SISTEME ELASTICE ANTIPLANE NEOMOGENE

DE

A. RADU

1. Definiţia sistemelor elastice antiplane neomogene

Noţiunea de sistem elastic antiplan a fost introdusă de către L. N. G. Filon [1] pentru corpuri elastice izotrope omogene.

Filon a numit sistem elastic antiplan un corp elastic izotrop şi omogen pentru care trei componente ale tensorului de tensiune şi anume σ_{11}, σ_{22} şi σ_{12} sînt nule, iar două componente σ_{13} şi σ_{23} sînt independente de x_3. După cum se ştie [2], problema elastică plană este caracterizată prin faptul că tensorul de tensiune are componentele σ_{13} şi σ_{23} nule, iar componentele σ_{11}, σ_{22} şi σ_{12} sînt independente de x_3. Astfel, starea de tensiune dintr-un sistem elastic antiplan (în sens Filon) este complementară stării de tensiune a problemei elastice plane.

Ipoteza anulării componentelor σ_{11}, σ_{22} şi σ_{12} ale tensorului de tensiune a fost făcută pentru prima dată de A. Clebsch [4], pentru problema echilibrului elastic al unei bare cilindrice. Clebsch a numit *problema lui Saint-Venant*, problema studiului echilibrului elastic al unei bare cilindrice, în absenţa forţelor masice, sub acţiunea unor forţe aplicate la capete, cu suprafaţa laterală liberă de tensiuni şi cu condiţia anulării lui σ_{11}, σ_{22} şi σ_{12}.

În ceea ce priveşte componenta σ_{33} a tensiunii, în cazul problemei plane ca este independentă de x_3, iar pentru sisteme elastice antiplane în sens Filon poate să depindă liniar de x_3.

W. Voigt [4] a pus ipoteza dependenţei liniare a componentelor tonsorului de tensiune cu coordonata x_3, în locul ipotezei lui Clebsch, pentru rezolvarea aceleiaşi probleme.

L. M. Milne-Thomson a extins noţiunea de sistem elastic antiplan, introducînd un nou model matematic, care cuprinde, în particular sistemele elastice plane şi sistemele elastice antiplane în sens Filon.

După L. M. Milne-Thomson [3], un sistem elastic omogen se numeşte antiplan, dacă există un plan π astfel încît să fie satisfăcute următoarele trei condiţii:

a) Singura componentă a tensiunii care poate depinde de distanţa la planul π, este componenta tensiunii normală la π.

b) Particulele materiale, care înainte de deformare erau situate în plane paralele la π, încetează de a mai fi aşa după deformare.

c) Forţa masică nu depinde de distanţa la antiplanul sistemului.

Planul π se numeşte antiplanul sistemului. Acest plan poate fi înlocuit printr-un alt plan π' paralel cu el, a cărui distanţă de π este constantă.

Alegem un sistem cartezian triortogonal de coordonate, astfel ca antiplanul sistemului să coincidă cu planul $x_3 = 0$.

Ecuaţiile echilibrului elastic se reduc la următoarele

$$(1)\qquad \begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = -F_1, \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = -F_1, \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} = -F_3, \end{cases}$$

unde am indicat prin virgulă operaţia de derivare parţială în raport cu coordonata de indice respectiv, iar F_1, F_2, F_3 sînt componentele forţei masice.

Din ecuaţiile (1) rezultă că starea antiplană de tensiune poate avea loc numai dacă σ_{33} este o funcţie liniară de x_3.

Consideraţiile anterioare nu depind de replica elastică a materialului.

În cazul deformărilor elastice infinitezimale, pentru medii omogene, din legea lui Hooke rezultă că deformările depind liniar de x_3 şi că dacă σ_{33} este independentă de x_3, atunci tot aşa vor fi şi componentele deformării.

Un caz particular al sistemelor elastice antiplane (în sens Milne-Thomson) îl formează sistemele elastice plane. Pentru a ne convinge de acest fapt, dăm mai jos definiţia sistemelor elastice plane după L. M. Milne-Thomson [2].

Se numeşte sistem elastic plan un corp pentru care există un plan astfel ca tensorul tensiunii să fie acelaşi, în orice punct material de pe normala la acest plan, ca şi în punctul în care normala întîlneşte planul.

Din ecuaţiile echilibrului elastic rezultă că forţele masice au aceeaşi proprietate a invariabilităţii de-a lungul unei normale la plan.

În continuare, prin sisteme elastice antiplane vom înţelege sisteme antiplane în sens Milne-Thomson.

Din cele ce preced rezultă că sistemele elastice plane sînt sisteme elastice antiplane pentru care componenta tensiunii normală la π nu depinde de distanţa pînă la acesta.

Un caz particular al sistemelor elastice plane îl constituie problema deformării plane. Starea de deformare plană poate fi caracterizată prin următoarele două condiţii [2]:

α) Una dintre direcţiile principale de deformare este aceeaşi în orice punct al corpului.

β) Exceptînd o mişcare rigidă a corpului, particulele care se găsesc în plane perpendiculare pe direcţia principală fixă, după deformare se vor găsi în aceleaşi plane de dinainte de deformare.

Dacă Ox_3 este direcţia principală de deformare despre care este vorba în definiţia anterioară, componentele deplasării vor avea expresiile

$$(2)\qquad u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0.$$

Vedem astfel că un sistem elastic supus unei deformări plane este un sistem elastic antiplan, pentru care componenta normală a tensiunii nu depinde de distanţa la planul π, iar particulele din plane paralele la π nu se deplasează în direcţia normală la π.

Pentru corpurile elastice cu neomogenitate continuă, cînd coeficienţii de elasticitate sînt funcţii continue de punct, vom completa definiţia sistemului elastic antiplan cu următoarea ipoteză:

d) Coeficienţii de elasticitate sînt independenţi de distanţa la antiplan.

Prin urmare, vom presupune că coeficienţii de elasticitate ai materialului sînt funcţii numai de x_1 şi x_2. Acest tip de neomogenitate continuă a fost numit de J. Nowinski şi S. Turski [6] neomogenitate transversală.

Dacă este satisfăcută condiţia *d*), în cazul deformărilor elastice infinitezimale, rezultă că deformările depind cel mult liniar de x_3. iar dacă σ_{33} nu depinde de x_3, atunci nici deformările nu depind de x_3.

Rezumînd, vom spune că un corp este un sistem elastic antiplan neomogen, dacă există un plan π cu următoarele proprietăţi:

1°. Componentele tensiunii nu depind de distanţa la planul π, cu excepţia eventuală a componentei normale la π.

2°. Forţa masică şi coeficienţii de elasticitate ai materialului nu depind de distanţa la planul π.

Denumirea de sistem elastic antiplan nu ni se pare cea mai potrivită pentru modelul matematic considerat. În lipsa unei denumiri mai adecvate, l-am putea numi şi sistem elastic monoplan. Indiferent cum este denumit, modelul acesta prezintă o importanţă incontestabilă.

Ecuaţiile (1) pot fi scrise sub formă complexă. Pentru aceasta să considerăm combinaţiile fundamentale ale tensiunilor introduse de G. V. Kolosov

$$(3)\qquad \Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad \Phi = \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}, \quad \Psi = \sigma_{31} - i\sigma_{23},$$

şi forţa masică complexă

$$(4)\qquad F = F_1 + iF_2.$$

Avînd în vedere notaţiile (2) şi (4), ecuaţiile echilibrului unui sistem elastic antiplan pot fi scrise sub forma

$$\Phi_{\bar z} - \Theta_{\bar z} = F, \quad \Psi_{\bar z} + \overline{\Psi}_{z} + \sigma_{33,3} = -F_3, \tag{5}$$

unde $U_{\bar z}$ şi U_z sînt derivata areolară, respectiv derivata medie a funcţiei U.

Pentru cele ce urmează mai introducem şi combinaţiile fundamentale ale deformărilor

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \quad \varphi = \varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} + 2i\varepsilon_{12}, \tag{6}$$

$$\Psi = \varepsilon_{31} - i\varepsilon_{23}.$$

După cum am observat mai înainte, componentele deformării pot depinde liniar de x_3. Dacă avem în vedere acest fapt, condiţiile de compatibilitate ale lui Saint-Venant devin

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} (\varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2})_{,1} = \varepsilon_{11,23}, \\ (\varepsilon_{12,3} + \varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{31,2})_{,2} = \varepsilon_{22,31}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{33,11} = 2\varepsilon_{31,31}, \quad \varepsilon_{33,22} = 2\varepsilon_{23,23}, \\ \varepsilon_{33,12} = (\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{31,2})_{,3}. \end{cases} \tag{9}$$

În baza lui (6), ecuaţiile (7), (8) şi (9) sînt respectiv echivalente cu

$$2\theta_{z\bar z} + \varphi_{\bar z\bar z} + \overline{\varphi}_{zz} = 0, \tag{7'}$$

$$(\psi_{\bar z} - \overline{\psi}_{z})_{\bar z} = \frac{1}{2}(\theta_{\bar z} + \overline{\varphi}_{z})_{,3}, \tag{8'}$$

$$(\varepsilon_{33})_{z\bar z} = \frac{1}{2}(\psi_{\bar z} + \overline{\psi}_{z})_{,3}, \quad (\varepsilon_{33})_{zz} = (\psi_{z})_{,3}. \tag{9'}$$

2. Sisteme elastice antiplane neomogene izotrope

Presupunem că modulul lui Young E şi coeficientul lui Poisson ν sînt funcţii de clasă $C^2(\overline{\Omega})$, în domeniul Ω ocupat de mediul elastic în planul x_1Ox_2 (antiplanul sistemului). Rezultă că şi coeficienţii de elasticitate ai lui Lamé λ şi μ sînt de asemenea funcţii de clasă $C^2(\overline{\Omega})$.

Cu notaţiile (3) şi (6), legea lui Hooke pentru medii elastice izotrope se poate scrie

$$\begin{cases} \Theta = 2(\lambda + \mu)\theta + 2\lambda\varepsilon_{33}, \quad \Phi = 2\mu\varphi, \\ \sigma_{33} = \lambda\theta + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}, \quad \Psi = 2\mu\psi. \end{cases} \tag{10}$$

În ipotezele anterioare este uşor de văzut că deformările $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$ nu depind de x_3, iar $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ pot depinde liniar de x_3; de asemenea mărimile Θ, Φ, Ψ, φ şi ψ sînt independente de x_3, iar θ este o funcţie liniară de x_3.

Avînd în vedere că ψ nu depinde de x_3, iar ε_{33} este o funcţie liniară de x_3, din (9') deducem

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}((\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0)x_3 + \beta z + \beta\bar z + 2\beta_0), \tag{11}$$

unde α şi β sînt constante complexe, iar α_0 şi β_0 constante reale necunoscute.

Deoarece Θ nu depinde de x_3, din ecuaţiile (10) şi (11) găsim

$$\theta_{,3} = -\nu(\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0), \tag{12}$$

$$\sigma_{33,3} = \frac{1}{2}E(\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0). \tag{13}$$

Din ecuaţiile (12) şi (13) rezultă

$$\theta = \theta^0 - \nu(\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0)x_3, \tag{14}$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^0 + \frac{1}{2}E(\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0)x_3, \tag{15}$$

unde θ^0 şi σ_{33}^0 sînt funcţii numai de coordonatele x_1 şi x_2.

Introducînd expresiile lui ε_{33}, θ şi σ_{33}, din relaţiile (11), (14) şi (15) respectiv, în prima şi a treia ecuaţie a sistemului (10) obţinem

$$\begin{cases} \Theta = 2(\lambda + \mu)\theta^0 + \lambda(\beta z + \beta\bar z + 2\beta_0), \\ \sigma_{33}^0 = \lambda\theta^0 + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(\beta z + \beta\bar z + 2\beta_0). \end{cases} \tag{16}$$

Ecuaţiile (7') şi (14) dau

$$2\theta^0_{z\bar z} + \varphi_{\bar z\bar z} + \overline{\varphi}_{zz} = 0, \tag{17}$$

cu condiţia

$$((\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0)\nu)_{z\bar z} = 0. \tag{18}$$

Ecuaţia (8') se reduce la

$$(\psi_{\bar z} - \overline{\psi}_{z})_{\bar z} = \frac{1}{2}(\theta_{\bar z})_{,3}. \tag{19}$$

Ţinînd seama de (12), ecuaţia (19) dă

$$\psi_{\bar z} - \overline{\psi}_{z} = -\frac{1}{2}\nu(\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0) + A(z), \tag{20}$$

$A(z)$ fiind o funcţie olomorfă necunoscută.

Din ultima ecuaţie deducem

$$A(z) + \overline{A(z)} = \nu(\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + 2\alpha_0), \tag{21}$$

prin urmare, membrul secund al acestei ecuaţii trebuie să fie o funcţie armonică de x_1 şi x_2, ceea ce ne conduce din nou la relaţia (18). În continuare vom presupune că funcţia ν satisface condiţia (18).

Funcţia olomorfă $A(z)$ poate fi determinată din ecuaţia (21), în expresia sa rămînînd arbitrară o constantă aditivă pur imaginară.

Din definiţia sistemului elastic antiplan, rezultă că tensiunea normală la antiplan σ_{33} ori depinde liniar de x_3, ori este independentă de x_3.

În coutinuare vom considera separat cele două cazuri posibile.

I. *Tensiunea σ_{33} depinde de x_3.* Dacă presupunem că tensiunea normală σ_{33} depinde de x_3, atunci constantele α şi α_0 nu pot fi simultan nule. Constantele α şi α_0 depind de încărcările de pe frontiera corpului elastic considerat. Noi cerem ca ecuaţia (18) să fie satisfăcută, oricare ar fi condiţiile la limită. Cu alte cuvinte, ecuaţia (18) trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi constantele α şi α_0. Se vede uşor că cerinţa anterioară este satisfăcută dacă şi numai dacă $\nu = \text{const}$.

Faptul că ν trebuie să fie constant a fost intuit de mulţi cercetători, care au lucrat în această ipoteză, însă fără a o justifica. De exemplu J. Nowinski şi S. Turski [5] motivează ipoteza $\nu = \text{const.}$, prin faptul că ν variază foarte puţin pentru multe materiale, în timp ce E are variaţii importante.

Coeficientul lui Poisson fiind presupus constant, ecuaţia (18) este satisfăcută identic. Pentru a determina funcţia olomorfă $A(z)$, observăm că ecuaţia (21) poate fi scrisă sub forma

$$A(z) - \nu(\bar{\alpha} z + \alpha_0) = -\overline{(A(z) - (\alpha \bar{z} + \alpha_0))}.$$

Deoarece membrul stîng al ecuaţiei precedente este o funcţie numai de z, iar membrul drept o funcţie de $\bar{z}$ şi membrul secund este conjugatul primului membru cu semn schimbat, deducem

$$A(z) = \nu(\bar{\alpha} z + \alpha_0) + i\gamma, \tag{22}$$

unde γ este o constantă reală necunoscută.

Observăm că ecuaţiile care leagă între ele funcţiile necunoscute se pot grupa în două sisteme şi anume

$$\begin{cases} \Phi_{\bar{z}} - \Theta_z = \bar{F}, \; 2\theta^0_{z\bar{z}} + \varphi_{z\bar{z}} + \bar{\varphi}_{zz} = 0, \\ \Phi = 2\mu\varphi, \; \Theta = 2(\lambda+\mu)\theta^0 + \lambda(\bar{\beta} z + \beta \bar{z} + 2\beta_0), \end{cases} \tag{23}$$

pot

$$\begin{cases} \Psi_{\bar{z}} + \overline{\Psi}_z = -F_3 - \frac{1}{2} E(\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + 2\alpha_0), \\ \psi_{\bar{z}} - \bar{\psi}_z = \frac{\nu}{2}(\bar{\alpha} z - \alpha \bar{z}) + i\gamma, \; \Psi = 2\mu\psi. \end{cases} \tag{24}$$

Celelalte funcţii necunoscute se exprimă prin intermediul funcţiilor care intră în sistemele precedente.

Sistemul (24) care este un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea, poate fi înlocuit printr-un sistem mai simplu. În adevăr, din ultimele două ecuaţii ale sistemului în chestiune obţinem

$$\Psi_{\bar{z}} - \overline{\Psi}_z = (\ln \mu)_{\bar{z}} \Psi - (\ln \mu)_z \overline{\Psi} + \nu\mu(\bar{\alpha} z - \alpha \bar{z}) + 2i\gamma\mu,$$

şi adunînd această ecuaţie la prima ecuaţie a sistemului (24), rezultă că acesta din urmă este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \Psi_{\bar{z}} = (\ln \sqrt{\mu})_{\bar{z}} \Psi - (\ln \sqrt{\mu})_z \overline{\Psi} - \\ \quad - \frac{\mu}{2}(\bar{\alpha} z + \alpha(1+2\nu)\bar{z} - 2i\gamma + 2(1+\nu)\alpha_0) - \frac{1}{2} F_3, \\ \Psi = 2\mu\psi. \end{cases} \tag{25}$$

Făcînd schimbarea de funcţie necunoscută

$$\Psi = -i\sqrt{\mu}\, W, \tag{26}$$

prima ecuaţie a sistemului (25) capătă forma normală

$$\begin{aligned} W_{\bar{z}} = (\ln \sqrt{\mu})_z \overline{W} - \frac{i\sqrt{\mu}}{2}(\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + 2\alpha_0 + 2\nu(\alpha \bar{z} + \alpha_0) - \\ - 2i\gamma) - \frac{i}{2\sqrt{\mu}} F_3. \end{aligned} \tag{27}$$

Ca exemplu de asemenea model elastic că considerăm problema lui Saint-Venant pentru bare cilindrice. Aceasta cuprinde întinderea, încovoierea pură, torsiunea şi încovoierea de către o forţă transversală a unei bare cilindrice solicitată numai pe capete. Presupunînd

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \; F = 0, \; F_3 = 0,$$

obţinem următorul sistem de ecuaţii

$$W_{\bar{z}} = (\ln \sqrt{\mu})_z \overline{W} - \frac{i\sqrt{\mu}}{2}(\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + 2\alpha_0 + 2\nu(\alpha \bar{z} + \alpha_0) - 2i\gamma), \tag{28}$$

$$\begin{cases} \Psi = -i\sqrt{\mu}\, W, \; \Psi = 2\mu\varphi, \; 0 = -2\nu\varepsilon_{33}, \; \sigma_{33} = E\varepsilon_{33}, \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{2}((\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + 2\alpha_0) x_3 + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + 2\beta_0), \end{cases} \tag{29}$$

la care mai trebuie să adăugăm condiţiile la limită.

II. *Tensiunea σ_{33} nu depinde de x_3.* În cazul cînd componenta normală a tensiunii este independentă de x_3, după definiţia dată în prima parte

a acestei lucrări rezultă că sistemul elastic este plan. Din expresia (15) a lui σ_{33} deducem

$$\alpha = 0, \quad \alpha_0 = 0. \tag{30}$$

Acum ecuația (18) este satisfăcută în mod identic oricare ar fi funcția ν din clasa de funcții specificată la începutul acestui paragraf.

Din ecuațiile (21) și (30) obținem

$$A(z) = i\gamma, \tag{31}$$

unde γ este o constantă reală necunoscută.

Ecuațiile corespunzătoare acestui caz pot fi grupate de asemenea în două sisteme. Avem

$$\begin{cases} \Phi_{\bar z} - \Theta_z = \bar F, \; 2\theta_{z\bar z} + \varphi_{z\bar z} + \bar\varphi_{zz} = 0, \\ \Phi = 2\mu\varphi, \; \Theta = 2(\lambda + \mu)\theta + \lambda(\bar\beta z + \beta\bar z + 2\beta_0), \\ \sigma_{33} = \sigma_{33}^0 = \lambda\theta + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(\bar\beta z + \beta\bar z + 2\beta_0), \\ \theta = \theta^0, \; \varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(\bar\beta z + \beta\bar z + 2\beta_0) \end{cases} \tag{32}$$

și

$$\Psi_{\bar z} + \bar\Psi_z = -F_3, \quad \psi_{\bar z} - \bar\psi_z = i\gamma, \quad \Psi = 2\mu\psi. \tag{33}$$

La ecuațiile (32) și (33) va trebui să mai adăugăm și condițiile la limită pentru funcțiile necunoscute.

Este ușor de văzut că sistemul (33) este echivalent cu următorul

$$\Psi_{\bar z} = (\ln\sqrt{\mu})_{\bar z}\Psi - (\ln\sqrt{\mu})_z\bar\Psi + i\gamma\mu - \frac{1}{2}F_3, \quad \Psi = 2\mu\psi. \tag{34}$$

Cu ajutorul schimbării de funcție (26), prima ecuație din (34) devine

$$W_{\bar z} = (\ln\sqrt{\mu})_z\bar W - \gamma\sqrt{\mu} - \frac{i}{2\sqrt{\mu}}F_3. \tag{35}$$

Să indicăm acum două probleme importante care sînt cazuri particulare ale modelului considerat.

1°. *Torsiunea barelor cilindrice.* În cazul acesta facem următoarele ipoteze

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0, \quad F = 0, \quad F_3 = 0 \tag{36}$$

și obținem

$$\begin{cases} W_{\bar z} = (\ln\sqrt{\mu})_z W - \gamma\sqrt{\mu}, \; \Psi = -i\sqrt{\mu}\,W, \; \Psi = 2\mu\psi, \\ \beta = 0, \; \beta_0 = 0. \end{cases} \tag{37}$$

2°. *Deformarea plană.* Dacă presupunem

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0, \quad F_3 = 0. \tag{38}$$

atunci $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\beta_0 = 0$ și obținem următorul sistem de ecuații

$$\begin{cases} \Phi_{\bar z} - \Theta_z = \bar F, \; 2\theta_{z\bar z} + \varphi_{z\bar z} + \bar\varphi_{zz} = 0, \\ \Theta = 2(\lambda + \mu)\theta, \; \Phi = 2\mu\varphi, \; \sigma_{33} = \lambda\theta, \; \theta = \theta^0. \end{cases} \tag{39}$$

3. Sisteme elastice antiplane neomogene monotrope

Considerăm cazul cînd sistemul elastic antiplan neomogen este monotrop sau transversal-izotrop, planul de izotropie coincizînd cu antiplanul sistemului. Presupunem că cei cinci coeficienți de elasticitate ai materialului sînt de clasă $C^2(\Omega)$.

Legea lui Hooke pentru medii elastice monotrope se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} \Theta = (c_{11} + c_{12})\theta + 2c_{13}\varepsilon_{33}, \; \Phi = (c_{11} - c_{12})\varphi, \\ \sigma_{33} = c_{13}\theta + c_{33}\varepsilon_{33}, \; \Psi = c_{44}\psi. \end{cases} \tag{40}$$

Pentru ε_{33} se obține aceeași expresie (11). Avînd în vedere expresia lui ε_{33}, din (40) obținem

$$\theta_3 = -\frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12}}(\bar\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0), \tag{41}$$

$$\sigma_{33,3} = \frac{(c_{11} + c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2}{2(c_{11} + c_{12})}(\bar\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0). \tag{42}$$

Ecuațiile precedente dau

$$\theta = \theta^0 - \frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12}}(\bar\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0)x_3, \tag{43}$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^0 + \frac{(c_{11} + c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2}{2(c_{11} + c_{12})}(\bar\alpha z + \alpha\bar z + 2\alpha_0)x_3, \tag{44}$$

unde funcțiile θ^0 și σ_{33}^0 sînt independente de x_3.

La fel ca în cazul izotrop obținem relațiile

$$\begin{cases} \Theta = (c_{11} + c_{12})\theta^0 + c_{13}(\bar\beta z + \beta\bar z + 2\beta_0), \\ \sigma_{33}^0 = c_{11}\theta^0 + \frac{1}{2}c_{33}(\bar\beta z + \beta\bar z + 2\beta_0). \end{cases} \tag{45}$$

Ecuaţia (17) îşi menţine valabilitatea şi în acest caz, iar în locul condiţiei (18) obţinem

$$\left((\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0)\frac{c_{13}}{c_{11}+c_{12}}\right)_{\bar{z}\bar{z}} = 0. \tag{46}$$

Analoga ecuaţiei (20) este

$$\psi_{\bar{z}} - \bar{\psi}_z = -\frac{c_{13}}{2(c_{11}+c_{12})}(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0) + A(z), \tag{47}$$

unde $A(z)$ est o funcţie olomorfă.

Din ecuaţia (47) deducem

$$A(z) + \overline{A(z)} = \frac{c_{13}}{c_{11}+c_{12}}(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0) \tag{48}$$

şi deoarece membru secund al acestei ecuaţii trebuie să fie o funcţie armonică de x_1 şi x_2 ca şi membrul stîng, reobţinem condiţia (46).

Distingem şi aici două cazuri la fel ca şi în cazul izotrop.

I. *Tensinnea* σ_{33} *depinde de* x_3. Raţonînd ca şi în cazul izotrop rezultă că trebuie să avem

$$\frac{c_{13}}{c_{11}+c_{12}} = \text{const.}$$

Ecuaţiile corespunzătoare acestui caz pot fi grupate de asemenea în două sisteme. Pentru simplitate vom scrie numai corespunzătorul sistemului (25)

$$\begin{cases} \Psi_{\bar{z}} = (\ln\sqrt{c_{44}})_{\bar{z}}\Psi(\ln\sqrt{c_{44}})_z\bar{\Psi} - \\ -\dfrac{(c_{11}+c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2}{4(c_{11}+c_{12})}(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0) + \\ +\dfrac{c_{13}c_{44}}{4(c_{11}+c_{12})}(\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z}) + \dfrac{i\gamma}{2}c_{44} - \dfrac{1}{2}F_3, \\ \Psi = c_{44}\psi. \end{cases} \tag{49}$$

Făcînd schimbarea de funcţie necunoscută

$$\Psi = -i\sqrt{c_{44}}\,W, \tag{50}$$

prima ecuaţie a sistemului precedent se reduce la forma normală

$$W_{\bar{z}} = (\ln\sqrt{c_{44}})_{\bar{z}}W - i\frac{(c_{11}+c_{12})c_{33} - 2c_{13}^2}{4\sqrt{c_{44}}(c_{11}+c_{12})}(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0) + \tag{51}$$

$$+ i\frac{c_{13}\sqrt{c_{44}}}{4(c_{11}+c_{12})}(\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z}) - \frac{\gamma\sqrt{c_{44}}}{2} - \frac{iF_3}{2\sqrt{c_{44}}}. \tag{51}$$

Nu este greu să scriem ecuaţiile corespunzătoare problemei lui Saint-Venant pentru o bară cilindrică.

II. *Tensiunea* σ_{33} *nu depinde de* x_3. Deoarece în cazul acesta constantele α şi α_0 sînt nule, sistemul de ecuaţii se simplifică corespunzător. Nu vom scrie aici toate ecuaţiile respective, ci ne vom limita la a scrie numai corespunzătoarea ecuaţiei (35)

$$W_{\bar{z}} = (\ln\sqrt{c_{44}})_{\bar{z}}W - \frac{1}{2}\gamma\sqrt{c_{44}} - \frac{i}{2\sqrt{c_{44}}}F_3. \tag{52}$$

De asemenea putem scrie sistemele de ecuaţii corespunzătoare problemei torsiunii unei bare cilindrice şi ale problemei deformării plane.

Observăm că, din punct de vedere matematic, ecuaţiile obţinute pentru sisteme elastice antiplane monotrope nu comportă dificultăţi în plus faţă de acelea pentru sistemele elastice antiplane izotrope.

4. Sisteme elastice antiplane neomogene incompresibile

Considerăm un sistem elastic antiplan neomogen incompresibil. Aceasta înseamnă că dilataţia este nulă,

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0, \tag{53}$$

sau ţinînd seama de notaţiile (6)

$$0 + \varepsilon_{33} = 0. \tag{53'}$$

Pentru simplificarea expunerii vom considera numai cazul unui corp izotrop. Dacă mediul elastic izotrop este incompresibil, legea lui Hooke nu mai are forma (10). Deoarece am adăugat o ecuaţie care conţine unele dintre funcţiile necunoscute, trebuie să mai introducem o funcţie necunoscută pentru ca sistemul de ecuaţii obţinut să fie compatibil.

Pornind de la expresia energiei potenţiale de deformare pentru medii elastice izotrope, care în ipoteza incompresibilităţii se scrie

$$V = \mu(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2(\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{12}^2)) \tag{54}$$

şi calculînd variaţia acesteia, obţinem

$$\begin{aligned} dV = 2\mu(&\varepsilon_{11}d\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}d\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}d\varepsilon_{33} + \\ &+ 2(\varepsilon_{23}d\varepsilon_{23} + \varepsilon_{31}d_{31} + \varepsilon_{12}d\varepsilon_{12})). \end{aligned} \tag{55}$$

Pe de altă parte, variaţia energiei potenţiale de deformare are expresia

$$dV = \sigma_{11}\, d\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\, d\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\, d\varepsilon_{33} + 2\sigma_{23}\, d\varepsilon_{23}\, d\varepsilon_{23} + 2\sigma_{31}\, d\varepsilon_{31} + 2\sigma_{12}\, d\varepsilon_{12}. \tag{56}$$

Variațiile deformărilor $d\varepsilon_{11}$, $d\varepsilon_{22}$, $d\varepsilon_{33}$ nu sînt independente, deoarece ele trebuie să satisfacă consecința diferențială a ecuației (53)

$$d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} = 0. \tag{57}$$

Expresiile (55) și (56) sînt echivalente în baza relației (57).

Folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange, din ecuațiile (55), (56) și (57) deducem legea lui Hooke pentru medii elastice izotrope incompresibile

$$\sigma_{ij} = p\,\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij},\quad \theta + \varepsilon_{33} = 0,\quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{58}$$

unde p este o funcție necunoscută (multiplicatorul) care poate depinde liniar de x_3.

Cu ajutorul notațiilor (3) și (6), ecuațiile (58) capătă forma

$$\begin{cases} \Theta = 2p + 2\mu\theta, & \Phi = 2\mu\varphi. \\ \sigma_{33} = p - 2\mu\theta, & \Psi = 2\mu\psi, \quad \theta + \varepsilon_{33} = 0. \end{cases} \tag{59}$$

Deoarece ε_{33} are tot expresia (11) și în cazul de față, din ecuațiile precedente rezultă

$$\theta = -\frac{1}{2}\left((\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0)\,x_3 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + 2\beta_0\right), \tag{60}$$

$$\begin{cases} p_{,3} = \dfrac{1}{2}\,\mu\,(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0), \\[2ex] \sigma_{33,3} = \dfrac{3}{2}\,\mu\,(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0). \end{cases} \tag{61}$$

Din (61) găsim

$$\begin{cases} p = p^0 + \dfrac{1}{2}\,\mu\,(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0)\,x_3, \\[2ex] \sigma_{33} = \sigma_{33}^0 + \dfrac{3}{2}\,\mu\,(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0)\,x_3, \end{cases} \tag{62}$$

unde p^0 și σ_{33}^0 sînt două funcții necunoscute independente de x_3.

Ecuațiile (59), (60) și (62) dau

$$\begin{cases} \Theta = 2p^0 - \mu\,(\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + 2\beta_0), \\ \sigma_{33}^0 = p^0 + \mu\,(\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + 2\beta_0). \end{cases} \tag{63}$$

Ecuația (17) devine

$$\varphi_{zz} + \bar{\varphi}_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \tag{64}$$

iar ecuația (19) capătă forma

$$(\psi_z - \bar{\psi}_{\bar{z}})_{\bar{z}} = -\frac{\alpha}{4}. \tag{65}$$

Ultima ecuație dă

$$\psi_z - \bar{\psi} = A(z) - \frac{1}{2}\,\alpha\bar{z}, \tag{66}$$

unde $A(z)$ este o funcție olomorfă.

Din ecuația (66) rezultă

$$A(z) + \overline{A(z)} = \frac{1}{4}\,(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}),$$

de unde găsim

$$A(z) = \frac{1}{4}\,\bar{\alpha}z + i\gamma, \tag{67}$$

γ fiind o constantă reală.

Avînd în vedere (67), ecuația (66) devine

$$\psi_z - \bar{\psi}_{\bar{z}} = \frac{1}{4}\,(\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z}) + i\gamma. \tag{68}$$

A doua ecuație a sistemului (5) se scrie

$$\Psi_{\bar{z}} + \bar{\Psi}_z = -F_3 - \frac{3}{2}\,\mu\,(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0). \tag{60}$$

Ecuațiile (68) și (69), împreună cu a doua ecuație a sistemului (59) dau

$$\Psi_{\bar{z}} = (\ln\sqrt{\mu})_{\bar{z}}\,\Psi - (\ln\sqrt{\mu})_z\,\bar{\Psi} - \frac{1}{2}\,\mu\,(\bar{\alpha}z + 2\alpha\bar{z} + 3\alpha_0 - 2i\gamma) - \frac{1}{2}\,F_3. \tag{70}$$

Cu ajutorul schimbării de funcție (26), ecuația precedentă devine

$$W_{\bar{z}} = (\ln\sqrt{\mu})_{\bar{z}}\,\bar{W} - \frac{i}{2}\sqrt{\mu}\,(\bar{\alpha}z + 2\alpha\bar{z} + 3\alpha_0 - 2i\gamma) - \frac{i}{2\sqrt{\mu}}\,F_3. \tag{71}$$

O problemă deja cunoscută care face parte din acest model elastic este problema torsiunii unei bare cilindrice. Presupunînd

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0,\quad F = 0,\quad F_3 = 0,$$

din ecuaţiile anterioare regăsim ecuaţiile (37) deduse în cazul torsiunii.

Ca probleme noi ale acestui model elastic vom considera problema lui Saint-Venant şi problema deformării plane.

1⁰. *Problema lui Saint-Venant.* Presupunînd

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \quad F = 0, \quad F_3 = 0,$$

obţinem sistemul de ecuaţii

$$(72) \quad \begin{cases} \theta = -\frac{1}{2}((\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 2\alpha_0)x_3 + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + 2\beta), \\ \varepsilon_{33} = -\theta, \; p = -\mu\theta, \; \sigma_{33} = 3p, \; \Psi = 2\mu\psi, \; \Psi = -i\sqrt{\mu}\, W, \\ W_{\bar{z}} = (\ln\sqrt{\mu})_{\bar{z}}\, \overline{W} - \frac{i}{2}\sqrt{\mu}\,(\bar{\alpha}z + 2\alpha\bar{z} + 3\alpha_0 - 2i\gamma). \end{cases}$$

Rămîne de văzut dacă problema la limită corespunzătoare are soluţie.

2⁰. *Deformare plană.* Avînd în vedere (38), obţinem sistemul

$$(73) \quad \begin{cases} \Phi_{\bar{z}} - \Theta_{\bar{z}} = \bar{F}, \; \varphi_{\bar{z}\bar{z}} + \bar{\varphi}_{zz} = 0, \; \gamma = 0, \\ \theta = 0, \; \Theta = 2p, \; p = p^0, \; \sigma_{33} = p. \end{cases}$$

Observaţie. În această lucrare ne-am ocupat numai cu definirea sistemelor elastice antiplane neomogene şi cu stabilirea ecuaţiilor generale ale lor. Pentru a sublinia importanţa acestui model am pus în evidenţă unele probleme particulare. Urmează ca în lucrări ulterioare să ne ocupăm cu studiul problemelor la limită pentru unele sisteme elastice antiplane neomogene.

BIBLIOGRAFIE

1. Filon L. N. G. — *On antiplane stress in an elastic solid.* Proc. Roy. Soc. (A) 1937, 160, p. 137–154.
2. Milne–Thomson L. M — *Plane elastic systems.* Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, 1960.
3. Milne–Thomson L. M. — *Antiplane elastic systems.* Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, 1962.
4. Мусхелишвили Н. И. — *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Москва, 1966.
5. Nowinski J., Turski S. — *Z teorii sprezystobci cializotropowych niejednorodnych.* Arch. Mec. Stos., 1953, 5, Nr. 1, p. 67–88.
6. Nowinski J., Turski S. — *Studium nad stanami naprezenia w cialach sprezstych niejednorodnych.* Arch. Mech. Stos., 1953, 5, Nr. 3, p. 397–414.

SYSTÈMES ÉLASTIQUES ANTIPLANS NON-HOMOGÈNES

Résumé

En utilisant la définition de L. M. Milne-Thomson pour les systèmes antiplans homogènes, l'auteur définit les systèmes élastiques antiplans non-homogènes. Un corps matériel est un système élastique antiplan non-homogène, s'il existe un plan π avec les propriétés suivantes:

1⁰. Les composantes de la tension ne dépendent pas de la distance au plan π, à l'exception éventuelle de la composante normale sur π.

2⁰. La force de masse et les coefficients d'élasticité du matériel ne dépendent pas de la distance au plan π.

On établit les équations générales des systèmes élastiques antiplans non-homogènes dans les cas isotrope, monotrope et isotrope incompressible. On étudie le problème de compatibilité des systèmes élastiques antiplans à non-homogénéité continue avec les équations d'élasticité. L'auteur obtient ainsi les équations de quelques problèmes particuliers importants.