33. *Observații asupra teoriei tensoriale a rețelelor de pe o suprafață*. Ibid., 2 (1951), p. 1—41.
34. *Curs de geometrie analitică*. Ed. tehnică, Buc. 1951 (în colaborare). Cap. VI, VII.
35. *Familii R de curbe pe suprafețe riglate*. Stud. și cerc. șt. Iași, t. V (1954), p. 13—47.
36. *Familii R de suprafețe transversale în congruențele de drepte*. Stud. și cerc. șt. Iași, VI (1955), p. 69—89.
37. *Geometrii cu grup fundamental și cercetările Școlii din Iași*. Lucrările Consfătuirii de Geometrie diferențială de la Timișoara, 9—12 iunie 1955, p. 31.
38. *Familii R de suprafețe transversale în congruențe de drepte din spațiul euclidian*. Revista Univ. „Al. I. Cuza" și a Inst. polit. Iași, t. II (1955), p. 25—42.
39. *Suprafețe aplicabile în geometria centro-afină hiperbolică*. An. șt. Univ. Iași, t. I (1955), p. 137—164.
40. *Observații asupra sistemelor triplu conjugate*. An. șt. Univ. Iași, t. III (1957), p. 183—195.
41. *Asupra unor sisteme triplu conjugate speciale*. Stud. și cerc. șt. Iași, t. IX (1958), p. 113—224.
42. *Sur les surfaces réglées de Peterson*. Bull. math. de la Soc. Sci. Math. Phys. II (50), (1958), p. 61—74.
43. *Despre sistemele triplu conjugate cu invarianți egali*. Stud. și cerc. șt. Iași, t. X (1959), p. 277—283.
44. *Familii R de transversale în varietăți de drepte*. Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie, ținută la Iași, 2—5 iunie 1958.
45. *Despre fascicule de congruențe de drepte*. Stud. și cerc. șt. Iași, t. XII (1961), p. 53—69.
46. *Transformări infinitezimale ale suprafețelor în spațiul proiectiv*. Ibidem, t. XIII (1962), p. 87—107.
47. *Les surfaces à groupes continus de transformations projectives-conformes en elles-mêmes*. (În colaborare cu F. Marcus). An. șt. Univ. Iași, t. IX (1963), p. 387—408.
48. *Observații asupra grilelor lui B. Segre*. Stud. și cerc. șt. Iași, t. XIV (1963), p. 291—311.
49. *Sur les similitudes projectives*. An. șt. Univ. Iași, t. X (1964), p. 351—376.
50. *Transformări infinitezimale ale suprafețelor în spațiul centro-afin hiperbolic*. Ibid. T. XI (1965), p. 108—132.
51. *La détermination des surfaces R projectivement applicables sur leurs transformées F*. Ibid., t. XII (1966), p. 74—84.

SUR LES OPÉRATEURS QUADRATIQUES DANS LES ESPACES LINÉAIRES

PAR

I. CREANGĂ

Communication présentée à la session scientifique de l'Académie de la République Socialiste România, 21—25 septembre 1966

1. On désigne par opérateur quadratique, dans un espace linéaire R_n à n dimensions, l'opérateur qui, dans une base $\{e_i\}$, a comme coordonnées des formes quadratiques, c'est-à-dire:

$$F(x) = \frac{1}{2} A^k (xx) e_k \quad (k = 1,2,\ldots,n), \tag{1}$$

ou

$$F(x) = \frac{1}{2} \alpha^k_{ij} \xi^i \xi^j e_k \quad (i,j,k = 1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

avec

$$A^k(xx) = \frac{1}{2} \alpha^k_{ij} \xi^i \xi^j; \quad x = \xi^i e_i. \tag{3}$$

Les coefficients $\frac{1}{2}\alpha^k_{ij}$ forment un tenseur deux fois covariant et une fois contravariant par rapport aux changements de la base. On considère le tenseur α^k_{ij} symétrique en les indices d'en bas.

Les vecteurs et les valeurs caractéristiques de l'opérateur sont définis analoguement à l'opérateur linéaire:

$$F(x) = \lambda x. \tag{4}$$

On trouve les vecteurs caractéristiques et leurs valeurs propres correspondantes par le système:

$$(\alpha^h_{ij}\,\xi^k - \alpha^k_{ij}\,\xi^h)\,\xi^i\,\xi^j = 0,$$

(5) $$\frac{\alpha^k_{ij}\,\xi^i\,\xi^j}{\xi^k} = \lambda,$$

$$(h, k = 1,2,\ldots,n;\ h \neq k).$$

Ces équations sont les même que celles qui donnent les directions caractéristiques pour les correspondances ponctuelles entre deux espaces affines. Il y a, au plus, $2^n - 1$ directions caractéristiques.

Dans les espaces euclidiens, on peut attacher à l'opérateur quadratique $F(x)$ n paires d'opérateurs linéaires $A^k(x)$ ou $A^{*k}(x)$, adjoints deux à deux, par les relations:

(6) $$A^k(xx) = (A^k x, x) = (x, A^{*k} x)$$

et

(7) $$F(x) = \frac{1}{2}(A^k x, x)\,e_k = \frac{1}{2}(x, A^{*k} x)\,e_k.$$

Si les opérateurs linéaires sont donnés par:

(8) $$A^k e_i = \alpha^{kj}_i\, e_j,$$

on a les relations:

(9) $$\alpha^k_{ih} = g_{jh}\,\alpha^{kj}_i,$$

où

$$g_{jh} = (e_j, e_h).$$

Inversement, une suite de n opérateurs linéaires $A^k(x)$ donnent naissance à un opérateur quadratique par la construction précédente. Les propriétés de l'opérateur $F(x)$ se reflètent dans cette suite d'opérateurs $A^k(x)$ et réciproquement. En particulier on peut trouver la liaison entre les valeurs propres de ces opérateurs.

2. Étant donné l'opérateur quadratique $F(x)$, on considère le vecteur:

(10) $$x \circ y = F(x+y) - F(x) - F(y) = \alpha^k_{ij}\,\xi^i\,\eta^j\,e_k.$$

Nous prendrons cette expression pour produit interne entre deux vecteurs x, y de l'espace R_n, en transformant ainsi l'espace vectoriel en une algèbre A_F. L'algèbre A_F est commutative et distributive; elle est aussi associative si entre les composantes α^k_{ij}, on donne les relations de structure:

(11) $$\alpha^k_{ir}\,\alpha^i_{st} - \alpha^k_{is}\,\alpha^i_{rt} = 0.$$

Par exemple, pour $n = 2$ de l'opérateur:

„Al. Myller"

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[(\xi^1)^2 - (\xi^2)^2\right] e_1 + \xi^1\,\xi^2\,e_2,$$

on obtient l'algèbre complexe, dans le domaine réel.

Inversement, étant donnée une algèbre commutative, distributive et associative d'ordre fini: $x \circ y = \alpha^k_{ij}\,\xi^i\,\eta^j\,e_k$, on peut lui attacher l'opérateur quadratique; $x \circ x = (1/2)\,\alpha^k_{ij}\,\xi^i\,\xi^j\,e_k = F(x)$.

Nous chercherons ici seulement les conditions de l'annulation du produit $x \circ y$.

La condition:

(12) $$x \circ y = 0$$

conduit au système:

(13) $$\alpha^k_{ij}\,\xi^i\,\eta^j = 0. \quad (k = 1,2,\ldots,n).$$

Soit x fixé; alors (13) est un système linéaire pour les coordonnées de y. On doit avoir:

(14) $$\det\left|\alpha^k_{ij}\,\xi^i\right| = 0.$$

Si pour des valeurs ξ^i qui satisfont à (14), la matrice $(\alpha^k_{ij}\,\xi^i)^k_j$ a le rang r, alors, dans le cas des algèbres associatives, l'ensemble des annulateurs de x est un idéal de dimension $n - r$.

En utilisant les représentations géométriques dans un espace projectif à $n-1$ dimensions, les équations (13) représentent les hyperplans polaires du point x par rapport aux hyperquadriques: $\alpha^k_{ij}\,\xi^i\,\xi^j = 0$. L'équation (14) exprime la condition pour que ces hyperplans polaires soient incidents suivant une variété linéaire.

On peut interpréter aussi les résultats précédents dans l'espace affine. On considère les cônes $\alpha^k_{ij}\,\xi^i\,\xi^j = 0$; les équations $\alpha^k_{ij}\,\xi^i\,\eta^j = 0$ sont des hyperplans polaires de la direction $\{\xi^i\}$ par rapport aux cônes précédents; (14) exprime de même la condition d'intersection de tous ces hyperplans.

Ainsi le problème de trouver les annulateurs d'un produit $x \circ y$ peut se traduire en un problème de géométrie projective ou affine. Par exemple, pour le cas $n = 3$, le problème précédent est équivalent au problème: étant données trois coniques, on demande le lieu géometrique des points dont les polaires par rapport aux trois coniques ont, au moins, un point commun. Dans ce cas le lieu est une cubique, à savoir:

(15) $$\begin{vmatrix} \alpha^1_{11}\,\xi^1 + \alpha^1_{12}\,\xi^2 + \alpha^1_{13}\,\xi^3 & \alpha^2_{11}\,\xi^1 + \alpha^2_{12}\,\xi^2 + \alpha^2_{13}\,\xi^3 & \alpha^3_{11}\,\xi^1 + \alpha^3_{12}\,\xi^2 + \alpha^3_{13}\,\xi^3 \\ \alpha^1_{21}\,\xi^1 + \alpha^1_{22}\,\xi^2 + \alpha^1_{23}\,\xi^3 & \alpha^2_{21}\,\xi^1 + \alpha^2_{22}\,\xi^2 + \alpha^2_{23}\,\xi^3 & \alpha^3_{21}\,\xi^1 + \alpha^3_{22}\,\xi^2 + \alpha^3_{23}\,\xi^3 \\ \alpha^1_{31}\,\xi^1 + \alpha^1_{32}\,\xi^2 + \alpha^1_{33}\,\xi^3 & \alpha^2_{31}\,\xi^1 + \alpha^2_{32}\,\xi^2 + \alpha^2_{33}\,\xi^3 & \alpha^3_{31}\,\xi^1 + \alpha^3_{32}\,\xi^2 + \alpha^3_{33}\,\xi^3 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut changer le repère de telle manière que la cubique (15) prenne une forme canonique.

On peut faire aussi une classification des opérateurs quadratiques, de même que pour les correspondances ponctuelles selon les divers cas de la forme de la cubique (15). Pour le cas $n = 2$, cette classification est déjà donnée dans un travail précédent.

BIBLIOGRAPHIE

1. Creangă I. — *Asupra unor elemente invariante ale corespondenţelor punctuale între două spaţii afine.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. VI (1960), p. 643.
2. Creangă I. — *Sur une classification des correspondances ponctuelles entre deux plans.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. X (1964), p. 121.
3. Creangă I. — *Sur une algèbre attachée à un opérateur dans un espace linéaire.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. XI (1965), p. 21.

ASUPRA OPERATORILOR PĂTRATICI ÎNTR-UN SPAŢIU LINIAR

Rezumat

Se consideră operatori dintr-un spaţiu liniar R_n cu n dimensiuni, care au drept coordonate, într-o bază, forme pătratice; aceşti operatori sînt numiţi operatori pătratici. Se determină valorile caracteristice şi vectorii caracteristici (4), (5). Se ataşează acestor operatori funcţia vectorială biliniară: $x \circ y = F(x + y) - F(x) - F(y)$, care transformă spaţiul vectorial R_n într-o algebră A_n care este asociativă dacă coeficienţii formelor pătratice satisfac relaţiile de structură (11). Se cercetează divizorii lui zero în aceste algebre. Se dau interpretări geometrice şi se exemplifică în cazul spaţiului cu trei dimensiuni.

QUASIGROUPES DE CARDOSO ET PSEUDOGROUPES DE ZELMER

PAR

A. SADE (France)

1. Introduction. La notion de *quasigroupe soustractif*, rencontrée aussi par Whittaker [18] et Furstenberg [6] sous le nom de *demigroupe*, Sholander [17], Cordeiro de Silva [5], Kazim-Husain [7], Morgado [8], [9], est définie par Cardoso [2], comme satisfaisant aux axiomes suivants. Si $Q = E(\,)$,

(1) $\forall a \in E,\ \exists e,\ ae = a$, (unité à droite),

(2) $\forall a, b, c \in E,\ (ab)c = (ac)b$, (permutabilité à droite),

(3) $\forall a, b, c \in E,\ a(bc) = c(ba)$, (loi de Grassmann),

(4) $\forall a \in E,\ aa = e$, (unipotence).

Un *pseudogroupe* de Zelmer [19], [20], [21], est un système multiplicatif, $S = E(\,)$, satisfaisant aux axiomes

(5) $\forall a \in E,\ \exists! e,\ ae = a$, (unicité de l'élément neutre à droite),

(2) $\forall a, b, c \in E,\ (ab)c = (ac)b$, (permutabilité à droite),

(6) $\forall a, b, c \in E,\ a(bc) = [(ab)c]c$, (loi de Zelmer),

(7) $\forall a \in E,\ \exists a' \in E,\ aa' = e$, (existence d'un inverse à droite).

Un *quasigroupe* de Cardoso, [3], [4], est un groupoïde $K = E(\,)$ satisfaisant les axiomes

(1) $\forall a \in E,\ \exists e,\ ae = a$ (neutre à droite),

(8) $\forall a, b \in E,\ ax = b \rightleftarrows (eb)(ea) = x$, (quotient unique à droite),

(9) $\forall a, b \in E,\ ya = b \rightleftarrows b(ea) = y$, (unicité du quotient à gauche).

Toutes ces structures sont en connexion avec des structures connues, (groupes, [9], quasigroupes de Bruck à *propriété inverse*, [15], *quasigroupes demi-symétriques* (*A-Map* s'ils sont idempotents), introduits par l'auteur, [10], [11]).