UNELE PROBLEME ASUPRA SEMISPAŢIULUI ORTOTROP

DE

V. V. GHEORGHIŢĂ

Problema tensiunilor termice la corpurile ortotrope în cazul problemelor plane, a fost studiată de diverşi autori: W. Nowacki [1, 2, 3] P. P. Teodorescu [4], C. I. Borş [5].

Lucrarea de faţă, îşi propune să studieze tensiunile ce apar într-un mediu ortotrop semiinfinit la încărcări simetrice şi asimetrice în cazul problemei plane obişnuite, folosind metoda propusă de C. I. Borş în [6],

În cazul unui mediu ortotrop, a cărui temperatură rămîne constantă. legătura între tensiuni şi deformări este dată de legea lui Hooke:

$$
(1)\qquad \begin{cases}
\sigma_x = a_{11}\,\varepsilon_x + a_{12}\,\varepsilon_y + a_{13}\,\varepsilon_z, \\
\sigma_y = a_{12}\,\varepsilon_x + a_{22}\,\varepsilon_y + a_{23}\,\varepsilon_z, \\
\sigma_z = a_{13}\,\varepsilon_x + a_{23}\,\varepsilon_y + a_{33}\,\varepsilon_z, \\
\tau_{xy} = a_{44}\,\gamma_{yz};\ \tau_{zx} = a_{55}\,\gamma_{zx};\ \tau_{xy} = a_{66}\,\gamma_{xy}.
\end{cases}
$$

unde a_{ij} = constante caracterizînd proprietăţile elastice ale mediului.

Relaţiile între deformări şi deplasări au forma:

$$
(2)\qquad \begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y};\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\
\gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y};\ \gamma_{zx} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z};\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}.
\end{cases}
$$

Ecuaţiile de echilibru, în absenţa forţelor masice, sînt date de

$$
(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \end{cases}
$$

Pentru starea de deformare plană, u şi v sînt funcţii de x, y iar $w = 0$. In acest caz, aplicînd metoda de calcul semiinversă, vom reprezenta deplasările u şi v cu ajutorul a două funcţii Φ_1 şi Φ_2 sub forma:

$$
(4)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \\[2ex] V = k_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} + k_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y}. \end{cases}
$$

unde k_1 şi k_2 sînt constante ce vor fi precizate ulterior.

Conform relaţiilor (2), componentele deformaţiei vor fi:

$$
(5)\qquad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2}, \\[2ex] \varepsilon_y = k_1 \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + k_2 \dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}, \\[2ex] \varepsilon_z = \gamma_{yx} = \gamma_{zx} = 0, \\[2ex] \gamma_{xy} = (1 + k_1) \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} + (1 + k_2) \dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y}. \end{cases}
$$

Substituind deformările date de (5) în relaţiile (1), găsim tensiunile exprimate cu ajutorul funcţiilor Φ_1 şi Φ_2.

$$
(6)\qquad \begin{cases} \sigma_x = a_{11} \left(\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} \right) + a_{12} \left(k_1 \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + k_2 \dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} \right), \\[2ex] \sigma_y = a_{12} \left(\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} \right) + a_{22} \left(k_1 \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + k_2 \dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} \right), \\[2ex] \sigma_z = a_{13} \left(\dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} \right) + a_{23} \left(k_1 \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + k_2 \dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} \right), \end{cases}
$$

$$
(6)\qquad \begin{cases} \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \\[2ex] \tau_{xy} = a_{66} \left\{ (1 + k_1) \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} + (1 + k_2) \dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} \right\}. \end{cases}
$$

Ecuaţiile de echilibru (3) vor fi satisfăcute dacă funcţiile Φ_1 şi Φ_2 satisfac ecuaţiile:

$$
(7)\qquad \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + a_i^2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} = 0 \quad \text{cu} \quad a_i^2 = \frac{a_{12} k_i + a_{66} (1 + k_i)}{a_{11}} \qquad (i = 1, 2)
$$

unde k_1 şi k_2 sînt rădăcinile ecuaţiei:

$$
(8)\qquad a_{66} (a_{12} + a_{66}) k^2 + [(a_{12} + a_{66})^2 + a_{66}^2 - a_{11} a_{22}] k + a_{66} (a_{12} + a_{66}) = 0.
$$

Ecuaţiile (7) se pot rezolva utilizînd metoda transformărilor integrale. Aplicînd transformata Fourier în raport cu y, ecuaţiile (7) se transcriu astfel:

$$
(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2} \bar{\Phi}_1 (x, \xi) - a^2 \xi^2 \bar{\Phi}_1 (x, \xi) = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2}{dx^2} \bar{\Phi}_2 (x, \xi) - b^2 \xi^2 \bar{\Phi}_2 (x, \xi) = 0, \end{cases}
$$

adică ecuaţii de ordin al doilea cu coeficienţi constanţi; aici a şi b sînt coeficienţii a_1 şi a_2 din ecuaţiile (7).

Ecuaţia caracteristică, corespunzătoare primei ecuaţii (9), este

$$
r^2 - a^2 \xi^2 = 0; \quad r_{1,2} = \pm a |\xi|.
$$

Soluţia acestei ecuaţii are forma:

$$
(\mathrm{I})\qquad \bar{\Phi}_1 (x, \xi) = A(\xi) e^{-a|\xi| x} + B(\xi) e^{a|\xi| x}.
$$

Analog, soluţia celei de a doua ecuaţii (9) are forma:

$$
(\mathrm{II})\qquad \bar{\Phi}_2 (x, \xi) = C(\xi) e^{-b|\xi| x} + D(\xi) e^{b|\xi| x}
$$

unde $\bar{\Phi}_1$ şi $\bar{\Phi}_2$ sînt transformatele Fourier ale funcţiilor Φ_1 şi Φ_2 în raport cu y.

În ipoteza că Φ_1 şi Φ_2 precum şi $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}$ tind la zero pentru $|x| \to \infty$ imaginile tensiunilor sînt date de relaţiile:

$$
(10)\qquad \bar{\sigma}_x (x, \xi) = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{\Phi}_1 (x, \xi) + \bar{\Phi}_2 (x, \xi)] - a_{12} \xi^2 [k_1 \bar{\Phi}_1 (x, \xi) + k_2 \bar{\Phi}_2 (x, \xi)]
$$

$$\bar{\sigma}_y(x,\xi) = a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\bar{\Phi}_1(x,\xi)+\bar{\Phi}_2(x,\xi)] - a_{22}\xi^2[k_1\bar{\Phi}_1(x,\xi) + k_2\bar{\Phi}_2(x,\xi)] \tag{11}$$

$$\bar{\sigma}_z(x,\xi) = a_{13}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\bar{\Phi}_1(x,\xi)+\bar{\Phi}_2(x,\xi)] - a_{23}\xi^2[k_1\bar{\Phi}_1(x,\xi)] + k_2\bar{\Phi}_2(x,\xi)] \tag{12}$$

$$\bar{\tau}_{xy}(x,\xi) = (-i\xi)\,a_{66}\frac{\partial}{\partial x}[(1+k_1)\bar{\Phi}_1(x,\xi) + (1+k_2)\Phi_2(x,\xi)]. \tag{13}$$

În cele ce urmează vom considera un corp ortotrop, mărginit de un plan.

Pentru domenii nemărginite (în special domenii cu frontiera rectilinie) rezolvarea problemei plane e avantajată de faptul că se pretează la aplicarea transformărilor Fourier.

Luînd axa Ox orientată perpendicular pe plan, ecuaţia acestuia este $x = 0$ iar condiţiile la limită se scriu:

$$\begin{cases} \sigma_x(x,y) = -p(y), \\ \tau_{xy}(x,y) = 0, \end{cases} \quad \text{pentru } x = 0. \tag{14}$$

Dacă admitem că la infinit tensiunile sînt nule, atunci din (I) şi (II) rezultă: $B(\xi) = 0$ şi $D(\xi) = 0$. Coeficienţii $A(\xi)$ şi $C(\xi)$ se pot determina din transformatele condiţiilor la limită. Avem:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_x(x,\xi) = -\bar{p}(\xi), \\ \bar{\tau}_{xy}(x,\xi) = 0, \end{cases} \quad \text{pentru } x = 0. \tag{15}$$

După calcule simple, rezultă;

$$A(\xi) = \frac{b}{a_{66}(a-b)(1+k_1)}\cdot\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi^2} \tag{16}$$

şi

$$C(\xi) = -\frac{a}{a_{66}(a-b)(1+k_2)}\cdot\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi^2}. \tag{17}$$

Revenind la (I) şi (II) obţinem:

$$\bar{\Phi}_1(x,\xi) = \frac{b}{a_{66}(a-b)(1+k_1)}\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi^2}e^{-a|\xi|x}, \tag{18}$$

$$\bar{\Phi}_2(x,\xi) = -\frac{a}{a_{66}(a-b)(1+k_2)}\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi^2}e^{-b|\xi|x}. \tag{19}$$

Aplicînd inversa transformării Fourier relaţiilor (10)—(13), deducem expresiile tensiunilor:

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a-b}[be^{-a|\xi|x} - ae^{-b|\xi|x}]e^{-i\xi y}\bar{p}(\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Bigg\{&\frac{a_{12}}{a_{66}}\cdot\frac{ab}{a-b}\left[\frac{a}{1+k_1}e^{-a|\xi|x} - \frac{b}{1+k_2}e^{-b|\xi|x}\right] - \\ &-\frac{a_{22}}{a_{66}}\cdot\frac{1}{a-b}\left[\frac{k_1 b}{1+k_1}e^{-a|\xi|x} - \frac{k_2 a}{1+k_2}e^{-b|\xi|x}\right]\Bigg\}e^{-i\xi y}\bar{p}(\xi)\,d\xi.\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Bigg\{&\frac{a_{13}}{a_{66}}\frac{ab}{a-b}\left[\frac{a}{1+k_1}e^{-a|\xi|x} - \frac{b}{1+k_2}e^{-b|\xi|x}\right] - \\ &-\frac{a_{23}}{a_{66}}\frac{1}{a-b}\left[\frac{k_1 b}{1+k}e^{-a|\xi|x} - \frac{k_2 a}{1+k_2}e^{-b|\xi|x}\right]\Bigg\}e^{-i\xi y}\bar{p}(\xi)\,d\xi.\end{aligned} \tag{22}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ab}{a-b}\left[e^{-a|\xi|x} - e^{-b|\xi|x}\right]e^{-i\xi y}\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi}\,d\xi. \tag{23}$$

Procedînd analog, găsim pentru deplasări, expresiile:

$$U = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a_{66}}\cdot\frac{ab}{a-b}\left[\frac{1}{1+k_1}e^{-a|\xi|x} - \frac{1}{1+k_2}e^{-b|\xi|x}\right]e^{-i\xi y}\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi}\,d\xi. \tag{24}$$

$$V = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a_{66}(a-b)}\left[\frac{k_1 b}{1+k_1}e^{-a|\xi|x} - \frac{k_2 a}{1+k_2}e^{-b|\xi|x}\right]e^{-i\xi y}\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi}\,d\xi. \tag{25}$$

In cele ce urmează, ne ocupăm de două cazuri speciale de încărcare a frontierei corpului:

a) Cazul cînd $\bar{p}(\xi)$ este o funcţie pară (corespunzător încărcării simetrice). In acest caz, expresiile tensiunilor şi deplasărilor se simplifică:

$$\sigma_x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{a-b}[be^{-a\xi x} - ae^{-b\xi x}]\cos\xi y\,\bar{p}(\xi)\,d\xi. \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\Bigg\{&\frac{a_{12}}{a_{66}}\cdot\frac{ab}{a-b}\left[\frac{a}{1+k_1}e^{-a\xi x} - \frac{b}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right] - \end{aligned} \tag{27}$$

$$-\frac{1}{a-b}\frac{a_{22}}{a_{66}}\left[\frac{k_1 b}{1+k_1}e^{-a\xi x}-\frac{k_2 a}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]\Bigg\}\cos\xi y\,\bar{p}(\xi)\,d\xi.$$

(28)
$$\sigma_x=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{a_{13}}{a_{66}}\cdot\frac{ab}{a-b}\left[\frac{a}{1+k_1}e^{-a\xi x}-\frac{b}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{a-b}\frac{a_{23}}{a_{66}}\left[\frac{k_1 b}{1+k_1}e^{-a\xi x}-\frac{k_2 a}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]\right\}\cos\xi y\,\bar{p}(\xi)\,d\xi.$$

(29)
$$\tau_{xy}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{ab}{a-b}\left[e^{-a\xi x}-e^{-b\xi x}\right]\sin\xi y\,\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

(30)
$$U=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{a_{66}}\frac{ab}{a-b}\left[\frac{1}{1+k_1}e^{-a\xi x}-\frac{1}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]\cos\xi y\,\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

(31)
$$V=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{a_{66}}\frac{1}{a-b}\left[\frac{k_1 b}{1+k_1}e^{-a\xi x}-\frac{k_2 a}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]\sin\xi y\,\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

unde $\bar{p}(\xi)=\int_0^\infty p(y)\cos\xi y\,dy$.

b) Cazul cînd $\bar{p}(\xi)$ este impară (corespunzător încărcării asimetrice). In acest caz, tensiunile şi deplasările sînt date de relaţii analoge:

(32)
$$\sigma_x=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{a-b}\left[be^{-a\xi x}-ae^{-b\xi x}\right]\sin\xi y\,\bar{p}(\xi)\,d\xi.$$

(33)
$$\sigma_y=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{a_{12}}{a_{66}}\cdot\frac{ab}{a-b}\left[\frac{a}{1+k_1}e^{-a\xi x}-\frac{b}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{a_{22}}{a_{66}}\cdot\frac{1}{a-b}\left[\frac{k_1 b}{1-k_1}e^{-a\xi x}-\frac{k_2 a}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]\right\}\sin\xi y\,\bar{p}(\xi)\,d\xi.$$

(34)
$$\sigma_z=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{a_{13}}{a_{66}}\cdot\frac{ab}{a-b}\left[\frac{a}{1+k_1}e^{-a\xi x}-\frac{b}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{a_{33}}{a_{66}}\cdot\frac{1}{a-b}\left[\frac{k_1 b}{1+k_1}e^{-a\xi x}-\frac{k_2 a}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]\right\}\sin\xi y\,d\xi.$$

(35)
$$\tau_{xy}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{ab}{a-b}\left[e^{-a\xi x}-e^{-b\xi x}\right]\cos\xi y\,\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

(36)
$$U=\frac{2i}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{a_{66}}\cdot\frac{ab}{a-b}\left[\frac{1}{1+k_1}e^{-a\xi x}-\frac{1}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]\sin\xi y\,\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

(37)
$$V=-\frac{2i}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{a_{66}}\cdot\frac{1}{a-b}\left[\frac{k_1 b}{1+k_1}e^{-a\xi x}-\frac{k_2 a}{1+k_2}e^{-b\xi x}\right]\cos\xi y\,\frac{\bar{p}(\xi)}{\xi}\,d\xi,$$

unde de data aceasta:

$$\bar{p}(\xi)=\int_0^\infty p(y)\sin\xi y\,dy.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Nowacki W. — *Thermal stresses in orthotropic plates.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. techn. VII, Nr. 1, 1959.
2. Nowacki W. — *Ustalnoe naprezsnia w walcu ortotropnym oraz w tarczy ortotropowej.* Rozpravy Inzynerskie, VIII, 1960.
3. Nowacki W. — *Zagadnienia termosprszystosci.* PWN, Warszawa, 1960.
4. Teodorescu P. P. — *Asupra problemei plane a elasticităţii unor corpuri anizotrope,* Com. Acad. R.P.R. Tom. VIII, 1958, p. 1119.
5. Borş C. I. — *Tensions thermiques axialement symétriques dans les corps transversalement isotropes.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, Tom. VIII (1962) p. 119.
6. Borş C. I. — *Tensiuni termice la corpurile ortotrope în cazul problemelor plane.* Şt. şi cerc. şt. Iaşi, Anul XIV (1963) p. 187.

QUELQUES PROBLÈMES SUR LE DEMI-ESPACE ORTHOTROPE

Résumé

Le problème des tensions thermiques pour les corps a été résolu par C. I. Borş dans [6].

Dans ce travail, on résout effectivement le problème plan pour le demi-espace élastique orthotrope, en utilisant la méthode des transformées Fourier.