BIBLIOGRAPHIE

1. C r u c e a n u V. — *Asupra geometriei centro-afine a varietăţilor neolonome* V_n^{n-1}. Analele ştiinţifice ale Univ. „Al. I. Cuza“, Iaşi 1966, pp. 453—464.
2. M i r o n R. — *Sur les espaces à connexions conjuguées au sens de Norden*, Analele ştiinţifice ale Univ. „Al. I. Cuza“ Iaşi, 1963, pp. 445—454.
3. N o r d e n A. P. — *Über Paare conjugierten Parallelübertragungen*, Труды сем. вект. и тенз. анализу, вып. 4 (1937) стр. 205—355.
4. O b a t a M. — *Affine connexions on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure*. Jap. J. Math., 26 (1956) pp. 43—77.
5. O k a d a T. — *Theory of pair connexions*. Sci. Eng. R. Doshisha Univ. 5, 1964 pp. 133—152.
6. Y a n o K. — *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*. Pergamon Press, 1965.

ASUPRA PERECHILOR DE CONEXIUNI COMPATIBILE CU STRUCTURI APROAPE COMPLEXE

Rezumat

O pereche de conexiuni liniare (Γ, G) se numeşte compatibilă cu o structură aproape complexă (F_j^i) dacă transportînd prin paralelism un vector V^i în raport cu conexiunea G, imaginea sa U^i prin automorfismul F, se transportă prin paralelism în raport cu conexiunea Γ.

În lucrare se stabilesc condiţii necesare şi suficiente de compatibilitate, forma generală a perechii (Γ, G) compatibilă cu F, grupul transformărilor perechilor de conexiuni cu această proprietate şi se găsesc cazuri particulare remarcabile.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ МНОЖЕСТВ ПАР ПРЯМЫХ В БИАКСИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ГР. СТАНИЛОВ

Пусть j, k — абсолютные прямые гиперболическо-биаксиального пространства B_3^2. Если вершины A_1, A_2 репера принадлежат j, а вершины A_3, A_4 принадлежат k, то фундаментальная группа G_7 пространства B_3^2 запишется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \alpha_1^1 x_1 + \alpha_1^2 x_2, \\
x_2' &= \alpha_2^1 x_1 + \alpha_2^2 x_2, & \alpha_1^1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^1 \neq 0, \\
x_3' &= \alpha_3^3 x_3 + \alpha_3^4 x_4, \\
x_4' &= \alpha_4^3 x_3 + \alpha_4^4 x_4, & \alpha_3^3 \alpha_4^4 - \alpha_3^4 \alpha_4^3 \neq 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Произвольную прямую g пространства B_3^2 можно представить так:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a x_2 + b x_3, \\
x_4 &= c x_2 + d x_3.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Будем писать $g(a, b, c, d)$. Если

$$b = 0, \tag{3}$$

прямая пересекает k и называется изотропной прямой второй системы. Если

$$c = 0, \tag{4}$$

прямая пересекает j и называется изотропной прямой первой системы. Если

$$b = c = 0, \tag{5}$$

прямая называется бесконечной.

Если точка $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ принадлежит j или k, называется бесконечной. В противном случае, она называется конечной. Аналогично, если плоскость содержит либо j либо k, называется бесконечной. В противном случае, она называется конечной.

Будем обозначать с F_2 поверхность второго порядка, содержащая прямые j и k. Такую поверхность можно представить в виде

$$ax_1x_3 + bx_1x_4 + cx_2x_3 + x_2x_4 = 0. \tag{6}$$

Будем писать $F_2(a, b, c)$. Если

$$a - bc = 0, \tag{7}$$

поверхность выраждена. Пространство F_2-поверхностей является пространством Лобачевкого с абсолютом (7).

В этой работе мы сообщаем некоторые основные формулы интегральной геометрии биаксиального пространства B_3^2. Теоремы существования мер мы доказали используя формы Пфаффа, как это делается в [1]. Функции плотности мы нашли, используя некоторые общие результаты из теории групп Ли [2] и имели в виду некоторые работы Г. И. Дринфельда [3].

1. *Множество* P_1. Пусть $g(a,b,c,d)$, $\bar{g}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ произвольные конечные, непересекающиеся прямые в пространстве B_3^2. Строим элемент $(g, \bar{g})$ — пара таких прямых. Множество P_1 состоит из элементов $(g, \bar{g})$. Будем писать коротко $P_1 \ni (g, \bar{g})$. Эго множество 8-мерное.

Мы доказали, что две конечные, непересекающиеся прямые $g(a, b, c, d)$, $\bar{g}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, d)$ имеют ровно 2 численных инварианта

$$\mathcal{J}_1 = \frac{(a - \bar{a})(d - \bar{d}) - bc - \bar{b}\bar{c}}{b\bar{c}}, \tag{8}$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{b\bar{c}}{c\bar{b}}. \tag{9}$$

Прямые $g, \bar{g}$ пересекаются, если

$$(a - \bar{a})(d - \bar{d}) = (b - \bar{b})(c - \bar{c}). \tag{10}$$

В таком случае имеет место соотношение

$$\mathcal{J}_1 + \frac{1}{\mathcal{J}_2} + 1 = 0. \tag{11}$$

Величины $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ можно истолковать геометрически так.

Рассмотрим специальный линейный комплекс с осью j. Он имеет уравнение

$$p_{34} = 0. \tag{12}$$

Аналогично, специальный линейный комплекс с осью k запишется так

$$p_{12} = 0. \tag{13}$$

Строим пучок линейных комплексов

$$\lambda p_{34} + \mu p_{12} = 0. \tag{14}$$

Прямая $g(a, b, c, d)$ с плюкеровыми-координатами p_{ij} принадлежит комплексу (14), если

$$\lambda = b, \quad \mu = c. \tag{15}$$

Две прямые g, $\bar{g}$ определяют два линейных комплекса K, $\bar{K}$. Берём сложное отношение δ комплексов (12), (13), K, $\bar{K}$. Легко можно получить формулу

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{\delta}. \tag{16}$$

Это геометрическое истолкование дано ранее А. П. Норденом [4]. Мы дадим следующее истолкование величине $\mathcal{J}_1$.

Поверхность $F_2(\alpha, \beta, \gamma)$ содержит $g(a, b, c, d)$, если

$$\alpha = \frac{d}{a}, \quad \beta = -\frac{1}{a}, \quad \gamma = \frac{bc - ad}{a}. \tag{17}$$

Мы установили формулу

$$\mathcal{J}_1^2 = \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_2}, \tag{18}$$

где

$$\mathcal{J} = \frac{(\alpha + \bar{\alpha} - \beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma)^2}{(\alpha - \beta\gamma)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}\bar{\gamma})}, \tag{19}$$

— единственный численный инвариант двух F_2-поверхностей. $\mathcal{J}$ можно интерпретировать как разстояние (или угол) двух F_2-поверхностей.

Можно доказать, что множество P_1 имеет следующую интегральную меру, инвариантную относительно группы G_7:

$$m(P_1) = \int f(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \cdot \frac{da\,db\,dc\,dd}{(bc)^2} \cdot \frac{d\bar{a}\,d\bar{b}\,d\bar{c}\,d\bar{d}}{(\bar{b}\bar{c})^2}, \tag{20}$$

причём $f(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)$ — произвольная функция. Отметим, что множество конечных прямых $g(a, b, c, d)$ имеет меру

$$\int \frac{da\,db\,dc\,dd}{(bc)^2}. \tag{21}$$

2. *Множество* P_2. Обозначим через P_2 множество, которое состоит из пар непересекающихся, изотропных прямых одного и того же типа. Пусть $g \times j = \mathcal{J}$, $\bar{g} \times j = \bar{\mathcal{J}}$. Строим плоскости $\alpha = (\mathcal{J}, k)$, $\bar{\alpha} = (\bar{\mathcal{J}}, k)$. Найдем точки пересечения $A = g \times \alpha$, $B = \bar{g} \times \alpha$. Можно доказать, что наоборот, две конечные точки A, B определяют две такие прямые $g, \bar{g}$. Следовательно, элемент $(g, \bar{g})$ равносилен элементу (A, B). Тогда можно считать, что множество P_2 состоит из пар конечных точек: $P_2 \ni (A, B)$. Если $A(p, q, r, 1)$, $B(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, 1)$ то имеет место формула

$$(22) \qquad m(P_2) = \int \frac{dp\,dq\,dr\,d\bar{p}\,d\bar{q}\,d\bar{r}}{(p\bar{q} - \bar{p}q)^2 (r - \bar{r})^2}.$$

Заметим, что эти разсуждения применимы, если прямая AB не пересекает j и k. Тогда и прямые $g, \bar{g}$ не пересекаются. В таком случае $p\bar{q} \neq \bar{p}q$, $r \neq \bar{r}$.

Прямые $g, \bar{g}$ не имеют численный инвариант. Две конечные точки тоже не имеют.

3. *Множество* P_3. Пусть $g(a, b, c, d)$, с $c = 0$, пересекает j, $\bar{g}(\bar{a}, \bar{b} = 0, \bar{c}, \bar{d})$ пересекает k. Прямые $g, \bar{g}$ не пересекаются. Тогда множество $P_3 \ni (g, \bar{g})$. Две прямые в этом случае имеют ровно один численный инвариант

$$(23) \qquad \mathcal{J}' = \frac{(a - \bar{a})(d - \bar{d})}{b\bar{c}}.$$

Интегральная мера множества P_3 будет

$$(24) \qquad m(P_3) = \int f(\mathcal{J}') \frac{da\,db\,dd\,d\bar{a}\,d\bar{c}\,d\bar{d}}{(b\bar{c})^3},$$

где $f(\mathcal{J}')$ — произвольная функция.

4. *Множество* P_4. Пусть $g \times j = (b, 1, 0, 0)$, $g \times k = (0, 0, c, 1)$, $\bar{g} \times j = (\bar{b}, 1, 0, 0)$, $\bar{g} \times k = (0, 0, \bar{c}, 1)$. Прямые $g, \bar{g}$ не пересекаются. Тогда $P_4 \ni (g, \bar{g})$. Имеет место формула

$$(25) \qquad m(P_4) = \int \frac{db\,dc\,d\bar{b}\,d\bar{c}}{(b - \bar{b})^2 (c - \bar{c})^2}$$

и две бесконечные прямые не имеют численный инвариант.

5. *Множество* P_5. Пусть $g(a, b, c, d)$ — конечная, $\bar{g}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 0, \bar{d})$ — пересекает j. Прямые $g, \bar{g}$ не пересекаются. Тогда $P_5 \ni (g, \bar{g})$. Две такие прямые имеют ровно один численный инвариант

$$(26) \qquad \mathcal{J}'' = \frac{(a - \bar{a})(d - \bar{d}) - bc}{\bar{b}c}.$$

Интегральная мера множества P_5 будет

$$(27) \qquad m(P_5) = \int f(\mathcal{J}'') \frac{da\,db\,dc\,dd\,d\bar{a}\,d\bar{b}\,d\bar{d}}{(\bar{b}c)^3 b}.$$

6. *Множество* P_6 Пусть $g(a, b, c, d)$ — конечная, $\bar{g}(\bar{a}, \bar{b} = \bar{c} = 0, \bar{d})$ — бесконечная. Прямые $(g, \bar{g})$ не пересекаются. Они не имеют численный инвариант. Интегральная мера будет

$$(28) \qquad m(P_6) = \int \frac{da\,db\,dc\,dd\,d\bar{a}\,d\bar{d}}{bc\,[(a - \bar{a})(d - \bar{d}) - bc]^2}.$$

7. *Множе тво* P_7. Пусть $g(a, b, c = 0, d)$ пересекает j, $\bar{g}(\bar{a}, \bar{b} = \bar{c} = 0, \bar{d})$ — бесконечная. Прямые $(g, \bar{g})$ не пересекаются. Две такие прямые не имеют численный инвариант, а интегральная мера множества P_7 даётся интегралом

$$(29) \qquad m(P_7) = \int \frac{da\,db\,dd\,d\bar{a}\,d\bar{d}}{(a - \bar{a})^2 (d - \bar{d})^2 b}.$$

8. *Множество* P_8. Пусть $g, \bar{g}$ — конечные пересекающиеся прямые. Тогда множество P_8 состоит из таких пар прямых. Строим плоскость α этих прямых. Пусть $\alpha \times j = \mathcal{J}(a, 1, 0, 0)$, $\alpha \times k = K(0, 0, b, 1)$. Кроме того, прямая $\mathcal{J}K \times g = G(\lambda a, \lambda, b, 1)$, $\mathcal{J}K \times \bar{g} = \bar{G}(\mu a, \mu, b, 1)$. Обозначим точку пересечения $A(p, q, r, 1) = g \times \bar{g}$. Тогда элемент $(g, \bar{g})$ можно заменить элементом $A(p, q, r, 1)$, $G(\lambda a, \lambda, b, 1)$, $\bar{G}(\mu a, \mu, b, 1)$ и обратно. Две такие прямые $g = AG$, $\bar{g} = A\bar{G}$ имеют ровно один численный инвариант и можно показать, что он

$$(30) \qquad \frac{\mu}{\lambda} = \delta',$$

где δ' — сложное отношение точек $\mathcal{J}$, K, G, $\bar{G}$. Имеет место формула

$$(31) \qquad m(P_8) = \int f\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{dp\,dq\,dr\,d\lambda\,d\mu\,da\,db}{(p - aq)^2 (r - b)^2 \lambda^2},$$

f — произвольная функция.

9. *Множество* P_9. Пусть $\bar{g} \times j = A(a, 1, 0, 0)$, $\bar{g} \times k = B(0, 0, b, 1)$, причем $g \times \bar{g} = M(p, q, r, 1)$. Две такие прямые не имеют численный инвариант, а интегральная мера выражается так

$$(32) \qquad m(P_9) = \int \frac{da\,db\,dp\,dq\,dr}{(p - aq)^2 (r - b)^2}.$$

10. *Множество* P_{10}. Пусть g — конечная прямая, $\bar{g}$ — изотропная прямая, причем они пересекаются. Множество $P_{10} \ni (g, \bar{g})$. Две такие прямые не имеют численный инвариант. Пусть $g \times \bar{g} = A(p, q, r, 1)$,

$\overline{g} \times j = \mathcal{J}$. Обозначим плоскость прямых $g, \overline{g}$ через α. Обозначим $\alpha \times k = K$ и пусть прямая $\mathcal{J}K \times g = B(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}, 1)$. В таком случае элемент $(g, \overline{g})$ равносилен элементу (A, B). Можно считать, что $P_{10} \ni (A, B)$ и следовательно

$$m(P_{10}) = \int \frac{dp\, dq\, dr\, d\overline{p}\, d\overline{q}\, d\overline{r}}{(p\overline{q} - \overline{p}q)^2 (r - \overline{r})^2}. \tag{33}$$

11. *Множества, не имеющие интегральные меры.*

Пусть $g \times j$, $\overline{g} \times k$ причем $g \times \overline{g}$. Рассмотрим множество $P_{11} \ni (g, \overline{g})$.

Пусть g — конечная, $\overline{g}$ — бесконечная, причем $g \times \overline{g}$. Рассмотрим множество $P_{12} \ni (g, \overline{g})$.

Наконец, пусть g — изотропная, $\overline{g}$ — бесконечная, причем $g \times \overline{g}$. Рассмотрим множество $P_{13} \ni (g, \overline{g})$.

Мы доказали следующую теорему

Теорема. Множества P_{11}, P_{12}, P_{13} не имеют инвариантные интегральные меры.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные множества, составленные из пар прямых. Некоторые совершенно специальные случаи мы исключили из рассмотрений. Например, случай, когда множество состоит из пар конечных непересекающихся прямых, принадлежащих одной и той же поверхности F_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сантало Л. А. — *Введение в интегральную геометрию.* Москва, 1956.
2. Чеботарев Н. Г. — *Теория групп Ли.* М—Л., 1940.
3. Дринфельд Г. И. — *О некоторых основных формулах интегральной геометрии.* II. Зап. мат. отд. физ.—мат. факультета ХГУ и Харк. мат. общества, т. XXIII, 1952.
4. Норден А. П. — *Внутренняя геометрия поверхностей пространства биаксиальной группы.* ДАН СССР, 55. 1947.

INVARIANŢI INTEGRALI AI MULŢIMII PERECHILOR DE DREPTE ÎN SPAŢIUL BIAXIAL

Rezumat

Se determină în spaţiul hiperbolic biaxial acele mulţimi de perechi de drepte ce posedă invarianţi integrali. Aceste mulţimi sînt $P_1 - P_{10}$ şi (20), (22), (24), (25), (27), (28), (29), (31), (32), (33) reprezintă măsurile respective.

ASUPRA UNEI TEOREME CENTRALE LIMITĂ PENTRU FUNCŢII NELINIARE DE UN PROCES GAUSSIAN STAŢIONAR

DE

ELENA NENCIU

Fie $\{R, \mathfrak{B}, \Phi\}$ un cîmp borelian de probabilitate unde: R — dreapta reală, $\mathfrak{B}$ — corpul mulţimilor boreliene de pe R, Φ — o măsură de probabilitate definită pe $\mathfrak{B}$ generată de funcţia de repartiţie gaussiană

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Vom demonstra următoarea

Teoremă. *Fie $\{\xi_t, t \in T\}$ un proces aleator, real, gaussian, staţionar, unde $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, cu media $E\xi_t = 0$ pentru toţi $t \in T$, covarianţele*

$$r(k) = E\xi_t \xi_{t+k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda)\, d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ şi } f(\lambda) \in \mathfrak{L}^2[-\pi, \pi].$$

Dacă $\eta_t = \mathfrak{N}\xi_t$ este un nou proces aleator generat de o funcţie neliniară, reală, astfel încît $E\eta_t = 0$ şi $E\eta_t^2 < +\infty$ pentru toţi $t \in T$ şi este îndeplinită condiţia:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{N}{2}\lambda}{\sin^2 \frac{1}{2}\lambda} f(\lambda)\, d\lambda = f(0) \tag{1}$$

unde $f(0)$ există şi este finită, atunci

$$\lim_{N \to \infty} P\left(\frac{\sum_{t=1}^{N} \eta_t}{N} < \sqrt{\rho}\, x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{2}$$

uniform în raport cu x.