$\bar{g} \times j = \mathcal{J}$. Обозначим плоскость прямых $g, \bar{g}$ через α. Обозначим $\alpha \times k = K$ и пусть прямая $\mathcal{J}K \times g = B(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, 1)$. В таком случае элемент $(g, \bar{g})$ равносилен элементу (A, B). Можно считать, что $P_{10} \ni (A, B)$ и следовательно

$$m(P_{10}) = \int \frac{dp\,dq\,dr\,d\bar{p}\,d\bar{q}\,d\bar{r}}{(p\bar{q} - \bar{p}q)^2 (r - \bar{r})^2}. \tag{33}$$

11. *Множества, не имеющие интегральные меры.*

Пусть $g \times j$, $\bar{g} \times k$ причем $g \times \bar{g}$. Рассмотрим множество $P_{11} \ni (g, \bar{g})$.

Пусть g — конечная, $\bar{g}$ — бесконечная, причем $g \times \bar{g}$. Рассмотрим множество $P_{12} \ni (g, \bar{g})$.

Наконец, пусть g — изотропная, $\bar{g}$ — бесконечная, причем $g \times \bar{g}$. Рассмотрим множество $P_{13} \ni (g, \bar{g})$.

Мы доказали следующую теорему

Теорема. Множества P_{11}, P_{12}, P_{13} не имеют инвариантные интегральные меры.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные множества, составленные из пар прямых. Некоторые совершенно специальные случаи мы исключили из рассмотрений. Например, случай, когда множество состоит из пар конечных непересекающихся прямых, принадлежащих одной и той же поверхности F_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сантало Л. А. — *Введение в интегральную геометрию*. Москва, 1956.
2. Чеботарев Н. Г. — *Теория групп Ли*. М—Л., 1940.
3. Дринфельд Г. И. — *О некоторых основных формулах интегральной геометрии*. II. Зап. мат. отд. физ.—мат. факультета ХГУ и Харк. мат. общества, т. XXIII, 1952.
4. Норден А. П. — *Внутренняя геометрия поверхностей пространства биаксиальной группы*. ДАН СССР, 55, 1947.

INVARIANŢI INTEGRALI AI MULŢIMII PERECHILOR DE DREPTE ÎN SPAŢIUL BIAXIAL

Rezumat

Se determină în spaţiul hiperbolic biaxial acele mulţimi de perechi de drepte ce posedă invarianţi integrali. Aceste mulţimi sînt $P_1 - P_{10}$ şi (20), (22), (24), (25), (27), (28), (29), (31), (32), (33) reprezintă măsurile respective.

ASUPRA UNEI TEOREME CENTRALE LIMITĂ PENTRU FUNCŢII NELINIARE DE UN PROCES GAUSSIAN STAŢIONAR

DE

ELENA NENCIU

Fie $\{R, \mathfrak{B}, \Phi\}$ un cîmp borelian de probabilitate unde: R — dreapta reală, $\mathfrak{B}$ — corpul mulţimilor boreliene de pe R, Φ — o măsură de probabilitate definită pe $\mathfrak{B}$ generată de funcţia de repartiţie gaussiană

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Vom demonstra următoarea

Teoremă. *Fie $\{\xi_t, t \in T\}$ un proces aleator, real, gaussian, staţionar, unde $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, cu media $E\xi_t = 0$ pentru toţi $t \in T$, covarianţele*

$$r(k) = E\xi_t \xi_{t+k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda)\, d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ şi } f(\lambda) \in \mathfrak{L}^2[-\pi, \pi].$$

Dacă $\eta_t = \mathfrak{N}\xi_t$ este un nou proces aleator generat de o funcţie neliniară, reală, astfel incît $E\eta_t = 0$ şi $E\eta_t^2 < +\infty$ pentru toţi $t \in T$ şi este indeplinită condiţia:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{N}{2}\lambda}{\sin^2 \frac{1}{2}\lambda} f(\lambda)\, d\lambda = f(0) \tag{1}$$

unde $f(0)$ există şi este finită, atunci

$$\lim_{N \to \infty} P\left(\frac{\sum_{t=1}^{N} \eta_t}{N} < \sqrt{\rho} x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \tag{2}$$

uniform în raport cu x.

Înainte de a trece la demonstrarea teoremei enunţate vom da cîteva leme pregătitoare. În cele ce urmează notăm prin $h_n(x)$ polinoamele Hermite de grad n

$$h_n(x) = (-1)^n (n!)^{-1/2} e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mulţimea $\{h_n(x)\}$ formează un sistem complet ortonormal de funcţii pe $\mathfrak{L}^2(R, \mathfrak{B}, \Phi)$, adică

(i) $$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\, h_m(x)\, d\Phi(x) = \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

unde $\delta_{m,n}$ este simbolul lui Kronecker;

(ii) dacă $f \in \mathfrak{L}^2(R, \mathfrak{B}, \Phi)$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, h_n(x)\, d\Phi(x) = 0$

pentru toţi n, atunci $f(x) \equiv 0\ \Phi$ — aproape peste tot.

Prin urmare, fiecare $f \in \mathfrak{L}^2(R, \mathfrak{B}, \Phi)$ poate fi exprimat în mod unic într-o serie de polinoame Hermite.

Lema 1.

$$Eh_n(\xi_t)\, h_m(\xi_{t+k}) = \begin{cases} 0 & \text{cînd } m \neq n \text{ (a)} \\ r_k^n & \text{cînd } m = n \text{ (b)} \end{cases}$$

pentru $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ şi $m, n = 0, 1, 2, \ldots$

Demonstraţie. Fără a restrînge generalitatea putem presupune că $r(0) = \sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, d\lambda = 1$. Din [4], pentru $|r| < 1$ are loc

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2 - 2rxy + y^2)\right\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(x)\, h_\nu(y)\, r^\nu e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Atunci

$$Eh_n(\xi_t)\, h_m(\xi_{t+k}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\, h_m(y) \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r_k^2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_k^2)}(x^2 - 2r_k xy + y^2)\right\} dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\, h_m(y) \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(x)\, h_\nu(y)\, r_k^\nu e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy = \begin{cases} 0 & \text{cînd } m \neq n \\ r_k^n & \text{cînd } m = n \end{cases}$$

şi lema este demonstrată.

Lema 2. Fie

$$h_{n,N} = N^{-1/2} \sum_{t=1}^{N} h_n(\xi_t).$$

Atunci

$$Eh_{n,N}\, h_{m,N} = \begin{cases} 0 & \text{cînd } m \neq n \text{ (a)} \\ \dfrac{1}{(2\pi)^n N}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)} \prod_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\, d\lambda_k & \text{cînd } m = n \text{ (b)} \end{cases}$$

pentru $m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Demonstraţie. Partea (a) rezultă din lema 1 (a). Folosind lema 1 (b) avem

$$Eh_{n,N}\, h_{m,N} = \frac{1}{N}\sum_{t_1=1}^{N}\sum_{t_2=1}^{N} Eh_n(\xi_{t_1})\, h_m(\xi_{t_2}) = \frac{1}{N}\sum_{t_1=1}^{N}\sum_{t_2=1}^{N} r_{t_1-t_2}^n =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{t_1=1}^{N}\sum_{t_2=1}^{N}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t_1-t_2)\lambda_j} f(\lambda_j)\, d\lambda_j\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n N}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)} \prod_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\, d\lambda_k,$$

şi astfel partea (b) este demonstrată.

Lema 3. Fie

$$\sigma_{n,N} = \frac{1}{(2\pi)^n N}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)} \prod_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\, d\lambda_k.$$

Atunci există $0 < \tau < \infty$ astfel încît $0 < \sigma_{n,N} < \tau$ pentru toţi n şi N.

Demonstraţie. Faptul că $\sigma_{n,N} > 0$ este evident. Ca să demonstrăm că $\sigma_{n,N}$ este uniform mărginit, distingem două cazuri:

1°. Cînd $n = 1$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{N}{2}\lambda}{\sin^2 \frac{1}{2}\lambda} f(\lambda)\, d\lambda = f(0)$$

există şi este finită datorită condiţiei (1) pe care o presupunem îndeplinită. Prin urmare, $\sigma_{1,N}$ este uniform mărginit pentru toţi N.

2°. Cînd $n \geqslant 2$, considerăm întîi

$$(3) \qquad \frac{1}{(2\pi)^2 N} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)} f(\lambda_1) f(\lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2,$$

care converge la

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda_1) f\left(-\lambda_1 - \sum_{j=3}^{n}\lambda_j\right) d\lambda_1 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda)\, d\lambda < \infty$$

uniform în raport cu $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$ datorită lemei 2.1 din [5]. Prin urmare, integrala (3) este uniform mărginită pentru toţi $n \geqslant 2$ şi toţi N. De asemenea

$$\frac{1}{(2\pi)^{n-2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda_3) f(\lambda_4) \ldots f(\lambda_n)\, d\lambda_3\, d\lambda_4 \ldots d\lambda_n = 1$$

datorită presupunerii că $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, d\lambda = 1$. Din 1° şi 2° urmează că $\sigma_{n,N}$ este uniform mărginit pentru toţi n şi N. Deci, există $0 < \tau < \infty$ astfel încît $0 < \sigma_{n,N} < \tau$ pentru toţi n şi N.

Acum putem trece la demonstraţia teoremei enunţate.

Demonstraţie. Deoarece $E\eta_t^2 < \infty$, putem exprima $\eta_t = \mathfrak{M}\xi_t$ printr-o serie de polinoame Hermite.

$$\eta_t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(\xi_t),$$

$$\text{cu } \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \text{ şi } a_n = E[\eta_t h_n(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_t h_n(x)\, d\Phi(x), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Din faptul că $E\eta_t = 0$, pentru toţi $t \in T$ urmează că $a_0 = 0$. Fie

$$\eta_N = N^{-1/2} \sum_{t=1}^{N} \eta_t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_{n,N}.$$

Se vede imediat că $E\eta_t = 0$. Avem

$$(4) \qquad E\eta_N^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{(2\pi)^n N} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)} \prod_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\, d\lambda_k \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tau,$$

unde τ a fost definit în lema 3. Prin urmare, $E\eta_N^2$ este uniform mărginit pentru toţi N. Folosind lema 2.1 din [5] se poate arăta că

$$\rho = \lim_{N\to\infty} E\eta_N^2 = f(0)\, a_1^2 +$$

$$(5) \qquad + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^{n-1} f(\lambda_j) f\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\right) \prod_{k=1}^{n-1} d\lambda_k.$$

Vom vedea că această limită ρ este chiar varianţa repartiţiei normale limită. Faptul că ρ este finit este clar. Definim

$$\eta_{N,\alpha} = N^{-1/2} \sum_{t=1}^{N} \left(\sum_{n=0}^{\alpha} a_n h_n(\xi_t)\right) = \sum_{n=0}^{\alpha} a_n h_{n,N}.$$

Atunci

$$\rho_\alpha = \lim_{N\to\infty} E\eta_N^2 =$$

$$(6) \qquad = f(0)\, a_1^2 + \sum_{n=2}^{\alpha} a_n^2 \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^{n-1} f(\lambda_j) f\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\right) \prod_{k=1}^{n-1} d\lambda_k.$$

Relaţiile (5) şi (6) conduc la

$$(7) \qquad \rho_\alpha \to \rho, \text{ cînd } \alpha \to \infty.$$

Folosind lema 3, se poate arăta că $\eta_{N,\alpha}$ tinde la η_N în medie, uniform în raport cu N, cînd $\alpha \to \infty$ şi de aceea, pentru t fixat are loc

$$(8) \qquad E\{e^{it\eta_{N,\alpha}}\} \to E\{e^{it\eta_N}\}$$

uniform în raport cu N, cînd $\alpha \to \infty$. Acum pentru orice t fixat şi $\varepsilon > 0$ datorită lui (8) şi (6) se poate alege un astfel de $\alpha(t, \varepsilon)$ încît

$$(9) \qquad |E\{e^{it\eta_N}\} - E\{e^{it\eta_{N,\alpha}}\}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

pentru toţi N şi

$$(10) \qquad |e^{-1/2\rho_\alpha t^2} - e^{-1/2\rho t^2}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

unde $\alpha > \alpha(t, \varepsilon)$. Datorită teoremelor 2 şi 3 din [5], pentru fiecare t, ε şi $\alpha(t, \varepsilon)$ se poate alege un $N(t, \varepsilon, \alpha(t, \varepsilon)) > 0$, astfel încît

$$|E\{e^{it\eta_{N,\alpha}}\} - e^{-1/2\rho_\alpha t^2}| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{11}$$

unde $N > N(t, \varepsilon, \alpha(t, \varepsilon))$. Din (9), (10) şi (11) urmează că pentru orice t fixat

$$\begin{aligned} |E\{e^{it\eta_N}\} - e^{-1/2\rho t^2}| &\leqslant |E\{e^{it\eta_N}\} - E\{e^{it\eta_{N,\alpha}}\}| + |E\{e^{it\eta_{N,\alpha}}\} - e^{-1/2\rho_\alpha t^2}| + \\ &+ |e^{-1/2\rho_\alpha t^2} - e^{-1/2\rho t^2}| < \varepsilon, \end{aligned} \tag{12}$$

unde $\alpha > \alpha(t, \varepsilon)$ şi $N > N(t, \varepsilon, \alpha(t, \varepsilon))$ şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Cînd $\mathfrak{N}(\xi)$ este o funcţie pară în ξ, presupunerea (1) nu mai este necesară.

Din teorema dată urmează un

Corolar. Presupunem că $\{\xi_t, t \in T\}$ este un proces aleator dat ce satisface condiţiile din teoremă. Fie

$$\eta_t^{(\alpha)} = \mathfrak{N}^{(\alpha)}(\xi_t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

n transformări reale astfel că $E\eta_t^{(\alpha)} = 0$ şi $E[\eta_t^{(\alpha)}]^2 < \infty$ pentru $\alpha = 1, 2, \dots, n$ şi pentru toţi $t \in T$. Atunci

$$N^{-1/2} \sum_{t=1}^{N} \eta_t^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

au în ansamblu o repartiţie asimptotic gaussiană cu media zero şi oarecare covarianţe finite.

Demonstraţie. Deoarece

$$E\left[\sum_{\alpha=1}^{n} \mu_\alpha \eta_t^{(\alpha)}\right]^2 < \infty, \text{ pentru orice } \mu_\alpha, \ \alpha = 1, 2, \dots, n,$$

corolarul urmează imediat din teoremă.

BIBLIOGRAFIE

1. Гренандер У., Сегё Г. — *Тёплицевы формы и их приложения.* Москва, 1961.
2. Дуб Д. Л. — *Вероятностные процессы.* Москва, 1956.
3. Лоэв М. — *Теория вероятностей.* Москва, 1962.
4. Rosenblatt M., Grenander U. — *Statistical Analysis of Stationar Series.* John Wiley, 1957.
5. Tze Chien Sun — *A central limit theorem for nonlinear functions of a normal stationary process.* Journ. of Math. and Mech., 12, 1963, p. 945–978.

ОБ ОДНОЙ ЦЕНТРАЛЬНО-ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИИ ОТ СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Резюме

Пусть $\{\xi_t, t \in T\}$ — стохастический, вещественный, гауссовский, стационарный процесс с дискретным параметром к которому применяется нелинейное преобразование. Ставится задача нахождения условии которые следует удовлетворить исходный процесс и нелинейное преобразование для того чтобы новый стационарный процесс $\eta_t = \mathfrak{N}\xi_t$ был также гауссовским. Для этого используется метод характеристической функций.