6. Саркисян М. С. — *К теории плоской деформации пластических анизотропных тел.* ПММ, 1960, 24, № 6, стр. 1136—1139.
7. Быковцев Г. И. — *О плоской деформации анизотропных идеально-пластических тел.* Изв. АН СССР, отд. техн. и мех. и машиностр. 1963, № 2, стр. 66—74.
8. Borş I. C. — *Sur la théorie de la plasticité des corps orthotropes.* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser., Sci tech., No. 9, 1966, p. 541.

DEFORMAREA PLANĂ A CORPURILOR ORTOTROPE ÎN DOMENIUL PLASTIC

Rezumat

Pentru studiul deformării plastice plane se utilizează potenţialul plastic de forma (1). Legăturile dintre vitezele de deformare şi tensiuni sînt date de (8). Se arată că ecuaţiile pentru definirea stării de tensiune (12) sînt de tip hiperbolic, caracteristicile nefiind ortogonale,

Starea de deformare se determină din ecuaţiile (18) care sînt de tip hiperbolic.

TEOREME VARIAŢIONALE ÎN PLASTICITATEA CORPURILOR ORTOTROPE. CAZUL DEFORMĂRILOR PLANE

DE

C. I. BORŞ

1. Postulînd faptul că deformările de volum sînt totdeauna elastice, s-a ajuns la concluzia că potenţialul plastic, din care se obţine condiţia de plasticitate şi legea de curgere, trebuie să fie de forma [1]:

$$2\Psi = K_{12}\left(\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)^2 + K_{23}\left(\sigma_{22} - \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}}\sigma_{33}\right)^2 + K_{31}\left(\sigma_{33} - \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{11}}\sigma_{11}\right)^2 + K_{44}\sigma_{23}^2 + K_{55}\sigma_{31}^2 + K_{66}\sigma_{12}^2. \tag{1}$$

Condiţia de plasticitate este dată de

$$\Psi = K^2, \tag{2}$$

iar legea de curgere de

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{11} = \lambda\Delta_{11}\left[K_{12}\left(\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right) - K_{31}\frac{\Delta_{33}}{\Delta_{11}}\left(\sigma_{33} + \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{11}}\sigma_{11}\right)\right], \\ \dot{\varepsilon}_{22} = \lambda\Delta_{22}\left[K_{23}\left(\sigma_{22} - \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}}\sigma_{33}\right) - K_{12}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\left(\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)\right], \\ \dot{\varepsilon}_{33} = \lambda\Delta_{33}\left[K_{31}\left(\sigma_{33} - \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{11}}\sigma_{11}\right) - K_{23}\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}}\left(\sigma_{22} - \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{33}}\sigma_{33}\right)\right]; \end{cases} \tag{3}$$

$$\dot{\varepsilon}_{23} = \lambda K_{44}\sigma_{23}, \quad \dot{\varepsilon}_{31} = \lambda K_{55}\sigma_{31}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} = \lambda K_{66}\sigma_{12}. \tag{3'}$$

Se poate constata uşor că legea de curgere verifică în mod identic condiţia de incompresibilitate.

În cazul unei deformări plane, avem:

$$\dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{31} = \dot{\varepsilon}_{33} = 0,$$

şi condiţia de plasticitate devine [2]:

$$A\left(\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)^2 + B\sigma_{12}^2 = 1, \tag{4}$$

iar legea de curgere

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{11} = \lambda A \Delta_{11}\left(\sigma_{11} - \dfrac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right), \\ \dot{\varepsilon}_{22} = -\lambda A \Delta_{11}\left(\sigma_{11} - \dfrac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right), \\ \dot{\varepsilon}_{12} = \lambda B \sigma_{12}. \end{cases} \tag{5}$$

2. În legătură cu unele principii variaţionale ale plasticităţii corpurilor ortotrope, în Nota de faţă se vor demonstra două teoreme, care pot avea aplicaţii în elaborarea unor metode aproximative de rezolvare a ecuaţiilor plasticităţii corpurilor ortotrope. Pentru simplificarea calculelor, demonstraţiile se vor face în ipoteza deformării plane. Teoremele ce vor fi demonstrate vor generaliza unele rezultate stabilite de către R. Hill [3, 4] şi A. A. Markov [5] în cazul mediului izotrop, rezultate expuse şi în cartea lui W. Prager şi Ph. G. Hodge [7].

În cele ce urmează vom nota cu S suprafaţa corpului, cu S_V partea din S pe care se dau vitezele, iar cu S_T porţiunea pe care se dau tensiunile superficiale T_i.

Presupunem că vitezele şi încărcările superficiale sînt astfel încît întregul corp se găseşte în domeniul plastic. Înainte de a trece la demonstrarea teoremelor amintite, să dăm unele definiţii:

Tensiunile σ_{ij}^0, definite în întreg corpul, se numesc static admisibile, dacă verifică ecuaţiile de echilibru

$$\sigma_{ij,j}^0 = 0, \tag{6}$$

condiţia de plasticitate (2) sau (4), după cum ne ocupăm de probleme spaţiale sau plane, şi condiţiile la limită

$$\sigma_{ij}^0 n_j = \sigma_{ij} n_j T_i; \tag{7}$$

cu σ_{ij} am notat tensiunile reale, iar cu n_j versorul normalei exterioare la suprafaţa S.

Vitezele de deformare $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$, definite în întreg corpul, se numesc cinematic posibile, dacă ele se obţin din vitezele v_i^* prin formulele

$$\dot{\varepsilon}_{11}^* = v_{1,1}^*, \quad \dot{\varepsilon}_{22}^* = v_{2,2}^*, \quad \dot{\varepsilon}_{12}^* = v_{1,2}^* + v_{2,1}^* \tag{8}$$

şi satisfac condiţia de incompresibilitate

$$v_{i,i}^* = 0. \tag{9}$$

Din aceste definiţii rezultă că tensiunile reale σ_{ij} sînt static admisibile, iar vitezele de deformare reale $\dot{\varepsilon}_{ij}$ sînt cinematic posibile.

Presupunînd acum că soluţia problemei de plasticitate există, să trecem la enunţarea şi demonstrarea celor două teoreme.

Teorema 1. *Printre toate tensiunile static admisibile σ_{ij}^0, tensiunile reale σ_{ij} sînt astfel că, pentru ele, funcţionala*

$$I^0 = \int_{S_V}\left[\sigma_{11}^0 \frac{v_1}{\Delta_{11}} n_1 + \sigma_{12}^0\left(\frac{v_1}{\Delta_{11}} n_2 + \frac{v_2}{\Delta_{22}} n_1\right) + \sigma_{22}^0 \frac{v_2}{\Delta_{22}} n_2\right] dS + \int_V \sigma_{12}^0\left(\dot{\varepsilon}_{12} - \frac{v_{1,2}}{\Delta_{11}} - \frac{v_{2,1}}{\Delta_{22}}\right) dV \tag{10}$$

primeşte valoarea maximă.

Pentru demonstrarea acestei teoreme va trebui să arătăm că diferenţa

$$I - I^0 = \int_S\left[(\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)\frac{v_1}{\Delta_{11}} n_1 + (\sigma_{12} - \sigma_{12}^0)\left(\frac{v_1}{\Delta_{11}} n_2 + \frac{v_2}{\Delta_{22}} n_1\right) + (\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)\frac{v_2}{\Delta_{22}} n_2\right] dS + \int_V (\sigma_{12} - \sigma_{12}^0)\left[\dot{\varepsilon}_{12} - \frac{v_{1,2}}{\Delta_{11}} - \frac{v_{2,1}}{\Delta_{22}}\right] dV \tag{11}$$

este negativă. În (11) integrarea se poate lua pe întreaga suprafaţă S, deoarece pe S_T funcţia de sub integrală se anulează.

Dacă în (11) transformăm integrala de suprafaţă într-o integrală de volum, putem scrie

$$I - I^0 = \int_V\left[(\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)\frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{\Delta_{11}} + (\sigma_{12} - \sigma_{12}^0)\dot{\varepsilon}_{12} + (\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)\frac{\dot{\varepsilon}_{22}}{\Delta_{22}}\right] dV.$$

Deoarece vitezele reale de deformare $\dot{\varepsilon}_{ij}$ verifică relaţiile (5), rezultă că;

$$
(12)\quad \begin{cases}
\sigma_{11}\dfrac{\dot{\varepsilon}_{11}}{\Delta_{11}} + \sigma_{12}\dot{\varepsilon}_{12} + \sigma_{22}\dfrac{\dot{\varepsilon}_{22}}{\Delta_{22}} = \\
= \lambda\left[A\left(\sigma_{11} - \dfrac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)^2 + B\sigma_{12}^2\right] = \lambda, \\
\sigma_{11}^0\dfrac{\dot{\varepsilon}_{11}}{\Delta_{11}} + \sigma_{12}^0\dot{\varepsilon}_{12} + \sigma_{22}^0\dfrac{\dot{\varepsilon}_{22}}{\Delta_{22}} = \\
= \lambda\left[A\left(\sigma_{11} - \dfrac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)\left(\sigma_{11}^0 - \dfrac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}^0\right) + B\sigma_{12}\sigma_{12}^0\right],
\end{cases}
$$

aşa că putem scrie

$$
I - I^0 = \int_V \lambda\left\{A\left(\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)^2 + B\sigma_{12}^2 - \right.
$$

$$
\left. - \left[A\left(\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)\left(\sigma_{11}^0 - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}^0\right) + B\sigma_{12}\sigma_{12}^0\right]\right\} dV.
$$

Din inegalitatea lui Schwarz avem

$$
A\left(\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)\left(\sigma_{11}^0 - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}^0\right) + B\sigma_{12}\sigma_{12}^0 \leqslant
$$

$$
\leqslant \left(A\left(\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)^2 + B\sigma_{12}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(A\left(\sigma_{11}^0 + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}^0\right)^2 + B\sigma_{12}^0\right)^{\frac{1}{2}},
$$

semnul de egalitate avînd loc numai pentru

$$
\sigma_{11}^0 - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}^0 = c\left(\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right),
$$

$$
\sigma_{12}^0 = c\sigma_{12}.
$$

Cum atît σ_{ij}^0 cît şi σ_{ij} verifică condiţia de plasticitate (4) în tot corpul, rezultă $c = 1$. Din cele de mai sus avem

$$
1 - A\left(\sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}\right)\left(\sigma_{11}^0 - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}^0\right) + B\sigma_{12}\sigma_{12}^0 \geqslant 0,
$$

şi cum $\lambda > 0$, rezultă

$$
(13)\qquad I - I^0 \geqslant 0.
$$

Teorema va fi demonstrată dacă vom arăta că din

$$
(14)\qquad \sigma_{11}^0 - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}^0 = \sigma_{11} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}\sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}
$$

rezultă că $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}$.

Din faptul că atît σ_{ij} cît şi σ_{ij}^0 verifică ecuaţiile de echilibru, avem

$$
(\sigma_{11} - \sigma_{11}^0)_{,1} = 0, \quad (\sigma_{22} - \sigma_{22}^0)_{,2} = 0.
$$

Pe de altă parte, din (14),

$$
\sigma_{11} - \sigma_{11}^0 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{22}}(\sigma_{22} - \sigma_{22}^0),
$$

şi din aceasta deducem

$$
\sigma_{11} - \sigma_{11}^0 = \text{const.}, \quad \sigma_{22} - \sigma_{22}^0 = \text{const.}
$$

Cum σ_{ij} şi σ_{ij}^0 verifică (7) rezultă

$$
\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0
$$

şi teorema este complet demonstrată.

Teorema 2. *Printre toate vitezele de deformare $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$, cinematic posibile, vitezele de deformare reale $\dot{\varepsilon}_{ij}$ sînt astfel că, pentru ele, funcţionala*

$$
\mathcal{J}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_V \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{11}^{*2} + \dot{\varepsilon}_{22}^{*2}}{A\Delta_{22}^2} + \frac{2\dot{\varepsilon}_{12}^{*}}{B}\right)^{\frac{1}{2}} dV -
$$

$$
(15)\qquad - \int_{S_T}\left[\sigma_{11}\frac{v_1^*}{\Delta_{11}}n_1 + \sigma_{12}\left(\frac{v_1^*}{\Delta_{11}}n_2 + \frac{v_2^*}{\Delta_{22}}n_1\right) + \sigma_{22}\frac{v_2^*}{\Delta_{22}}n_2\right] dS +
$$

$$
+ \int_V \sigma_{12}\left[\dot{\varepsilon}_{12} - \dot{\varepsilon}_{12}^* - \frac{v_{1,2} - v_{1,2}^*}{\Delta_{11}} - \frac{v_{2,1} - v_{2,1}^*}{\Delta_{22}}\right] dV
$$

primeşte valoarea minimă.

Procedînd ca la teorema 1, nu este greu să constatăm că diferenţa $\mathcal{J}^* - \mathcal{J}$ poate fi scrisă, în cele din urmă, sub forma

$$
\mathcal{J}^* - \mathcal{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_V \left[\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{11}^{*2} + \dot{\varepsilon}_{22}^{*2}}{A\Delta_{11}^2} + \frac{2\dot{\varepsilon}_{12}^{*2}}{B}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{22}^2}{A\Delta_{11}} + \frac{2\dot{\varepsilon}_{12}^2}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right] dV -
$$

$$
(16)\qquad - \int_V \left[\sigma_{11}\frac{\dot{\varepsilon}_{11}^* - \dot{\varepsilon}_{11}}{\Delta_{11}} + \sigma_{12}(\dot{\varepsilon}_{12}^* - \varepsilon_{12}) - \sigma_{22}\frac{\dot{\varepsilon}_{22}^* - \dot{\varepsilon}_{22}}{\Delta_{22}}\right] dV.
$$

Dacă ţinem seama că $\dot{\varepsilon}^*_{11} + \dot{\varepsilon}^*_{22} = 0$, găsim

$$(17)\quad \begin{cases} \sigma_{11}\dfrac{\dot{\varepsilon}^*_{11}}{\Delta_{11}} + \sigma_{12}\dot{\varepsilon}^*_{12} + \sigma_{22}\dfrac{\dot{\varepsilon}^*_{22}}{\Delta_{22}} = \dfrac{1}{2\lambda}\left[\dfrac{\dot{\varepsilon}_{11}\dot{\varepsilon}^*_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}\dot{\varepsilon}^*_{22}}{A\Delta^2_{11}} + \dfrac{2\dot{\varepsilon}_{12}\dot{\varepsilon}^*_{12}}{B}\right], \\ \sigma_{11}\dfrac{\dot{\varepsilon}_{11}}{\Delta_{11}} + \sigma_{12}\dot{\varepsilon}_{12} + \sigma_{22}\dfrac{\dot{\varepsilon}_{22}}{\Delta_{22}} = \dfrac{1}{2\lambda}\left[\dfrac{\dot{\varepsilon}^2_{11} + \dot{\varepsilon}^2_{22}}{A\Delta^2_{11}} + \dfrac{2\dot{\varepsilon}^2_{12}}{B}\right]. \end{cases}$$

Utilizînd prima relaţie (12), avem şi

$$(18)\quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\dot{\varepsilon}^2_{11} + \dot{\varepsilon}^2_{22}}{A\Delta^2_{11}} + \frac{2\dot{\varepsilon}^2_{12}}{B}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Rezultă că în cele din urmă diferenţa (16) se poate scrie sub forma:

$$(19)\quad \begin{aligned} \mathcal{J} - \mathcal{J}^* = \int_V \Bigg\{ & \left(\frac{\dot{\varepsilon}^2_{11} + \dot{\varepsilon}^2_{22}}{A\Delta^2_{11}} + \frac{2\dot{\varepsilon}_{12}}{B}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{*2}_{11} + \dot{\varepsilon}^{*2}_{22}}{A\Delta^2_{11}} + \frac{2\dot{\varepsilon}^2_{12}}{B}\right)^{\frac{1}{2}} - \\ & - \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{11}\dot{\varepsilon}^*_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}\dot{\varepsilon}^*_{22}}{A\Delta^2_{11}} + \frac{2\dot{\varepsilon}_{12}\dot{\varepsilon}^*_{12}}{B}\right)\Bigg]\left(\frac{\dot{\varepsilon}^2_{11} + \dot{\varepsilon}^2_{22}}{A\Delta^2_{11}} + \frac{2\dot{\varepsilon}^2_{12}}{B}\right)^{-\frac{1}{2}}\Bigg\} dV. \end{aligned}$$

Dacă ţinem seama de inegalitatea

$$\frac{\dot{\varepsilon}_{11}\dot{\varepsilon}^*_{11} + \dot{\varepsilon}_{22}\dot{\varepsilon}^*_{22}}{A\Delta^2_{11}} + \frac{2\dot{\varepsilon}_{12}\dot{\varepsilon}^*_{12}}{B} \leqslant \left(\frac{\dot{\varepsilon}^2_{11} + \dot{\varepsilon}^2_{22}}{A\Delta^2_{11}} + \frac{2\dot{\varepsilon}^2_{12}}{B}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{\dot{\varepsilon}^{*2}_{11} + \dot{\varepsilon}^{*2}_{12}}{A\Delta^2_{11}} + \frac{2\dot{\varepsilon}^{*2}_{12}}{B}\right)^{\frac{1}{2}},$$

din (19) rezultă că

$$(20)\quad \mathcal{J}^* - \mathcal{J} \geqslant 0$$

şi teorema este demonstrată.

Pe de altă parte, din (17) şi (18) avem:

$$(21)\quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_V \left(\frac{\dot{\varepsilon}^2_{11} + \dot{\varepsilon}^2_{22}}{A\Delta^2_{11}} + \frac{2\dot{\varepsilon}^2_{12}}{B}\right)^{\frac{1}{2}} dV &= \int_V \left(\sigma_{11}\frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{\Delta_{11}} + \sigma_{12}\dot{\varepsilon}_{12} + \sigma_{22}\frac{\dot{\varepsilon}_{22}}{\Delta_{22}}\right) dV = \\ &= \int_S \left[\sigma_{11}\frac{v_1}{\Delta_{11}}n_1 + \sigma_{12}\left(\frac{v_1}{\Delta_{11}}n_2 + \frac{v_2}{\Delta_{22}}n_2\right) + \sigma_{22}\frac{v_2}{\Delta_{22}}n_2\right] dS + \\ &\quad + \int_V \sigma_{12}\left(\dot{\varepsilon}_{12} - \frac{v_{1,2}}{\Delta_{11}} - \frac{v_{2,1}}{\Delta_{22}}\right) dV. \end{aligned}$$

Din (10), (15) şi (21) rezultă acum

$$(22)\quad \mathcal{J} = I.$$

Dacă ţinem seama de (13), (20) şi (22), putem scrie inegalităţile

$$(23)\quad I^0 \leqslant I = \mathcal{J} \leqslant \mathcal{J}^*.$$

Utilizînd o altă condiţie de plasticitate W. Olszak şi P. Perzyna [6] au obţinut rezultate analoge.

BIBLIOGRAFIE

1. Borş C. I. — *Sur la théorie de la plasticité des corps orthotropes.* Bull. de l'Acad. Polonaise des Sci., Série sci. tech. vol. XIV, 1966, p. 541.
2. Borş C. I. şi Diaconiţa V. — *Plastic plane deformations of orthotropic bodies.* An. şt. Univ. Iaşi, T., XIII, f. 1, 1967, p. 123.
3. Hill R. — *A variational principle of maximum plastic work in clasical plasticity.* Quart J. Mech. Appl. Math. I, 1948, p. 18.
4. Hill R. — *The Mathematical Theory of Plasticity.* Oxford, Clarendon Press, 1950.
5. Марков A. A. — *Вариационные принципы в теории пластичности* ПММ, XI, 1947, p. 339.
6. Olszak W. and Perzyna P. — *Variational theorems in the Theory of non-homogeneous elastic plastic Bodies. I. Non-homogeneous anisotropic Bodies.* Bull. de l'Acad. Polonaise des Sci., Série Sci. Tech., vol. VI, 1966, p. 95.
7. Prager W., Hodge Ph. G. — *Theory of perfectly plastic solids.* New York, John Wiley and Sons, London, Chapman and Hall, 1951.

THÉORÈMES VARIATIONNELS DANS LA THÉORIE DE LA PLASTICITÉ DES CORPS ORTHOTROPES. LE CAS DES DÉFORMATIONS PLANES

Résumé

En utilisant la condition de plasticité (4) et la loi d'écoulement (5), on démontre que pour les tensions réelles, la fonctionnelle (10) prend une valeur maximale. La fonctionnelle (15) prend une valeur minimale pour les vitesses de déformation réelles. De (13), (20) et (22) on obtient les inégalités (23).