SUR CERTAINS ESPACES A CONNEXION CENTRO-AFFINE

PAR

V. CRUCEANU

1. Soit V_n une variété différentiable de classe C^∞, munie d'une connexion centro-affine normale [1], représentée en coordonnées locales par le vecteur de structure $\xi^\alpha(x)$ et la connexion linéaire $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$, liés par la condition

$$\Delta_\beta \xi^\alpha = \delta^\alpha_\beta. \tag{1}$$

Le vecteur de structure $\xi^\alpha(x)$ permet de définir sur l'espace vectoriel tangent T_M en chaque point M de V_n une structure d'espace centro-affine avec le centre dans le point O déterminé par la condition $\overrightarrow{MO} = -\vec{\xi}$. La connexion linéaire $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$ détermine une correspondance centro-affine entre les espaces centro-affines tangents à V_n le long de chaque courbe $\gamma(t)$ à l'aide du système

$$\frac{dX^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} X^\beta \frac{dx^\gamma}{dt} + \frac{dx^\alpha}{dt} = 0\,, \tag{2}$$

où X^α sont les coordonnées d'un point quelconque dans l'espace tangent.

Les conditions d'intégrabilité pour le système (1) donnent

$$R^\alpha_{\beta,\gamma\delta}\,\xi^\beta + 2S^\alpha_{\gamma\delta} = 0\,, \tag{3}$$

où $R^\alpha_{\beta,\gamma\delta}$ et $S^\alpha_{\beta\gamma}$ sont respectivement les tenseurs de courbure et de torsion pour la connexion linéaire $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ [2].

Des équations (1) il résulte que les trajectoires du champ de vecteurs ξ^α sont des géodésiques centrales, c'est-à-dire des courbes qui se développent dans la charte sur l'espace centro-affine tangent en un de ses points, sur un segment de droite qui passe par le centre de cet espace.

Nous appelons *mouvement* dans l'espace à connexion centro-affine V_n, une transformation qui conserve la vecteur de structure ξ^α et la connexion linéaire $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Donc, un champ de vecteurs v^α détermine un groupe uniparamétrique de mouvements sur l'espace V_n à connexion centro-affine $(\xi^\alpha, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma})$ si et seulement si

(4)
$$\underset{v}{\pounds}\, \xi^\alpha = 0, \quad \underset{v}{\pounds}\, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$$

où $\pounds$ este le symbole de la dérivée de Lie.

Dans ce qui suit nous allons établir quelques propriétés des espaces à connexion centro-affine normale qui sont doués en plus d'une structure métrique, symplectique, complexe ou kählerienne, conservée par la connexion.

2. Considérons sur la variété V_n à connexion centro-affine donnée, une métrique donnée par le tenseur $g_{\alpha\beta}$, qui este conservée par la connexion, c'est-à-dire

(5)
$$\nabla_\gamma\, g_{\alpha\beta} = 0.$$

Dans ce cas, la relation (1) est équivalente à

(6)
$$g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\, \xi_\beta$$

et par suite on obient le

Théorème 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion métrique soit centro-affine est qu'il existe sur V_n un champ de vecteurs ξ_α tel que le tenseur métrique soit égal à sa dérivée covariante*

De (1) et (5) on obtient, en dérivant l'expression

$$\xi^2 = g_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha \xi^\beta$$

la relation

(7)
$$2\xi_\alpha = \nabla_\alpha (\xi^2)$$

et par suite nous avons le

Théorème 2. *La 1-forme $\omega = \xi_\alpha\, dx^\alpha$ définie par le vecteur de structure, dans un espace à connexion centro-affine métrique, est exacte.*

De la relation (7) il résulte que le vecteur ξ_α doit satisfaire à la condition

(8)
$$\xi_\alpha\, S^\alpha_{\beta\gamma} = 0.$$

De (6) et (7) on obtient pour $g_{\alpha\beta}$ l'expression

(9)
$$2g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \nabla_\beta (\xi^2),$$

c'est-à-dire, le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est égal à la dérivée covariante du deuxième ordre d'une fonction scalaire. Réciproquement, si nous avons

$$g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \nabla_\beta f,$$

où f satisfait à la condition

$$\nabla_\alpha f\, S^\alpha_{\beta\gamma} = 0,$$

alors, en mettant

$$\xi_\alpha = \Delta_\alpha f,$$

on obtient (6) et par suite la connexion métrique est centro-affine. Nous avons donc le

Théorème 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion métrique sur V_n soit centro-affine est qu'il existe sur V_n une fonction scalaire f telle que le tenseur métrique soit égal à la dérivée covariante du deuxième ordre de f.*

En écrivant la relation (7) sous la forme

(10)
$$\nabla_\alpha \xi = \frac{\xi_\alpha}{\xi},$$

on remarque que le vecteur $\nabla_\alpha \xi$ est unitaire, c'est-à-dire

(11)
$$g^{\alpha\beta}\, \nabla_\alpha \xi\, \nabla_\beta \xi = 1.$$

Des relations (9), écrites sous la forme

(12)
$$g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi\, \nabla_\beta \xi + \xi\, \nabla_\alpha \nabla_\beta \xi$$

on obtient

(13)
$$\Delta \xi = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \xi = \frac{n-1}{\xi}.$$

Les relations (13) et (7) donnent, en appliquant le théorème de E. Hopf [6], le

Théorème 4. *Une connexion linéaire qui conserve une métrique positivement définie sur une variété compacte ne peut pas être centro-affine.*

En considérant maintenant la fonction

(14)
$$\varphi = \frac{1}{\xi^{n-2}},$$

on obtient de (11) et (12)

(15)
$$\Delta \varphi = 0,$$

c'est-à-dire nous avons le

Théorème 5. *Dans un espace à connexion centro-affine métrique la fonction $\varphi = 1/\xi^{n-2}$ où ξ est la longueur du vecteur de structure, est une fonction harmonique.*

Dans le cas d'un espace euclidien ce résultat nous conduit à la solution élémentaire de l'équation de Laplace.

Considérons maintenant la famille des hypersurfaces $\xi =$ const. De l'équation (11) il résulte que les hypersurfaces de cette famille sont géodésiquement parallèles et que ξ est l'arc sur les géodésiques normales. En supposant les hypersurfaces de la famille représentées localement par les équations

(16) $$x^\alpha = x^\alpha(u^a, c), \quad (a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1),$$

on obtient de (12) pour le tenseur métrique des hypersurfaces

(17) $$g_{ab} = g_{\alpha\beta}\, x^\alpha_a\, x^\beta_b = \xi \nabla_\alpha \nabla_\beta \xi\, x^\alpha_a\, x^\beta_b,$$

où

$$x^\alpha_a = \partial_a x^\alpha.$$

Le vecteur unitaire normal aux hypersurfaces de la famille est d'après (10)

(18) $$n_\alpha = \frac{\xi_\alpha}{\xi} = \nabla_\alpha \xi$$

et par suite pour le tenseur asymptotique des hypersurfaces on obtient

(19) $$h_{ab} = -\nabla_\alpha n_\beta\, x^\alpha_a\, x^\beta_b = -\nabla_\alpha \nabla_\beta \xi\, x^\alpha_a\, x^\beta_b = -\frac{g_{ab}}{\xi}.$$

Il en résulte que tous les points des hypersurfaces sont ombilicaux. La courbure moyenne est donnée par l'expression

(20) $$H = g^{ab} h_{ab} = -\frac{n-1}{\xi}$$

et par suite toutes les hypersurfaces de la famille sont à courbure moyenne constante.

Réciproquement, supposons que la variété V_n à connexion métrique admet une famille de hypersurfaces géodésiquement parallèles formées par des points ombilicaux, dont le vecteur normal satisfait à la condition

(21) $$n_\gamma S^\alpha_{\beta\gamma} = 0$$

et la courbure moyenne est donnée par l'expression (20), où ξ est l'arc sur les géodésiques normales. Alors, de (21) il résulte que le tenseur asymptotique est symétrique. Puis, ξ étant l'arc sur les géodésiques normales et la courbure moyenne étant constante et donnée par (20), on obtient les relations (18) et (19).

En écrivant le tenseur métrique de V_n sous la forme

(22) $$g_{\alpha\beta} = g_{ab}\, x^a_\alpha\, x^b_\beta + n_\alpha n_\beta,$$

où (x^a_α, n_α) est le repère réciproque au repère (x^α_a, n^α) il résulte de (19) et (18) la relation (9) et par suite la connexion considérée sur V_n est centro-affine. Nous avons donc le

Théorème 6. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion métrique sur V_n soit centro-affine est que V_n admette une famille de hypersurfaces géodésiquement parallèles formées par des points ombilicaux, tels que leur vecteur normal satisfasse à la condition* (21) *et la courbure moyenne soit constante et donnée par* (20), *où ξ est l'arc sur les géodésiques normales.*

Dans le cas particulier où la connexion est symétrique on obtient un résultat de P. Shirokov [5] relatif aux espaces de Riemann qui admettent un champ de directions absolument concourantes au sens de A. Myller.

En supposant la connexion $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ symétrique, c'est-à-dire riemannienne, de (6) on obtient

(23) $$\underset{\xi}{\pounds}\, g_{\alpha\beta} = 2\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)} = 2g_{\alpha\beta}$$

et par suite le vecteur de structure ξ^α engendre un groupe uniparamétrique de homothéties.

Réciproquement, soit V_n un espace à connexion riemannienne qui admet un groupe de homothéties engendré par un champ de vecteurs η^α de sorte que la 1-forme $\theta = \eta_\alpha dx^\alpha$ soit fermée. Alors des équations

(24) $$\underset{\xi}{\pounds}\, g_{\alpha\beta} = 2\nabla_{(\alpha}\eta_{\beta)} = 2cg \quad (c = \text{const} \neq 0)$$

et

(25) $$\nabla_{[\alpha}\eta_{\beta]} = 0$$

on obtient

$$c g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \eta_\beta$$

et par suite la connexion considérée sur V_n est centro-affine. Il en résulte le

Théorème 7. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion riemannienne sur V_n soit centro-affine est que V_n admette un groupe uniparamétrique de homothéties engendré par un champ de vecteurs η^α qui détermine une 1-forme $\theta = \eta_\alpha dx^\alpha$ fermée.*

Considérons maintenant un espace de Riemann qui admet un groupe uniparamétrique de homothéties à trajectoires géodésiques. A côté de (24) nous avons alors

(26) $$\nabla_\alpha \eta^\beta \eta^\alpha = \lambda \eta^\beta.$$

De (24) et (26) on obtient

$$2\nabla_{(\alpha}\eta_{\beta)}\eta^\alpha\eta^\beta = 2\nabla_\alpha\eta_\beta\,\eta^\alpha\eta^\beta = 2c\eta^2 = 2\lambda\eta^2$$

et par suite

(27) $$\lambda = c.$$

Cela étant, nous avons de (24) et (26)

(28) $$\nabla_\alpha (\eta^2) = 2c\, \eta_\alpha ,$$

c'est-à-dire la 1-forme $\theta = \eta_\alpha\, dx^\alpha$ est exacte et d'après le théorème 7, la connexion est centro-affine. Donc nous avons le

Théorème 8. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion riemannienne sur V_n soit centro-affine est que V_n admette un groupe uniparamétrique de homothéties à trajectoires géodésiques.*

3. Soit une variété différentiable V_{2n} à connexion centro-affine douée d'une structure presque symplectique définie par le tenseur antisymétrique et non-dégénéré $F_{\alpha\beta}$. Supposons que la connexion conserve la structure presque symplectique, c'est-à-dire

(28) $$\nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 .$$

En considérant le vecteur

(29) $$\xi_\beta = F_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha$$

que nous appelons *associé* au vecteur de structure ξ^α, la relation (1) peut s'écrire sous la forme équivalente

(30) $$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta$$

et par suite nous avons le

Théorème 9. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion presque symplectique sur V_{2n} soit centro-affine est qu'il existe sur V_{2n} un champ de vecteurs ξ_γ de sorte que le tenseur de structure $F_{\alpha\beta}$ soit égal à sa dérivée covariante.*

De (30) il résulte que le vecteur ξ_γ a sa dérivée covariante antisymétrique. Pour trouver une interprétation géométrique de cette propriété, considérons une géodésique arbitraire sur V_{2n} représentée localement par les équations

(31) $$x^\alpha = x^\alpha (s)$$

où s est son arc affine. Nous avons alors

(32) $$\frac{d}{ds}\left(\xi_\alpha \frac{dx^\alpha}{ds} \right) = \nabla_{[\alpha} \xi_{\beta]} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}$$

On obtient le

Théorème 10. *Une condition nécessaire et suffisante pour que dans un espace à connexion affine la dérivée covariante d'un vecteur ξ_α soit antisymétrique est que son produit scalaire par le vecteur tangent à toute géodésique, défini par l'arc affine correspondant, soit constant le long de la géodésique.*

En supposant maintenant la connexion $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ symétrique, de (28) il résulte que V_{2n} est à structure symplectique, c'est-à-dire la forme quadratique extérieure

(33) $$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

est fermée.

Dans ce cas de (30) on obtient

(34) $$F = \frac{1}{2} \nabla_{[\alpha} \xi_{\beta]}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{2} d\omega,$$

(35) $$\omega = \xi_\alpha\, dx^\alpha .$$

Il en résulte le

Théorème 11. *Si une connexion centro-affine symétrique sur V_{2n} est symplectique, alors la forme quadratique extérieure associée à la structure symplectique est exacte.*

Dans le cas de la connexion $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ symétrique on obtient encore de (30)

(36) $$\underset{\xi}{\mathcal{L}} F_{\alpha\beta} = 2\nabla_{[\alpha} \xi_{\beta]} = 2F_{\alpha\beta}$$

et par suite le champ de vecteurs ξ^α engendre un groupe uniparamétrique de homothéties symplectiques.

Réciproquement, s'il existe sur V_{2n} à connexion symétrique et symplectique un champ de vecteurs η^α qui engendre un groupe de homothéties symplectiques, c'est-à-dire

(37) $$\underset{\eta}{\mathcal{L}} F_{\alpha\beta} = 2\, \nabla_{[\alpha} \eta_{\beta]} = 2c\, F_{\alpha\beta} \quad (c = \text{const} \neq 0)$$

tel que la dérivée covariante du vecteur associé $\bar{\eta}^\alpha$ soit antisymétrique, on obtient

(38) $$cF_{\alpha\beta} = 2\nabla_\alpha \eta_\beta$$

et d'après le théorème 9 la connexion considérée est centro-affine. Il en résulte le

Théorème 12. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion symétrique et symplectique sur V_{2n} soit centro-affine est que V_{2n} admette un groupe de homothéties symplectiques tel que la dérivée covariante du vecteur covariant associé au vecteur qui engendre le groupe soit antisymétrique.*

De la relation (9) il résulte encore le

Théorème 13. *Si un espace à connexion symétrique symplectique admet un groupe de homothéties symplectiques, alors la forme quadratique extérieure associée à la structure symplectique est exacte.*

4. Considérons une variété V_{2n} à connexion centro-affine normale douée d'une structure presque complexe définie par le tenseur $F_{\alpha\beta}$ qui satisfait à la condition

$$F_\alpha^\beta F_\beta^\gamma = -\delta_\alpha^\gamma . \tag{39}$$

Supposons la structure presque complexe conservée par la connexion, c'est-à-dire

$$\nabla_\gamma F_\alpha^\beta = 0 . \tag{40}$$

Dans ce cas, en considérant le vecteur

$$\xi^\alpha = F_\beta^\alpha \xi^\beta \tag{41}$$

nommé le vecteur *conjugué* au vecteur ξ^α, la relation (1) prend la forme équivalente

$$F_\alpha^\beta = \nabla_\alpha \xi^\beta \tag{42}$$

et par suite nous avons le

Théorème 14. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion presque complexe sur V_{2n} soit centro-affine est qu'il existe sur V_{2n} un champ de vecteurs $\bar{\xi}^\alpha$ tel que le tenseur de structure F_α^β soit égal à sa dérivée covariante.*

Les structures presque complexes qui satisfont à la condition (42) ont été introduites par Y. Mutô [3] dans le cas particulier des variétés kählériennes et retrouvées puis dans le cas général par I. Satô [4].

En vertu de (42) nous avons

$$\nabla_\alpha \xi^\beta \bar{\xi}^\alpha = F_\alpha^\beta \bar{\xi}^\alpha \tag{43}$$

ce qui nous donne le

Théorème 15. *Sur une variété presque complexe V_{2n} à connexion centro-affine, les trajectoires du champ de vecteurs $\bar{\xi}^\alpha$, où $\bar{\xi}^\alpha$ est le conjugué du vecteur de structure ξ^α, sont des courbes planes holomorphes.*

Des mêmes relations (42) on obtient aussi

$$\nabla_\alpha \bar{\xi}^\beta \xi^\alpha = \bar{\xi}^\beta \tag{44}$$

et par conséquent nous avons le

Théorème 16. *Sur une variété presque complexe V_{2n} à connexion centro-affine, la direction du vecteur $\bar{\xi}^\alpha$, conjugué au vecteur de structure ξ^α, se transporte par parallélisme le long des trajectoires du champ de vecteurs ξ^α.*

En supposant la connexion $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ symétrique, des relations (40) il résulte que la structure presque complexe sur V_{2n} est complexe [6] et en vertu de (1) et (42) on obtient

$$\underset{\xi}{\mathfrak{L}} F_\alpha^\beta = 0, \quad \underset{\bar{\xi}}{\mathfrak{L}} F_\alpha^\beta = 0 . \tag{45}$$

Par suite on a le

Théorème 17. *Sur une variété complexe V_{2n} à connexion centro-affine le vecteur de structure et son conjugué sont des vecteurs analytiques.*

Dans ce cas de (1) et (42) on a aussi

$$[\xi, \bar{\xi}] = \underset{\xi}{\mathfrak{L}} \bar{\xi} = -\underset{\bar{\xi}}{\mathfrak{L}} \xi = 0 . \tag{46}$$

Il en résulte, compte tenu de (45), le

Théorème 18. *Sur une variété complexe V_{2n} à connexion centro-affine le vecteur de structure et son conjugué engendrent un groupe abélien à deux paramètres de transformations qui conservent la structure complexe de la variété.*

5. Supposons maintenant la variété V_{2n} à connexion centro-affine symétrique douée d'un structure kählerienne définie par les tenseurs $g_{\alpha\beta}$ et $F_{\alpha\beta}$ qui satisfont aux conditions

$$F_\alpha^\beta F_\beta^\gamma = -\delta_\alpha^\gamma , \quad g_{\alpha\beta} F_\gamma^\alpha F_\delta^\beta = g_{\gamma\delta} . \tag{47}$$

Considérons la structure kählerienne conservée par la connexion, c'est-à-dire

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 . \tag{48}$$

Dans ce cas, nous avons encore sur V_{2n} une structure symplectique, conservée par la connexion, définie par le tenseur

$$F_{\alpha\beta} = F_\alpha^\gamma g_{\gamma\beta} . \tag{49}$$

Nous obtenons des résultats établis dans les paragraphes précédents pour le vecteur de structure le

Théorème 19. *Sur une variété à connexion centro-affine symétrique et kählerienne, le vecteur de structure ξ^α engendre un groupe uniparamétrique de homothéties riemanniennes et symplectiques qui conservent la structure complexe de la variété.*

Pour le vecteur $\bar{\xi}^\alpha$ conjugué à ξ^α nous avons les relations

$$\underset{\xi}{\mathfrak{L}} g_{\alpha\beta} = 0, \quad \underset{\bar{\xi}}{\mathfrak{L}} F_{\alpha\beta} = 0 \tag{50}$$

et, compte tenu des paragraphes 3 et 4, on obtient le

Théorème 20. *Sur une variété à connexion centro-affine symétrique et kählerienne le conjugué $\bar{\xi}^\alpha$ du vecteur de structure ξ^α engendre un groupe uniparamétrique de mouvements riemanniens, symplectiques et centro-affines, qui conservent la structure complexe de la variété.*

Les théorèmes 19, 20 et la relation (46) nous donnent le

Théorème 21. *Sur une variété à connexion centro-affine symetrique et kählerienne le vecteur de structure et son conjugué engendrent un groupe commutatif à deux paramètres de homothéties riemanniennes et symplectiques qui conservent la structure complexe de la variété.*

Soit maintenant sur une variété kählerienne V_{2n} un champ de vecteurs η^α et son conjugué $\bar{\eta}^\alpha$. Nous avons alors

$$\underset{\eta}{\mathcal{L}}\, g_{\alpha\beta} = 2\nabla_{(\alpha}\eta_{\beta)}\,, \qquad \underset{\eta}{\mathcal{L}}\, F_{\alpha\beta} = -2\nabla_{[\alpha}\eta_{\beta]} \tag{51}$$

où ∇ est le symbole de la dérivée covariante dans la connexion définie par les symboles de Christoffel pour le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$. De ces relations et des théorèmes 7 et 12 nous obtenons les résultats:

Théorème 22. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion symétrique et kählerienne sur V_{2n} soit centro-affine est qu'il existe sur V_{2n} un champ de vecteurs η^α qui engendre un groupe de homothéties riemanniennes et dont le conjugué $\bar{\eta}^\alpha$ engendre un groupe de mouvements symplectiques.*

Théorème 23. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion symétrique et kählerienne sur V_{2n} soit centro-affine est qu'il existe sur V_{2n} un champ de vecteurs η^α qui engendre un groupe de mouvements riemanniens et dont le conjugué $\bar{\eta}^\alpha$ engendre un groupe de homothéties symplectiques.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Cruceanu V. — *Sur les espaces à connexion centro-affine.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 260, p. 6272—6274.
2. Lichnerowicz A. — *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.* Ed. Cremonese, Roma, 1955.
3. Mutô Y. — *On some almost kählerian spaces.* Tôhoku Math. Journ. 14 (1962), p. 344—364.
4. Satô I. — *Almost analytic vector fields in almost complex manifolds.* Tôhoku Math. Journ. 17 (1965), p. 185—199.
5. Широхов П. — *О сходящихся направлениях в римановых пространствах.* Изв. физ. мат. Обществ. 1934 — 1935, 3, 7, стр. 77 — 88.
6. Yano K. — *Differential Geometry on complex and almost complex Spaces.* Pergamon Press, 1965.

ASUPRA UNOR SPAŢII CU CONEXIUNE CENTRO-AFINĂ

Rezumat

Se stabilesc unele proprietăţi ale spaţiilor cu conexiune centro-afină normală [1] care sînt dotate în plus cu o structură metrică, simplectică, complexă sau kähleriană, păstrată de conexiune.

SUR LES COUPLES DE CONNEXIONS COMPATIBLES AVEC LES STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES

PAR

V. CRUCEANU et R. MIRON

Il y a divers travaux récents dans lesquels on a considéré des couples de connexions sur des variétés différentiables [2,5] douées de structures géométriques supplémentaires, pour lesquelles on a des relations de compatibilité.

Dans cette Note on considère une variété différentiable V_{2n}, douée d'un couple de connexions (Γ, G) et une structure presque complexe $F=(F^i_j)$. La relation de compatibilité entre ces objets géométriques est définie par la condition suivante: en transportant parallèlement un vecteur v^h par rapport à la connexion G, son immage u^i, par l'automorphisme F, $u^i = F^i_h v^h$, est transportée parallèlement par rapport à la connexion Γ sur V_{2n}.

La présence des deux connexions Γ, G permet d'exprimer géométriquement la relation de compatibilité en utilisant un algorithme de dérivation covariante mixte [3]. On obtient ainsi différentes caractérisations de la condition de compatibilité, on trouve tous les couples de connexions (Γ, G) si la F-structure est donnée, on détermine le groupe de transformations des couples (Γ, G) qui conservent la relation de compatibilité etc.

Le problème, dont nous nous occupons, sera traité dans une autre Note pour le cas de structures métriques et presque symplectiques.

1. Soit V_{2n} une variété différentiable C^∞, douée d'une structure presque complexe définie par un champ de tenseurs F et nommée „F-structure".

$$F^i_j F^j_k = -\delta^i_k\,. \tag{1}$$

Cette structure détermine un automorphisme de l'espace tangent dans chaque point de V_{2n}, donné par les équations

$$u^i = F^i_j v^j\,. \tag{2}$$