y, t, \varphi_{ij}, \psi_{lm}, \varphi_1, \varphi_u) + f_2(x, y, t, \varphi_{ij}, \psi_{lm}, \psi_1). \tag{26}$$

Din (21) şi (19), vedem că $B = C = 0$, deci ecuaţia transformată este de forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = A(x, y, t)\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial t} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + G\frac{\partial z}{\partial t} + L, \tag{27}$$

unde D, E, G, L sînt funcţii de x, y, t, z.

Deci, ecuaţiile (4) *care admit o integrală generală de forma* (5), *sînt reductibile cu ajutorul unor transformări de variabile la forma* (14) *sau* (27)

§ 3. *Ecuaţiile cvasiliniare.* Să arătăm acum că ecuaţiile (27), integrabile explicit, sînt reductibile la ecuaţii (3) cvasiliniare. Pentru aceasta să înlocuim (7) în (27) şi să notăm identitatea pe care o obţinem cu (27'). Derivînd (27') în raport cu $\varphi_{r+1,h-r}$, vedem că

$$f_{x\varphi_1} + (f_{\varphi_1\psi_{lm}}\psi_{l+1,m} + \psi_{l,m+1}\alpha_t) = Df_{\varphi_1}. \tag{28}$$

Derivînd (28), pe rînd, în raport cu derivatele de ordinul $k+1$ ale lui ψ obţinem

$$f_{\varphi_1\psi_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, v). \tag{29}$$

Derivînd (28), pe rînd, în raport cu $\psi_{k-i,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ rezultă mai departe

$$f_{\varphi_1\psi_{k-1,0}} = f_{\varphi_1\psi_{k-2,1}} = \ldots = f_{\varphi_1\psi_{s,k-s-1}} = 0, \tag{30}$$
$$f_{\varphi_1\psi_{0,k-1}} = f_{\varphi_1\psi_{1,k-2}} = \ldots = f_{\varphi_1\psi_{l-1,k-l}} = 0.$$

şi

$$\begin{aligned}
&f_{\varphi_1\psi_{s-1,k-s}} = \frac{\partial D}{\partial z} f_{\varphi_1} f_{\psi_1},\\
&f_{\varphi_1\psi_{s-2,k-s+1}} + f_{\varphi_1\psi_{s-1,k-s}}\, a_t = \frac{\partial D}{\partial z} f_{\varphi_1} f_{\psi_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{\varphi_1\psi_{l,k-l-1}} + f_{\varphi_1\psi_{l+1,k-l-2}}\, a_t = \frac{\partial D}{\partial z} f_{\varphi_1} f_{\psi_{v-1}},\\
&f_{\varphi_1\psi_{l,k-l-1}}\, a_t = \frac{\partial D}{\partial z} f_{\varphi_1} f_{\psi_v}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Eliminînd în continuare din (31) derivatele de ordinul doi ale lui f obţinem

$$\frac{\partial D}{\partial z}\left(f_{\psi_v} - a_t f_{\psi_{v-1}} + a_t^2 f_{\psi_{v-2}} - \ldots + (-1)^{v-1} a_t^{v-1} f_{\psi_1}\right) = 0. \tag{32}$$

Să derivăm acum (27') în raport cu $\varphi_{p,h-p+1}$. Folosind $(8)_1$ şi $(9)_2$, vedem că

$$f_{t\varphi_u} + f_{\varphi_u\psi_{lm}}\left(\psi_{l+1,m} + \psi_{l,m+1}\, a_t\right) = E f_{\varphi_u}. \tag{33}$$

Derivînd (33), pe rînd, în raport cu derivatele de ordinul $k+1$ şi k ale lui ψ obţinem un şir de relaţii analoge cu (31), de unde rezultă

$$\frac{\partial E}{\partial z}\left(f_{\varphi_v} - a_t f_{\varphi_{v-1}} + a_t^2 f_{\varphi_{v-1}} - \ldots + (-1)^{v-1} a_t^{v-1} f_{\psi_1}\right) = 0. \tag{34}$$

Din (31) şi (34) rezultă mai departe $\partial A/\partial t = 0$. Pentru simplitatea expunerii vom considera în (6) $h = k = 1$. Pentru cazul general demonstraţia este perfect analogă. Derivînd (27'), pe rînd, în raport cu $\psi_{tt} \equiv \psi_{20}$, $\psi_{ta} \equiv \psi_{11}$ şi $\psi_{aa} \equiv \psi_{02}$ obţinem

$$\begin{aligned}
&f_{x\psi_t} = A f_{y\psi_t} + G f_{\psi_t},\\
&f_{\psi_t} a_{xt} + f_{x\psi_a} + f_{\varphi_{ij}\psi_a}\psi_{i+1,j} + f_{\varphi_{ij}\psi_t}\psi_{i+1,j}\, a_t =\\
&= A\left[f_{\psi_t} a_{yt} + f_{y\psi_a} + f_{\varphi_{ij}\psi_a}\psi_{i,j+1} + f_{\varphi_{ij}\psi_t}\psi_{i,j+1}\, a_t\right] + G f_{\psi_a},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_{\psi_a} a_{xt} + \left(f_{x\psi_a} + f_{\varphi_{ij}\psi_a}\psi_{i+1,j}\right) a_t =\\
&= A\left[f_{\psi_a} a_{yt} + \left(f_{y\psi_a} + f_{\varphi_{ij}\psi_a}\psi_{i,j+1}\right) a_t\right] + G f_{\psi_a} a_t.
\end{aligned} \tag{35}$$

Să considerăm întîi în (32) paranteza egală cu zero. În acest caz, pentru $k = 1$, putem scrie

$$f_{\psi_a} = a_t f_{\psi_t}. \tag{36}$$

Înlocuind (36) în ultimele relaţii (35) şi folosind prima relaţie (35) obţinem

$$a_{xt} = A a_{yt}. \tag{37}$$

Derivînd (15) în raport cu t şi folosind (37), vedem că

$$\partial A/\partial t = 0. \tag{38}$$

Să presupunem acum paranteza din (32) diferită de zero. În acest caz, din (32) şi (34) rezultă

$$D = D(x, y, t), \quad E = E(x, y, t). \tag{39}$$

Dacă $f_{\psi_t} = 0$, din ultimele relaţii (35), obţinem

$$f_{\psi_a}(a_{xt} - A a_{yt}) = 0, \tag{40}$$

adică $f_{\psi_a} = 0$.

Dacă $f_{\psi_t} \neq 0$, derivînd $(35)_1$, pe rînd, în raport cu φ_x şi φ_y, vedem că

$$\partial G/\partial z = 0. \tag{41}$$

Derivînd $(35)_3$ şi $(35)_2$, pe rînd în raport cu φ_x şi φ_y, vedem că

$$f_{\psi_a\varphi} = f_{\psi_t\varphi} = 0.$$

Dacă înmulţim $(35)_2$ cu a_t şi scădem din $(35)_3$ obţinem

$$(f_{\psi_a} - f_{\psi_t})(a_{xt} - A a_{yt}) = 0,$$

adică şi în acest caz avem $\partial A/\partial t = 0$.

Folosind (38), putem reduce ecuaţia (27) la o formă mai simplă. Pentru aceasta considerăm următoarea transformare a variabilelor independente

$$\bar{x} = f(x, y), \quad \bar{y} = y, \quad \bar{t} = t,$$

unde $f(x, y) = 0$ este o soluţie particulară a ecuaţiei $y' + A(x, y) = 0$. În urma acestei transformări ecuaţia (27) devine

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial t} = D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + G\frac{\partial z}{\partial t} + L. \tag{42}$$

Înlocuind (7) în (42) şi derivînd în raport cu $\psi_{r+1,h-r}$ vedem că $D = 0$, deci obţinem din nou o ecuaţie de forma (3).

BIBLIOGRAFIE

1. Cosserat E. — *Sur la théorie des équations aux derivées partielles du second ordre.* Notă adăugată în *Théorie générale des surfaces* de Darboux t. IV. p. 405—422.
2. Goldhagen F. — *Rezolvarea problemelor la limită pentru unele ecuații hiperbolice și parabolice.* Academia R.P.R. Fil. Iași, Studii și cerc. șt Matematică — T. XIV, f. 1, 1963, p. 29—54
3. Mises R. v., — *Mathematical theory of compressible fluid flow.* New York, 1958, p. 170—175.
4. Moutard I. F. — *Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* C.R. T. LXX, p. 834—838.
5. Taub A. H. — *Interaction of progressive rarefaction waves.* Ann. Math. 47 (1946), p. 811—828.

УРАВНЕНИЯ МУТАРДА С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Краткое содержание

В настоящей Заметке изучаем уравнения (4) которые допускают общий интеграл вида (6). Они обобщают уравнения Мутарда [4]. Используя выражения (7) производных неизвестной функции в произвольных функциях и их производных, показываем что уравнения приводимы с помощью превращений переменых величин в вид (3). Для уравнения (3) можем далее использовать метод Е. Коссерата [1]. Замечаем,что в нашем случае возможно расширить класс решений используя теорию Соболева обобщенных решений. А также, как показано в [2], мы можем решать граничные задачи с помощью общего решения (6).

ÉQUATIONS DE MOUTARD À TROIS VARIABLES

Résumé

On étudie dans cette Note les équations (4) qui admettent une intégrale générale de forme (6). Celles-ci généralisent les équations de Moutard [4].

Nous avons employé les expressions (7) des dérivées de la fonction inconnue dans les fonctions arbitraires et leurs dérivées afin de montrer qu'à la suite de certaines transformations des variables les équations sont réductibles à la forme (3).

Pour les équations (3) on peut employer la méthode de E Cosserat [1].

Il est évident que dans notre cas on peut élargir la classe des solutions par l'emploi da la théorie de Sobolev des solutions généralisées.

De même, ainsi qu'il résulte de [2], on peut résoudre les problèmes aux limites à l'aide de la solution générale (6).

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ПО ИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ РЕШЕНИЯМ В НЕКОТОРЫХ МНОГОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

А. Ф. ШЕСТОПАЛ

В теории самосопряженных дифференциальных уравнений центральное место занимает теорема о разложении функции Грина по системе собственных функций. Однако при практическом определении системы собственных функций возникают затруднения, которые весьма трудно преодолеть. Поэтому возникает естественное стремление разлагать функцию Грина по другим функциям, которые тесно связаны с дифференциальным уравнением. Именно такими является *фундаментальное решение* дифференциального уравнения (функция Грина для всей плоскости) и функции, с ним связанные посредством линейных операторов.

Поскольку эти функции образуют не полную и не ортогональную систему, то прежде всего следует указать на тот класс областей и краевых условий, для которых такие разложения имеют место. Оказывается, что их сравнительно просто осуществить, если *основной областью* является многоугольник, а краевые условия допускают *отражение*.

Ввиду того, что фундаментальное решение для уравнений с постоянными коэффициентами всегда можно найти, то разложение функции Грина по вышеупомянутым функциям для таких уравнений в сущности задает её. Поэтому понятно, что любой результат в этом направлении даже для весьма частных случаев многоугольных областей получается с большим трудом.

Кажется, в этом направлении не проводилось никаких исследований.