TENSIUNI TERMICE NESTAŢIONARE ÎN PLĂCI CIRCULARE SUBŢIRI (DISCURI) ÎN IPOTEZA VARIAŢIEI LINIARE A TEMPERATURII DUPĂ GROSIMEA LOR

DE

I. GRINDEI

§ 1. Să considerăm o placă elastică subţire, izotropă şi omogenă. Planul median al acestei plăci îl presupunem situat în planul xOy al unui sistem cartezian de coordonate $Oxyz$, cu axa Oz normală la placă.

Să presupunem că este vorba de un schimb convectiv nestaţionar de căldură atît pe conturul L cît şi pe feţele $z = \pm h/2$ ale plăcii, h fiind grosimea ei.

În cazul unei diferenţe apreciabile a temperaturilor mediului exterior în contact cu feţele $z = \pm h/2$ ale plăcii, iau naştere, după grosimea plăcii, gradienţi de temperatură ce provoacă nu numai întinderea ci şi încovoierea ei.

Determinarea cîmpului de temperatură nestaţionar al unei astfel de plăci se reduce, în ipoteza caracteristicilor fizice constante ale căldurii, la integrarea ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

în care $a = \lambda/c\rho$, λ fiind coeficientul de conducţie termică, c — căldura specifică, iar ρ — densitatea plăcii.

Soluţia ecuaţiei (1) trebuie să satisfacă condiţia iniţială

$$T = T_0 \text{ pentru } t = 0 \tag{2}$$

şi condiţiilor la limită:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\alpha_0}{\lambda}(T - \theta_0) \text{ pe conturul } L \text{ al plăcii,}$$

$$(3) \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\alpha_3}{\lambda}(T - \theta_3) \text{ pentru } z = h/2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\alpha_4}{\lambda}(T - \theta_4) \text{ pentru } z = -h/2,$$

unde $\theta_0, \theta_3, \theta_4$ sînt temperaturile mediului exterior în contact cu conturul L respectiv cu feţele $z = \pm h/2$ ale plăcii; $\alpha_0, \alpha_3, \alpha_4$ sînt coeficienţii respectivi ai transmisiei de căldură, iar n — normala exterioară la conturul plăcii.

Presupunînd că variaţia temperaturii $T(x, y, z, t)$ după grosimea plăcii este aproximată după legea

$$(4) \qquad T(x, y, z, t) = T^{(0)}(x, y, t) + zT^{(1)}(x, y, t) + \ldots + z^m T^{(m)}(x, y, t),$$

atunci problema noastră se reduce la cazul bidimensional.

În adevăr, pentru stabilirea ecuaţiilor la care vor trebui să satisfacă funcţiile $T^{(0)}, T^{(1)}, \ldots, T^{(m)}$, înmulţim ecuaţia (1) cu z^p $(p = 0, 1, 2, \ldots, m)$ şi o integrăm după z între limitele $-h/2$ şi $h/2$. Obţinem următorul sistem de ecuaţii dacă ţinem seamă de identitatea

$$z^p \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(z^p \frac{\partial T}{\partial z} - pz^{p-1} T\right) + p(p-1) z^{p-2} T$$

şi de condiţiile la limită (3):

$$(5) \qquad \nabla^2 W_p - \frac{h^{p-1}}{2^p}\left\{2p\,\omega_p + \gamma_3\left[T\left(\frac{h}{2}\right) - \theta_3\right] + (-1)^p \gamma_4\left[T\left(-\frac{h}{2}\right) - \theta_4\right]\right\} +$$

$$+ p(p-1) W_{p-2} = \frac{1}{a}\frac{\partial W_p}{\partial t}, \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

unde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$W_p = \int_{-h/2}^{h/2} z^p T\, dz, \quad \omega_p = T\left(\frac{h}{2}\right) + (-1)^p T\left(-\frac{h}{2}\right),$$

$$\gamma_3 = \frac{\alpha_3 h}{\lambda}, \quad \gamma_4 = \frac{\alpha_4 h}{\lambda}.$$

Înlocuind expresia (4) a temperaturii în condiţia (2) şi în prima din condiţiile (3), găsim condiţiile iniţiale şi condiţiile la limită pentru funcţiile

$T^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$. În cazul cînd T_0 şi θ_0 nu depind de z, aceste condiţii iau forma

$$(6) \qquad T^{(0)} = T_0, \quad T^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \text{ pentru } t = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} = -\frac{\alpha_0}{\lambda}(T^{(0)} - \theta_0), \quad \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n} = -\frac{\alpha_0}{\lambda} T^{(i)} \text{ pe conturul } L,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Scriind ecuaţia (5) şi condiţiile (6) şi (7) pentru diverse valori date indicelui p $(p = 0, 1, \ldots, m)$, putem obţine sistemul de ecuaţii necesar ce descrie propagarea nestaţionară a căldurii în placa noastră în ipoteza diverselor legi de variaţie a temperaturii după grosimea plăcii.

Astfel, dacă presupunem că temperatura rămîne constantă după grosimea plăcii,

$$(8) \qquad T = T^{(0)}(x, y, t)$$

şi punînd $p = 0$, obţinem ecuaţia propagării căldurii sub forma

$$(9) \qquad \nabla^2 T - \frac{2\gamma}{h^2}(T - \theta) = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t},$$

unde

$$\gamma = \frac{(\alpha_3 + \alpha_4) h}{2\lambda}, \quad \theta = \frac{\alpha_3 \theta_3 + \alpha_4 \theta_4}{\alpha_3 + \alpha_4},$$

cu condiţia iniţială

$$(10) \qquad T = T_0 \text{ pentru } t = 0$$

şi condiţia la limită

$$(11) \qquad \frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\alpha_0}{\lambda}(T - \theta_0) \text{ pe conturul } L \text{ al plăcii.}$$

Presupunînd că temperatura variază liniar după grosimea plăcii

$$(11) \qquad T = T^{(0)} + zT^{(1)},$$

obţinem sistemul de două ecuaţii corespunzătoare valorilor $p = 0, 1$, ale propagării căldurii

$$\nabla^2 T^{(0)} - \frac{2\gamma}{h^2}(T^{(0)} - \theta) - \frac{\gamma_3 - \gamma_4}{2h} T^{(1)} = \frac{1}{a}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t},$$

$$(12) \qquad \nabla^2 T^{(1)} - \frac{6(\gamma_3 - \gamma_4)}{h^3} T^{(0)} - \frac{6(2 + \gamma)}{h^2}(T^{(1)} - \zeta) = \frac{1}{a}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t}$$

unde

$$\zeta = \frac{\gamma_3 \theta_3 - \gamma_4 \theta_4}{(2+\gamma) h},$$

cu condiţiile iniţiale

(13) $$T^{(0)} = T_0, \quad T^{(1)} = 0, \text{ pentru } t = 0,$$

şi cu condiţiile la limită

(14) $$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} = -\frac{\alpha_0}{\lambda}(T^{(0)} - \theta_0), \quad \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\alpha_0}{\lambda} T^{(1)}$$

pe conturul L al plăcii.

In ipoteza egalităţii coeficienţilor transmisiei de căldură α_3 şi α_4 ($\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$), deci şi a coeficienţilor γ_3 şi γ_4 ($\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma$), ecuaţiile (12) iau forma

(15) $$\nabla^2 T^{(0)} - \frac{2\gamma}{h^2}(T^{(0)} - \theta) = \frac{1}{a}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}, \qquad \nabla^2 T^{(1)} - \frac{6(2+\gamma)}{h^2}(T^{(1)} - \zeta) = \frac{1}{a}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t}$$

unde

(16) $$\theta = \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha h}{\lambda}, \quad \zeta = \frac{\gamma(\theta_3 - \theta_4)}{(2+\gamma) h}.$$

§ 2. Să determinăm cîmpul de temperatură nestaţionar al unei plăci circulare (disc) omogene şi izotrope, de grosime h şi de rază R, în ipoteza unuia şi aceluiaşi schimb convectiv de căldură pe feţele $z = \pm h/2$ ale plăcii. Admiţînd, în plus, că legea de variaţie a temperaturii în placă este liniară după grosimea ei, adică de forma

(17) $$T(x, y, z, t) = T^{(0)}(x, y, t) + z T^{(1)}(x, y, t),$$

vom avea de integrat ecuaţiile (15) care, în ipoteza cîmpului de temperatură cu simetrie axială, se scriu sub forma

(18) $$\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} - \frac{2\gamma}{h^2}(T^{(0)} - \theta) = \frac{1}{a}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} - \frac{6(2+\gamma)}{h^2}(T^{(1)} - \zeta) = \frac{1}{a}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t},$$

cu condiţiile iniţiale şi la limită date de (13) şi (14), condiţii care, în cazul nostru, devin

$$T^{(0)} = T_0(r), \quad T^{(1)} = 0 \text{ pentru } t = 0,$$

(19) $$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} = -\frac{\alpha_0}{\lambda}(T^{(0)} - \theta_0), \quad \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} = -\frac{\alpha_0}{\lambda} T^{(1)} \quad \text{pentru } r = R,$$

unde θ_0 şi α_0 reprezintă temperatura respectiv coeficientul transmisiei de căldură pe suprafaţa cilindrică $r = R$ a plăcii (discului).

Introducînd variabila $\rho = \frac{r}{R}$ şi timpul fără dimensiuni $\tau = \frac{ta}{R^2}$, ecuaţiile (18) şi condiţiile (19) devin:

(18′) $$\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \rho} - \delta_0^2 (T^{(0)} - \theta) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \rho} - \delta_1^2 (T^{(1)} - \zeta) = \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \tau},$$

$$T^{(0)} = T_0(R), \quad T^{(1)} = 0, \text{ pentru } t = 0,$$

(19′) $$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \rho} + \gamma_0 (T^{(0)} - \theta_0) = 0, \quad \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \rho} + \gamma_0 T^{(1)} = 0 \text{ pentru } \rho = 1,$$

unde

$$\delta_0^2 = \frac{2\gamma R^2}{h^2}, \quad \gamma = \frac{\alpha h}{\lambda}, \quad \gamma_0 = \frac{\alpha_0 R}{\lambda}, \quad \delta_1^2 = \frac{6(2+\gamma) R^2}{h^2}.$$

În cele ce urmează, e suficient să ne ocupăm de integrarea ecuaţiei

(20) $$\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \rho} - \delta_0^2 (T^{(0)} - \theta) = \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \tau},$$

cu condiţia iniţială

(21) $$T^{(0)} = T_0(\rho R) \text{ pentru } t = 0$$

şi condiţia la limită

(22) $$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \rho} + \gamma_0 (T^{(0)} - \theta_0) \text{ pentru } \rho = 1,$$

întrucît integrarea celei de-a doua ecuaţii (18′)

(23) $$\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \rho} - \delta_1^2 (T^{(1)} - \zeta) = \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \tau},$$

cu condiţia iniţială

(24) $$T^{(1)} = 0 \text{ pentru } t = 0$$

şi condiţia la limită

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \rho} + \gamma_0 T^{(1)} = 0 \text{ pentru } \rho = 1, \tag{25}$$

se obţine prin analogie.

Aplicînd ecuaţiei (20) şi condiţiei la limită (22) transformarea Laplace, obţinem, dacă ţinem seamă de (21):

$$\frac{d^2 \widetilde{T}^{(0)}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\widetilde{T}^{(0)}}{d\rho} - \varepsilon^2\left(\widetilde{T}^{(0)} - \frac{V}{s\varepsilon^2}\right) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{d\widetilde{T}^{(0)}}{d\rho} + \gamma_0 (\widetilde{T}^{(0)} - \widetilde{\theta}_0) = 0, \text{ pentru } \rho = 1, \tag{27}$$

unde

$$\widetilde{T}^{(0)} = \int_0^\infty T^{(0)} e^{-s\tau} d\tau, \quad \widetilde{\theta}_0 = \int_0^\infty \theta_0 e^{-s\tau} d\tau, \tag{28}$$

sînt transformatele Laplace sau imaginile funcţiilor $T^{(0)}$ şi θ_0, s o variabilă complexă oarecare, iar

$$V = \delta_0^2 \theta + s T_0, \quad \varepsilon^2 = \delta_0^2 + s. \tag{29}$$

Presupunînd că temperaturile θ_3 şi θ_4 ale mediului exterior în contact cu feţele $z \pm h/2$ ale plăcii sînt constante, urmează, în baza relaţiilor (16), că şi θ şi ζ vor fi mărimi constante.

Soluţia ecuaţiei (26) este expresia

$$\widetilde{T}^{(0)} = \frac{V}{s\varepsilon^2} + C_1 I_0(\delta_0 \rho) + C_2 K_0(\delta^0 \rho), \tag{30}$$

unde $I_0(\delta_0\rho)$ şi $K_0(\delta_0\rho)$ sînt funcţiile Bessel de ordinul zero de speţa întîia şi a doua de argument imaginar.

Întrucît temperatura în interiorul plăcii circulare $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ trebuie să rămînă finită şi cum pentru $\rho \to 0$ avem

$$I_0(\delta_0\rho) = 1, \quad K_0(\delta_0\rho) = -\infty,$$

urmează că trebuie să excludem din (30) ultimul termen, aşa că soluţia ecuaţiei (26), satisfăcînd condiţia iniţială (21), se reduce la

$$\widetilde{T}^{(0)} = \frac{V}{s\varepsilon^2} + C_1 I_0(\delta_0\rho). \tag{31}$$

Pentru determinarea constantei de integrare C_1, ne vom folosi de condiţia la limită (27). Ţinînd seama de relaţia

$$\frac{dI_0(\delta_0\rho)}{d\rho} = \delta_0 I_1(\delta_0\rho),$$

unde $I_1(\delta_0\rho)$ este funcţia Bessel de ordinul întîi şi de speţa întîi de argument imaginar, obţinem

$$C_1 = \frac{\gamma_0(s\varepsilon^2\widetilde{\theta}_0 - V)}{s\varepsilon^2[\gamma_0 I_0(\varepsilon) + \varepsilon I_1(\varepsilon)]}.$$

Să presupunem că temperatura θ_0 a mediului exterior, în contact cu suprafaţa cilindrică a plăcii ($\rho = 1$), variază cu timpul după legea exponenţială

$$\theta_0 = \theta_{01} + \theta_{02} e^{-k\tau}, \tag{32}$$

unde θ_{01} şi θ_{02} sînt mărimi constante.

Calculînd mărimea

$$\widetilde{\theta}_0 = \frac{\theta_{01}}{s} + \frac{\theta_{02}}{s+k}$$

şi înlocuind-o în soluţia (31), găsim următoarea soluţie pentru imaginea temperaturii $T^{(0)}$:

$$\widetilde{T}^{(0)} = \frac{V}{s\varepsilon^2} + \frac{\gamma_0\{\varepsilon^2[\theta_{01}(s+k) + \theta_{02}s] - (s+k)V\} I_0(\varepsilon\rho)}{s(s+k)\varepsilon^2[\gamma_0 I_0(\varepsilon) + \varepsilon I_1(\varepsilon)]}. \tag{33}$$

Trecerea de la imagine la funcţia originală constituie, de multe ori, dificultatea principală a problemei. Această trecere se realizează cu ajutorul următoarei *teoreme generale de descompunere* în fracţii simple din calculul operaţional:

Dacă imaginea $\widetilde{f}(s)$ a funcţiei originale $f(\tau)$ se prezintă ca raportul a două funcţii transcendente $\Phi(s)$ şi $\Psi(s)$

$$\widetilde{f}(s) = \frac{\Phi(s)}{\Psi(s)},$$

unde funcţia $\Psi(s)$ are numai rădăcinile simple s_n ($n = 1, 2, \ldots$), atunci funcţia originală are forma

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(s_n) e^{s_n \tau}}{\Psi'(s_n)}, \tag{34}$$

unde

$$\Psi'(s_n) = \frac{\partial \Psi(s_n)}{\partial s_n}.$$

Există o teoremă analogă şi pentru cazul rădăcinilor multiple.

Pentru aplicarea formulei (34) în cazul problemei noastre căutăm rădăcinile ecuaţiei

$$\Psi(s) = s(s+k)\varepsilon^2[\gamma_0 I_0(\varepsilon) + \varepsilon I_1(\varepsilon)] = 0. \tag{35}$$

Aceste rădăcini sînt:

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -k, \quad s_3 = -\delta_0^2$$

şi rădăcinile β_n ale ecuaţiei

$$\gamma_0 I_0(\varepsilon) + \varepsilon I_1(\varepsilon) = \gamma_0 J_0(\beta) - \beta J_1(\beta) = 0,$$

unde $\beta = i\varepsilon$, iar $J_0(\beta)$ şi $J_1(\beta)$ fiind funcţiile Bessel de speţa întîi, de ordinul zero şi unu.

Luînd în considerare aceste rădăcini şi efectuînd trecerea de la imaginea (33) la funcţia originală cu ajutorul formulei (34), după efectuarea transformărilor necesare, obţinem următoarea expresie pentru temperatura plăcii noastre:

$$\begin{aligned} T^{(0)} = \theta + {} & \frac{\gamma_0(\theta_{01} - \theta) I_0(\delta_0 \rho)}{\gamma_0 I_0(\delta_0) + \delta_0 I_1(\delta_0)} + \frac{\gamma_0 \theta_{02} I_0(p\rho) e^{-kz}}{\gamma_0 I_0(p) + p I_1(p)} - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n J_0(\beta_n \rho) e^{-(\delta_0^2 + \beta_n^2)z}, \end{aligned} \tag{36}$$

unde

$$A_n = \frac{2\gamma_0}{(\gamma_0^2 + \beta_n^2) J_0(\beta_n)}, \quad B_n = \frac{\beta_n^2 \theta_{01} + \delta_0^2 \theta}{\beta_n^2 + \delta_0^2} - T_0 + \frac{\beta_n^2 \theta_{02}}{\beta_n^2 + \delta_0^2 - k},$$

$$p = \sqrt{\delta_0^2 - k}.$$

Pentru cazul $\theta_{01} = \theta_0 = \text{const.}$, $\theta_{02} = 0$, expresia (36) se reduce la

$$T^{(0)} = \theta + C^{(0)} I_0(\delta_0 \rho) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n J_0(\beta_n \rho) e^{-(\delta_0^2 + \beta_n^2)z}, \tag{37}$$

unde

$$C^{(0)} = \frac{\gamma_0(\theta_0 - \theta)}{\gamma_0 I_0(\delta_0) + \delta_0 I_1(\delta_0)}, \quad C_n = \frac{\beta_n^2 \theta_0 + \theta \delta_0^2}{\beta_n^2 + \delta_0^2} - T_0.$$

În mod analog, soluţia ecuaţiei (23), satisfăcînd condiţia iniţială (24) şi condiţia la limită (25), se obţine sub forma

$$T^{(1)} = \zeta[1 + C^{(1)} I_0(\delta_1 \rho)] - \sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n J_0(\beta_n \rho) e^{-(\delta_1^2 + \beta_n^2)z} \tag{38}$$

unde

$$C^{(1)} = -\frac{\gamma_0}{\gamma_0 I_0(\delta_1) + \delta_1 I_1(\delta_1)}, \quad D_n = \frac{\zeta \delta_1^2}{\beta_n^2 + \delta_1^2},$$

În felul acesta, cîmpul de temperatură nestaţionar şi cu simetrie axială

$$T(r, z, t) = T^{(0)}(r, t) + z T^{(1)}(r, t) \tag{39}$$

în placa noastră circulară este complet determinat.

§ 3. În cele ce urmează ne vom ocupa cu determinarea tensiunilor axial simetrice şi cvasistaţionare ale plăcii, provocate de către cîmpul de temperatură (39), în condiţii la limită ce vor fi specificate mai jos.

Fie r, φ, z coordonatele cilindrice ale unui punct al plăcii noastre luat la distanţa z de planul ei median (r, φ). Să însemnăm cu u_r, u_φ, u_z componentele vectorului de deplasare, cu $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{\varphi z}, \varepsilon_{zr}$, componentele tensorului de deformare şi cu $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi z}, \sigma_{zr}$ cele ale tensorului tensiune.

În cazul forţelor masice nule, al cîmpului de temperatură şi ale cîmpului tensiunilor cu simetrie axială ($u_\varphi = 0$, $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0$), relaţiile dintre deformări şi deplasări se exprimă prin formulele

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ & \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = 0, \quad \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right), \end{aligned} \tag{40}$$

iar ecuaţiile de echilibru elastic al plăcii se reduc la următoarele două:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \\ & \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

În continuare, presupunînd că feţele $z = \pm h/2$ ale plăcii noastre circulare subţiri sînt libere de tensiuni, adică

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zz} = 0, \text{ pentru } z = \pm h/2,$$

urmează, în virtutea ecuaţiei a doua din sistemul (41), că $\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} = 0$ pentru $z = \pm h/2$, deci şi

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \text{ pentru } z = \pm h/2.$$

Din condiţiile că atît σ_{zz} cît şi $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$ se anulează pe bazele plăcii, deducem că σ_{zz} va fi o mărime destul de mică după întreaga grosime a plăcii, astfel încît să poată fi socotită chiar nulă peste tot în placă.

Rezultă atunci că ultima ecuaţie din sistemul (41) se reduce la

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0,$$

a cărei soluţie nu poate fi decît $\sigma_{rz} = 0$, dacă ţinem seama de faptul că σ_{rz} trebuie să fie finită pentru $r = 0$. Aşadar, singurele tensiuni ce urmează a fi determinate sînt σ_{rr} şi $\sigma_{\varphi\varphi}$, celelalte fiind nule.

În aceste condiţii ecuaţiile (41) se reduc la una singură, anume la ecuaţia

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \tag{42}$$

Să însemnăm cu $u_r^0, u_z^0, u_\varphi^0 = 0$ componentele deplasării unui punct P_0 din planul median al plăcii.

În virtutea relaţiilor (40), alungirile relative ε_{rr}^0, $\varepsilon_{\varphi\varphi}^0$ ale acestui punct din planul median al plăcii vor fi date de relaţiile

$$\varepsilon_{rr}^0 = \frac{\partial u_r^0}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 = \frac{u_r^0}{r}. \tag{43}$$

Fie P_0P un element liniar al plăcii de lungime z şi normal la planul median nedeformat. Să presupunem că, în urma deformării, elementul liniar P_0P suferă o rotaţie de unghi mic ω în planul rOz, luînd o direcţie $P_0'P'$ normală la suprafaţa mediană deformată.

Acest unghi mic de rotaţie este legat de săgeata u_z^0 prin egalitatea

$$\omega = -\frac{\partial u_z^0}{\partial r}, \tag{44}$$

dacă ţinem seamă de faptul că $\operatorname{tg} \omega \approx \omega$.

În baza ipotezei admise asupra caracterului deformaţiei, putem scrie următoarele relaţii între componentele u_r, u_z ale punctului P (luat la distanţa z de planul median) şi componentele u_r^0, u_z^0 ale punctului P_0:

$$\begin{aligned} u_r &= u_r^0 + z\,\omega, \\ u_z &= u_z^0. \end{aligned} \tag{45}$$

Înlocuind în formulele (45) u_r^0, u_z^0 prin u_r, u_z, găsim alungirile relative ε_{rr}, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ în punctul P

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^0 + zk_r, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 + zk_\varphi, \tag{46}$$

unde

$$k_r = \frac{\partial \omega}{\partial r} = -\frac{\partial^2 u_z^0}{\partial r^2}, \quad k_\varphi = \frac{\omega}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u_z^0}{\partial r}. \tag{47}$$

Mărimile k_r şi k_φ reprezintă curburile suprafeţei mediane în direcţiile r şi φ.

Deformaţiile (46) sînt constituite din deformaţii pur elastice, legate de tensiuni prin legea lui Hooke, şi deformaţii pur termice.

Dacă temperatura plăcii creşte cu cantitatea $T - T_0$, atunci alungirea termică relativă în orice direcţie a unui element liniar al plăcii este egală cu $\alpha_T(T - T_0)$; α_T reprezintă coeficientul dilatării termice liniare.

Obţinem

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}}{E} + \alpha_T(T - T_0), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{rr}}{E} + \alpha_T(T - T_0), \end{aligned} \tag{58}$$

E fiind modulul de elasticitate al lui Young, iar ν — coeficientul lui Poisson.

Din (48) putem obţine tensiunile în funcţie de deformări sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi} - (1+\nu)\alpha_T(T - T_0)], \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{rr} - (1+\nu)\alpha_T(T - T_0)]. \end{aligned} \tag{49}$$

Ecuaţia de echilibru în tensiuni (42), în baza relaţiilor (49), (46), (47), (45) şi (39), este echivalentă cu următoarele două ecuaţii în deplasările u_r^0 şi u_z^0:

$$\frac{\partial^2 u_r^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r^0}{\partial r} - \frac{u_r^0}{r^2} = (1+\nu)\alpha_T \frac{\partial}{\partial r}(T^{(0)} - T_0), \tag{50}$$

$$\frac{\partial^3 u_z^0}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_z^0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_z^0}{\partial r} = -(1+\nu)\alpha_T \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}. \tag{51}$$

Ţinînd seamă de relaţia (44), ecuaţia (51) ia forma

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\omega = (1+\nu)\alpha_T \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}. \tag{51'}$$

Întrucît ecuaţiile (50) şi (51′) sînt de acelaşi tip, e suficient să ne ocupăm de integrarea uneia din ele, de pildă de prima; soluţia celei de-a doua se obţine prin analogie.

Scriind ecuaţia (50) sub forma

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r^0)}{\partial r}\right] = \alpha_T (1+\nu)\frac{\partial}{\partial r}(T^{(0)} - T_0), \tag{50'}$$

se vede imediat că soluţia ei generală este

$$u_r^0 = C_1(t)\, r + \frac{C_2(t)}{r} + \frac{(1+\nu)\,\alpha_T}{r}\int_0^r (T^{(0)} - T_0)\, r\, dr. \tag{52}$$

Cum pentru $r = 0$, u_r^0 nu poate fi infinită, urmează că $C_2\ (t) = 0$. Deci

$$u_r^0 = C_1(t)\, r + \frac{(1+\nu)\,\alpha_T}{r}\int_0^r (T^{(0)} - T_0)\, r\, dr. \tag{53}$$

Analog, soluţia ecuaţiei (51′) este de forma

$$\omega = D_1(t)\, r + \frac{(1+\nu)\,\alpha_T}{r}\int_0^r T^{(1)}\, r\, dr. \tag{54}$$

Funcţiile necunoscute $C_1(t)$ şi $D_1(t)$ urmează a fi determinate din condiţiile la limită pentru tensiuni.

În baza relaţiilor (49), ţinînd seamă de (46), (47), (43), (53) şi (54), obţinem următoarele expresii pentru tensiunile σ_{rr} şi $\sigma_{\varphi\varphi}$:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu}\left[C_1(t) + zD_1(t) + 2z\,\alpha_T T^{(1)} + \frac{(\nu-1)\,\alpha_T}{r}\int_0^r (T^{(0)} - T_0)\, r\, dr + \frac{(\nu-1)\,\alpha_T z}{r^2}\int_0^r T^{(1)}\, r\, dr\right], \tag{55}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu}\left[C_1(t) + zD_1(t) + (\nu-1)\,\alpha_T z T^{(1)} - \frac{(\nu-1)\,\alpha_T}{r^2}\int_0^r (T^{(0)} - T_0)\, r\, dr - \frac{(\nu-1)\,\alpha_T z}{r^2}\int_0^r T^{(1)}\, r\, dr\right]. \tag{56}$$

Impunînd condiţia la limită

$$\sigma_{rr} = 0 \text{ pentru } r = R, \tag{57}$$

obţinem din (55):

$$C_1(t) + zD_1(t) = -2z\,\alpha_T (T^{(1)})_{r=R} - \frac{(\nu-1)\,\alpha_T z}{R^2}\int_0^R T^{(1)}\, r\, dr - \frac{(\nu-1)\,\alpha_T}{R^2}\int_0^R (T^{(0)} - T_0)\, r\, dr. \tag{58}$$

În baza relaţiei (58), tensiunile σ_{rr} şi $\sigma_{\varphi\varphi}$ devin perfect determinate. Avem:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu}\left[-2z\,\alpha_T (T^{(1)})_{r=R} - \frac{(\nu-1)\,\alpha_T}{R^2}\int_0^R (T^{(0)} - T_0)\, r\, dr - \frac{(\nu-1)\,\alpha_T z}{R^2}\int_0^R (T^{(1)}\, r\, dr + \frac{(\nu-1)\,\alpha_T}{r^2}\int_0^r (T^{(0)} - T_0)\, r\, dr + \frac{(\nu-1)\,\alpha_T z}{r^2}\int_0^r T^{(1)}\, r\, dr\right], \tag{59}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu}\left[-2z\,\alpha_T (T^{(1)})_{r=R} - \frac{(\nu-1)\,\alpha_T}{R^2}\int_0^R (T^{(0)} - T_0)\, r\, dr - \frac{(\nu-1)\,\alpha_T z}{R^2}\int_0^R T^{(1)}\, r\, dr - (\nu-1)\,\alpha_T z\, T^{(1)} - \frac{(\nu-1)\,\alpha_T}{r^2}\int_0^r (T^{(0)} - T_0)\, r\, dr - \frac{(\nu-1)\,\alpha_T z}{r^2}\int_0^r T^{(1)}\, r\, dr\right]. \tag{60}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Коваленко А. Д. — *Введение в термоупругость*. Киев, 1965.
2. Новацкий В. — *Вопросы термоупругости*. Москва, 1962.
3. Норкус Д. — *Неустановившиеся температурные напряжения*. Москва, 1963.

TENSIONS THERMIQUES QUASISTATIONNAIRES DANS UNE PLAQUE CIRCULAIRE MINCE DANS L'HYPOTHÈSE DE LA VARIATION LINÉAIRE DE LA TEMPÉRATURE D'APRÈS SON ÉPAISSEUR

Résumé

On montre d'abord que la détermination du champ de températures en régime non-stationnaire et axial symétrique dans une plaque circulaire mince se réduit, dans les cas d'échanges convectifs de la chaleur sur sa frontière et (17), à l'intégration du système d'équations (18) avec les conditions initiales et aux limites (19). Le champ de température (39) est donné par les formules (36) et (38).

Les tensions thérmiques correspondantes à ce champ de températures sont données par les formules (59) — (60).

ON CERTAIN MONGE-AMPÈRE EQUATIONS AND THE ONE-DIMENSIONAL UNSTEADY POTENTIAL EQUATION

BY

E. GOLDHAGEN

Introduction. In this paper we deal with the hyperbolic equations of the form:

$$A(p,q)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + B(p,q)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\,\partial x} + C(p,q)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \tag{I.1}$$

where t and x are independent variables, Φ is an unknown function, $p = \partial\Phi/\partial t$, $q = \partial\Phi/\partial x$, and A, B, C are real functions of class C^2.

We denote by $\lambda_1(p,q)$ and $\lambda_2(p,q)$ the solutions of algebraic equation

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0$$

and with

$$u(p,q) = \alpha,\ v(p,q) = \beta, \tag{I.2}$$

the solutions of the differential equations

$$dp + \lambda_2\, dq = 0,\quad dp + \lambda_1\, dq = 0, \tag{I.3}$$

α and β being constants.

We can easily show that the integration of the nonlinear equation (I.1) leads to the integration of the linear equation

$$(\mu_1 - \mu_2)\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial\mu_1}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta} - \frac{\partial\mu_2}{\partial\beta}\frac{\partial t}{\partial\alpha} = 0, \tag{I. 4}$$

where the coefficients

$$\mu_i(\alpha,\beta) \equiv \lambda_i[p(\alpha,\beta),\ q(\alpha,\beta)] \tag{I.5}$$

are obtained with the aid of the relations (I.2).