ASUPRA TEORIEI TERMOELASTICITĂŢII NELINIARE

DE

D. IEŞAN

În [1], O. W. Dilon studiază problema tensiunilor termice în corpuri izotrope în cazul cînd relaţiile tensiuni-deformări sînt neliniare. Relaţiile deformări-deplasări sînt presupuse liniare iar legea de propagare este legea lui Fourier. Un studiu al efectelor de ordinul al doilea în termoelasticitate a fost făcut în [3].

În această Notă vom extinde în teoria deformaţiilor termoelastice finite, teorema lui Rivlin şi Topakoglu [6] precum şi cîteva rezultate în legătură cu metoda aproximaţiilor succesive prezentate în [2].

1. Notaţii şi formule

Considerăm mediul elastic, omogen în stare nedeformată, raportat la un sistem de coordonate rectangulare carteziene astfel că un punct din corp are înainte şi după deformare coordonatele x_i şi y_i, respectiv, faţă de acelaşi reper. În cele ce urmează vom folosi notaţii şi formule din [2]. Fie 0^i un sistem de coordonate curbilinii materiale. Vectorii bază şi tensorii metrici asociaţi cu coordonatele 0^i în corpul nedeformat sînt $\mathbf{g}_i$, $\mathbf{g}^i$ şi g_{ij}, g^{ij} respectiv, iar mărimile corespunzătoare în corpul deformat sînt $\mathbf{G}_i$, $\mathbf{G}^i$ şi G_{ij}, G^{ij}. Vectorul deplasare $\mathbf{u}$ se poate scrie

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = u_i \mathbf{g}^i = U^i \mathbf{G}_i = U_i \mathbf{G}^i, \tag{1.1}$$

iar tensorul de deformare este

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i + u^r|_i u_r|_j) = \\ &= \frac{1}{2}(U_i//_j + U_j//_i - U_r//_i U_r//_j), \end{aligned} \tag{1.2}$$

unde prin o linie s-a notat derivarea covariantă în raport cu 0 folosind

tensorii metrici g_{ij}, g^{ij} iar prin două linii-derivarea covariantă folosind tensorii metrici G_{ij}, G^{ij}.

Dacă coordonatele θ^i coincid cu x^i, atunci notăm γ_{ij} prin e_{ij}, astfel că

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_r}{\partial x_i}\frac{\partial u_r}{\partial x_j}\right) \tag{1.3}$$

Vectorii tensiune $\mathbf{t}_i$, măsuraţi pe unitatea de arie a corpului deformat, ce acţionează pe suprafeţele θ^i sînt daţi prin

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}_i \sqrt{G^{ii}} = \tau^{ij}\mathbf{G}_j = \pi^{ij}\mathbf{g}_j, \\ &\tau^{ij} = \tau^{ji}, \quad \pi^{ij} = \tau^{ir}(\delta^j_r + u^j/_r). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Vectorul tensiune $\mathbf{t}$, pe unitatea de arie a corpului deformat, ce acţionează pe suprafaţa cu normală unitară $\mathbf{n}$, este

$$\mathbf{t} = n_i \tau^{ij}\mathbf{G}_j = n_i \pi^{ij}\mathbf{g}_j, \qquad \mathbf{n} = n_i \mathbf{G}^i = n^i \mathbf{G}_i. \tag{1.5}$$

Vectorii tensiune ${}_0\mathbf{t}_i$, măsuraţi pe unitatea de arie a corpului nedeformat, asociaţi cu suprafeţele θ^i din corpul deformat şi vectorul tensiune ${}_0\mathbf{t}$, pe unitatea de arie a corpului nedeformat, asociat cu suprafaţa din corpul deformat a cărei normală în starea nedeformată este ${}_0\mathbf{n}$, sînt daţi prin

$$\begin{aligned} &{}_0\mathbf{t}_i \sqrt{g^{ii}} = s^{ij}\mathbf{G}_j = t^{ij}\mathbf{g}_j, \\ &s^{ij} = s^{ji}, \quad t^{ij} = s^{ir}(\delta^j_r + u^j/_r), \\ &{}_0\mathbf{t} = {}_0n_i s^{ij}\mathbf{G}_j = {}_0n_i t^{ij}\mathbf{g}_j, \quad \mathbf{n} = {}_0n_i \mathbf{g}^i = {}_0n^i \mathbf{g}_i. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Ecuaţiile de mişcare le scriem sub forma

$$t^{ij}/_j + \rho_0 F^i = \rho_0 f^i, \tag{1.7}$$

unde ρ_0 este densitatea corpului nedeformat, $\mathbf{F} = F^i\mathbf{g}_i$ este forţa masică iar $\mathbf{f} = f^i\mathbf{g}_i$ reprezintă vectorul acceleraţie.

Notînd prin $\mathbf{q}$ şi $\mathbf{Q}$ respectiv fluxul termic pe unitatea de arie a corpului nedeformat şi a celui deformat, avem [2]

$$q^i = \sqrt{I_3}\, Q^i, \quad q^i/_i = \sqrt{I_3}\, Q^i/_i, \tag{1.8}$$

unde

$$\mathbf{Q} = Q^i\mathbf{G}_i, \quad \mathbf{q} = q^i\mathbf{g}_i, \quad I_3 = \frac{G}{g}, \quad G = |G_{ij}|, \quad g = |g_{ij}|. \tag{1.9}$$

Dacă A este funcţia energie liberă a lui Helmholtz, pe unitatea de volum a corpului nedeformat, S—entropia pe unitatea de volum a corpului

nedeformat, T_0—temperatura absolută a corpului nedeformat (presupusă constantă), iar $T_0 + T$ este temperatura absolută a corpului deformat, atunci [2]

$$\tau^{ij}\sqrt{I_3} = s^{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{ji}}\right), \quad t^{ij} = \frac{\partial A}{\partial u_j/_i}, \quad S = -\frac{\partial A}{\partial T}, \tag{1.10}$$

$$(T + T_0)\frac{DS}{Dt} = W - q^i/_i, \tag{1.11}$$

unde W este cantitatea de căldură produsă de unitatea de volum a corpului nedeformat în unitatea de timp iar D/Dt reprezintă derivata în raport cu timpul t, menţinînd θ^i constante.

Dacă R_j sînt componentele vectorului $\mathbf{Q}$ faţă de sistemul rectangular cartezian, atunci [5], [2],

$$Q^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial y^s} R_s = \frac{\partial \theta^i}{\partial x_j} L_j\left(\frac{\partial T}{\partial x_m}, e_{pq}\right), \tag{1.12}$$

unde L_j sînt polinoame în $\partial T/\partial x_m$ şi e_{pq}, cu coeficienţi care sînt funcţii continue de $T_0 + T$.

2. Determinarea soluţiei în cadrul unei aproximaţii de un anumit ordin

Vom folosi pentru simplitate coordonate carteziene $(u_i = y_i - x_i)$ păstrînd, unde este mai convenabil, notaţia folosită pentru derivatele covariante. Mediul elastic este presupus omogen în stare nedeformată şi anizotrop.

Presupunînd că A este polinom în gradienţii deplasării şi temperatură (deformări şi temperatură), putem scrie:

$$A = \sum_0^\infty A_n, \tag{2.1}$$

unde A_n sînt polinoame omogene de grad n în gradienţii deplasării şi variaţia temperaturii. Vom presupune că $A = 0$ cînd corpul este nedeformat încît $A_0 = 0$. Presupunînd că tensiunile sînt zero cînd corpul este nedeformat, rezultă că în (2.1) nu avem termeni de gradul întîi în gradienţii deplasării încît

$$A = -S_0 T + \sum_2^\infty A_n, \tag{2.2}$$

unde S_0 este o constantă.

Dacă deformarea este astfel că $u_{i/j}$ este suficient de mic în comparaţie cu unitatea, T fiind de acelaşi ordin de mărime, putem aproxima A prin $-S_0 T + A_2$. Cu un grad mai înalt de exactitate putem lua $A = -S_0 + A_2 + A_3$, ş.a.m.d.

Deoarece $\sqrt{I_3}$ este funcţie continuă de e_{ij} şi presupunînd că e_{ij} sînt uniform mărginite rezultă că $\sqrt{I_3}$ poate fi aproximat printr-un polinom în e_{ij}. Din (1.8), (1.12) cu $\theta^i = x_i$, putem scrie

$$q^i = M^i\left(\frac{\partial T}{\partial x_m},\ e_{pq}\right), \tag{2.3}$$

unde M^i sînt polinoame în $\partial T/\partial x_m$ şi e_{pq} cu coeficienţi care sînt funcţii continue de $T_0 + T$. Presupunînd aceşti coeficienţi aproximaţi prin polinoame şi, deoarece cînd $\partial T/\partial x_j = 0$ fluxul este nul, avem

$$M^i = \sum_0^\infty \mathfrak{M}^i_n, \tag{2.4}$$

unde $\mathfrak{M}^i_n$ sînt polinoame de grad n în $u_p/_q$, T şi $\partial T/\partial x_m$ astfel că

$$\mathfrak{M}^i_1 = -k^{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{2.5}$$

k^{ij} fiind constante.

Corespunzător gradului de aproximaţie cu care considerăm energia liberă A, vom aproxima şi pe M^i.

Vom considera pentru simplitate cazul echilibrului termoelastic cu condiţiile pe frontieră:

$$ {}_0n_i t^{ij} = P^i, \quad {}_0n_j q^j = \Phi. \tag{2.6}$$

Luînd $A = -S_0T + A_2$, $M^i = \mathfrak{M}^i_1$, din (1.10), (1.7), (1.11) şi (2.6),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\dfrac{\partial A_2}{\partial u_j/_i}\right] + \rho_0 F^i = 0, \quad \dfrac{\partial \mathfrak{M}^i_1}{\partial x_i} = W, \\[2ex] {}_0n_j \dfrac{\partial A_2}{\partial u_j/_i} = P^i, \quad {}_0n_i \mathfrak{M}^i_1 = \Phi. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ecuaţiile (2.7) sînt ecuaţiile de echilibru ale termoelasticităţii clasice. Dacă luăm $A = -S_0T + A_2 + A_3$ şi $M^i = \mathfrak{M}^i_1 + \mathfrak{M}^i_2$ obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\dfrac{\partial A_2}{\partial u_j/_i}\right] + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\dfrac{\partial A_3}{\partial u_j/_i}\right] + \rho_0 F^i = 0, \quad \dfrac{\partial \mathfrak{M}^i_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \mathfrak{M}^i_2}{\partial x_i} = W, \\[2ex] {}_0n_j\left[\dfrac{\partial A_2}{\partial u_j/_i} + \dfrac{\partial A_3}{\partial u_j/_i}\right] = P^i, \quad {}_0n_i(\mathfrak{M}^i_1 + \mathfrak{M}^i_2) = \Phi, \end{cases} \tag{2.8}$$

ce caracterizează aproximaţia de ordinul al doilea în termoelasticitatea finită, ş.a.m.d. Vom da un procedeu de determinare a soluţiei acestor ecuaţii, considerînd cazul aproximaţiei de ordinul al doilea.

Fie $u_i = \varepsilon u^{(1)}_i$, $T = \varepsilon T^{(1)}$ o soluţie a ecuaţiilor (2.7) cu neglijarea termenilor de grad mai înalt ca unu în ε, astfel că

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\dfrac{\partial A_2}{\partial u_j/_i}\right]\right\}_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}} + \rho_0(F^i + g^i) = 0, \quad \left[\dfrac{\partial \mathfrak{M}^i_1}{\partial x_i}\right]_{T = \varepsilon T^{(1)}} = W + \Omega, \\[2ex] {}_0n_j\left[\dfrac{\partial A_2}{\partial u_j/_i}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}} = P^i + \Psi^i, \quad {}_0n_i[\mathfrak{M}^i_1]_{T = \varepsilon T^{(1)}} = \Phi + \varphi, \end{cases} \tag{2.9}$$

unde g^i, Ψ^i, şi φ sînt cel puţin de gradul doi în ε.

Introducînd $u_i = \varepsilon u^{(1)}_i$, $T = \varepsilon T^{(1)}$ în (2.8) determinăm forţele şi condiţiile termice care trebuie aplicate pentru a menţine în corp deplasările $\varepsilon u^{(1)}_i$ şi variaţia de temperatură $\varepsilon T^{(1)}$ în baza ecuaţiilor teoriei termoelasticităţii de ordinul al doilea. Avem

$$\begin{aligned} &\rho_0 F^i_{(1)} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_2}{\partial u_j/_i}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_3}{\partial u_j/_i}\right]\right\}_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}}, \\ &P^i_{(1)} = {}_0n_j\left[\frac{\partial A_2}{\partial u_j/_i} + \frac{\partial A_3}{\partial u_j/_i}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}}, \\ &W_{(1)} = \left[\frac{\partial \mathfrak{M}^i_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathfrak{M}^i_2}{\partial x_i}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}}, \quad \Phi_{(1)} = {}_0n_i[\mathfrak{M}^i_1 + \mathfrak{M}^i_2]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Din (2.9) şi (2.10) obţinem

$$\begin{aligned} &\rho_0(F^i + g^i - F^i_{(1)}) = \left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_3}{\partial u_j/_i}\right]\right\}_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}}, \\ &P^i + \Psi^i - P^i_{(1)} = -{}_0n_j\left[\frac{\partial A_3}{\partial u_j/_i}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}}, \\ &W + \Omega - W_{(1)} = -\left[\frac{\partial \mathfrak{M}^i_2}{\partial x_i}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}}, \\ &\Phi + \varphi - \Phi_{(1)} = -{}_0n_i[\mathfrak{M}^i_2]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Din (2.11) se vede că termenii din partea stîngă a acestor relaţii sînt de gradul al doilea în ε şi deoarece g^i, Ψ^i, Ω, φ sînt de gradul al doilea în ε, rezultă

că $F^i - F^i_{(1)}$, $P^i - P^i_{(1)}$, $W - W_{(1)}$, $\Phi - \Phi_{(1)}$ conţin termeni de gradul al doilea sau mai înalt în ε.

Presupunem că $u_i = \varepsilon^2 u^{(2)}_i$, $T = \varepsilon^2 T^{(2)}$ sînt soluţii ale ecuaţiilor teoriei termoelasticităţii clasice (2.7) în care forţele masice, tensiunea superficială, sursele termice şi fluxul prin suprafaţă sînt înlocuite respectiv prin $F^i - F^i_{(1)}$, $P^i - P^i_{(1)}$, $W - W_{(1)}$ şi $\Phi - \Phi_{(1)}$.

Avem deci

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_2}{\partial u_{j/i}}\right]\right\}_{\substack{u_i = \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon^2 T^{(2)}}} + \rho_0 (F^i - F^i_{(1)}) = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{M}^i_{(1)}}{\partial x_i}\right]_{T = \varepsilon^2 T^{(2)}} = W - W_{(1)}, \tag{2.12}$$

$${}_0n_j \left[\frac{\partial A_2}{\partial u_{j/i}}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon^2 T^{(2)}}} = P^i - P^i_{(1)}, \quad {}_0n_i [\mathfrak{M}^i_1]_{T = \varepsilon^2 T^{(2)}} = \Phi - \Phi_{(1)}.$$

Să arătăm că

$$u_i = \varepsilon^{(1)}_i + \varepsilon^2 u^{(2)}_i, \quad T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)}, \tag{2.13}$$

reprezintă o soluţie a ecuaţiilor termoelasticităţii de ordinul al doilea, (2.8), cu neglijarea termenilor de grad mai înalt ca doi în ε. Introducînd u_i, T daţi de (2.13) în ecuaţiile (2.8), avem

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_2}{\partial u_{j/i}}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_3}{\partial u_{j/i}}\right]\right\}_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i + \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)}}} + \rho_0 F^i = 0,$$

$${}_0n_j \left[\frac{\partial A_2}{\partial u_{j/i}} + \frac{\partial A_3}{\partial u_{j/i}}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i + \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)}}} = P^i, \tag{2.14}$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{M}^i_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathfrak{M}^i_2}{\partial x_i}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i + \varepsilon^2 u^{(2)} \\ T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)}}} = W,$$

$${}_0n_i (\mathfrak{M}^i_1 + \mathfrak{M}^i_2)_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i + \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)}}} = \Phi.$$

Avînd în vedere că $\partial A_3 / \partial u_{j/i}$ este polinom omogen de gradul al doilea în $u_{i/j}$ şi T rezultă că putem înlocui cantităţile

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_2}{\partial u_{j/i}}\right]\right\}_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i + \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)}}} \quad \text{şi} \quad \left[\frac{\partial A_3}{\partial u_{j/i}}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i + \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)}}},$$

prin

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_3}{\partial u_{j/i}}\right]\right\}_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}} \quad \text{şi} \quad \left[\frac{\partial A_3}{\partial u_{j/i}}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}},$$

respectiv, neglijînd termenii de grad mai înalt ca al doilea în ε.

Similar, deoarece $\mathfrak{M}^i_2$ este polinom omogen de gradul al doilea, putem înlocui cantităţile

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{M}^i_2}{\partial x_i}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i + \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)}}} \quad \text{şi} \quad [\mathfrak{M}^i_2]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i + \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)}}},$$

respectiv prin

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{M}^i_2}{\partial x_i}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}} \quad \text{şi} \quad [\mathfrak{M}^i_2]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}},$$

neglijînd termenii de grad mai înalt ca doi în ε.

Ţinînd seama că $\partial A_2 / \partial u_{j/i}$ şi $\mathfrak{M}^i_1$ sînt liniare în $u_{j/i}$ şi T, relaţiile (2.14) devin

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_2}{\partial u_{j/i}}\right]\right\}_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}} + \left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_2}{\partial u_{j/i}}\right]\right\}_{\substack{u_i = \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon^2 T^{(2)}}} +$$

$$+ \left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial A_3}{\partial u_{i/j}}\right]\right\}_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}} + \rho_0 F^i = 0,$$

$${}_0n_j \left[\frac{\partial A_2}{\partial u_{j/i}}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}} + {}_0n_j \left[\frac{\partial A_2}{\partial u_{j/i}}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon^2 u^{(2)}_i \\ T = \varepsilon^2 T^{(2)}}} + \tag{2.15}$$

$$+ {}_0n_j \left[\frac{\partial A_3}{\partial u_{j/i}}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}} = P^i,$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{M}^i_1}{\partial x_i}\right]_{T = \varepsilon T^{(1)}} + \left[\frac{\partial \mathfrak{M}^i_1}{\partial x_i}\right]_{T = \varepsilon^2 T^{(2)}} + \left[\frac{\partial \mathfrak{M}^i_2}{\partial x_i}\right]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}} = W,$$

$${}_0n_i [\mathfrak{M}^i_1]_{T = \varepsilon T^{(1)}} + {}_0n_i [\mathfrak{M}^i_1]_{T = \varepsilon^2 T^{(2)}} + {}_0n_i [\mathfrak{M}^i_2]_{\substack{u_i = \varepsilon u^{(1)}_i \\ T = \varepsilon T^{(1)}}} = \Phi,$$

neglijînd termenii de grad mai mare ca doi în ε.

Ţinînd seama de (2.10) şi de faptul că $\varepsilon^2 u^{(2)}_i$, $\varepsilon^2 T^{(2)}$ satisfac ecuaţiile (2.12), se observă că (2.15) sînt satisfăcute.

Prin urmare, o soluţie a ecuaţiilor termoelasticităţii de ordinul al doilea poate fi obţinută astfel:

— se determină soluţia $\varepsilon u_i^{(1)}$, $\varepsilon T^{(1)}$ a ecuaţiilor termoelasticităţii clasice, (2.7), cu neglijarea termenilor de grad mai înalt ca unu în ε,

— se calculează forţele $F_{(1)}^i$, $P_{(1)}^i$ şi încărcările termice $W_{(1)}$, $\Phi_{(1)}$ care să menţină în corp starea de deformare caracterizată prin $\varepsilon u_i^{(1)}$, $\varepsilon T^{(1)}$, în baza ecuaţiilor termoelasticităţii de ordinul al doilea,

— se determină soluţia $\varepsilon^2 u_i^{(2)}$, $\varepsilon^2 T^{(2)}$ folosind ecuaţiile termoelasticităţii clasice cu forţele $F^i - F_{(1)}^i$, $P^i - P_{(1)}^i$ şi încărcările termice $W - W_{(1)}$, $\Phi - \Phi_{(1)}$,

— o soluţie a ecuaţiilor termoelasticităţii de ordinul al doilea cu neglijarea termenilor de grad mai înalt ca doi în ε este dată atunci de $u_i = \varepsilon u_i^{(1)} + \varepsilon^2 u_i^{(2)}$, $T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)}$.

Acest procedeu se poate extinde pentru determinarea soluţiei ecuaţiilor din cadrul unei teorii de ordin mai înalt, la fel ca în [6].

3. Aproximaţii succesive în cazul general

Conducîndu-ne după rezultatele obţinute, vom presupune că deplasările u_i şi variaţia de temperatură T, împreună cu primele două derivate ale lor pot fi dezvoltate în serii de puteri ale lui ε, absolut convergente, în intervalul $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ încît

$$
\begin{aligned}
&u_i = \sum_1^\infty \varepsilon^k u_i^{(k)}, && T = \sum_1^\infty \varepsilon^k u_i^{(k)},\\
(3.1)\qquad &\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_1^\infty \varepsilon^k \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j}, && \frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_1^\infty \varepsilon^k \frac{\partial T^{(k)}}{\partial x_i},\\
&\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} = \sum_1^\infty \varepsilon^k \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j \partial x_l}, && \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_1^\infty \varepsilon^k \frac{\partial^2 T^{(k)}}{\partial x_i \partial x_j}.
\end{aligned}
$$

Vom considera condiţii pe suprafaţa Σ, de forma:

$$
(3.2)\qquad
\begin{aligned}
&u_i = g_i = \sum_1^\infty \varepsilon^k g_i^{(k)}, && \text{pe } \Sigma_1,\\
&{}_0n_j t^{ij} = P^i = \sum_1^\infty \varepsilon^k \overset{(k)}{P}{}^i, && \text{pe } \Sigma_2,\ \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma,\\
&T = \tau = \sum_1^\infty \varepsilon^k \tau^{(k)}, && \text{pe } \Sigma_3,\\
&{}_0n_i q^i = \Phi = \sum_1^\infty \varepsilon^k \Phi^{(k)}, && \text{pe } \Sigma_4,\ \Sigma_3 \cup \Sigma_4 = \Sigma,
\end{aligned}
$$

ar condiţiile iniţiale sub forma:

$$
(3.3)\qquad u_i = h_i = \sum_1^\infty \varepsilon^k h_i^{(k)}, \quad v_i = \eta_i = \sum_1^\infty \varepsilon^k \eta_i^{(k)}, \quad T = \vartheta = \sum_1^\infty \varepsilon^k \vartheta^{(k)}, \quad t_r = t_0,
$$

unde v_i sînt componentele vitezei, iar seriile considerate sînt absolut convergente pentru $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ şi pentru orice x_i şi t.

Ţinînd seama de (1.6), (1.10), avem

$$
(3.4)\qquad t^{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_r^j + \frac{\partial u_j}{\partial x_r}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ir}} + \frac{\partial A}{\partial e_{ri}}\right)
$$

şi întrucît A este polinom în e_{ir} şi $T_0 + T$, putem scrie

$$
(3.5)\qquad t^{ij} = \frac{1}{2} A^{ijkl}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + B^{ij} T + C^{ij},
$$

unde A^{ijkl}, B^{ij} sînt constante iar C^{ij} sînt polinoame în $\partial u_s/\partial x_r$ şi T, care nu conţin termeni liniari. La fel, avînd în vedere (2.4), (1.10) găsim

$$
(3.6)\qquad
\begin{aligned}
&q^i = -k^{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} + L^i,\\
&S = S_0 + \frac{1}{2} B^{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + DT + K,
\end{aligned}
$$

unde L^i sînt polinoame în $\dfrac{\partial u_s}{\partial x_r}$, $\dfrac{\partial T}{\partial x_m}$ şi T care nu conţin termeni liniari; K este polinom în $\dfrac{\partial u_s}{\partial x_q}$ şi T care nu conţine termeni liniari. Deoarece seriile considerate sînt absolut convergente şi deci pot fi înmulţite şi rearanjate ca serii absolut convergente, avînd în vedere (3.1), (3.5), (3.6), obţinem

$$
(3.7)\qquad t^{ij} = \sum_1^\infty \varepsilon^k \overset{(k)}{t}{}^{ij}, \quad S - S_0 = \sum_1^\infty \varepsilon^k S^{(k)}, \quad q^i = \sum_1^\infty \varepsilon^k \overset{(k)}{q}{}^i,
$$

unde

$$
(3.8)\qquad
\begin{aligned}
&\overset{(1)}{t}{}^{ij} = \frac{1}{2} A^{ijkl}\left(\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial x_k}\right) + B^{ij} T^{(1)},\\
&\overset{(n)}{t}{}^{ij} = \frac{1}{2} A^{ijkl}\left(\frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(n)}}{\partial x_k}\right) + B^{ij} T^{(n)} + \overset{(n)}{C}{}^{ij},\\
&\overset{(1)}{q}{}^i = -k^{ij}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial x_j}, \quad \overset{(n)}{q}{}^i = -k^{ij}\frac{\partial T^{(n)}}{\partial x^j} + \overset{(n)}{L}{}^i,\\
&\overset{(1)}{S} = \frac{1}{2} B^{ij}\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i}\right) + DT^{(1)}, \quad \overset{(n)}{S} = \frac{1}{2} B^{ij}\left(\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i}\right) + DT^{(n)} + K^{(n)},
\end{aligned}
$$

în care $\overset{(n)}{C}{}^{ij}$, $\overset{(n)}{L}{}^{i}$ şi $\overset{(n)}{K}$ sînt polinoame de grad mai mare ca unu în $\partial u_r^{(\alpha)}/\partial x_s$ şi $T^{(\alpha)}(\alpha = 1, 2 \ldots, n-1)$.

Presupunînd că forţele masice F^i şi sursele termice W pot fi dezvoltate pentru $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ în serii absolut convergente de forma

$$F^i = \sum_1^\infty \varepsilon^k \overset{(k)}{F}{}^i, \quad W = \sum_1^\infty \varepsilon^k W^{(k)}, \tag{3.9}$$

din ecuaţiile de mişcare (1.7) şi ecuaţia (1.11), obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overset{(k)}{t}{}^{ij}}{\partial x_j} + \varrho_0 \overset{(k)}{F}{}^i = \varrho_0 \dfrac{\partial^2 \overset{(k)}{u}{}_i}{\partial t^2}, \quad (k = 1, 2 \ldots) \\ T_0 \dfrac{\partial S^{(1)}}{\partial t} = W^{(1)} - \overset{(1)}{q}{}^i|_i, \\ T_0 \dfrac{\partial S^{(k)}}{\partial t} = W^{(k)} - \overset{(k)}{q}{}^i|_i - \Omega_{k-1}, \quad (k = 2, 3, \ldots), \end{cases} \tag{3.10}$$

unde

$$\Omega_{k-1} = T^{(1)} \frac{\partial S^{(k-1)}}{\partial t} + T^{(2)} \frac{\partial S^{(k-2)}}{\partial t} + \ldots + T^{(k-1)} \frac{\partial S^{(1)}}{\partial t}.$$

Condiţiile pe frontieră (3.2) şi condiţiile iniţiale (3.3), devin

$$\begin{aligned} & u_i^{(k)} = g_i^{(k)}, \ \text{pe } \Sigma_1, \quad {}_0n_j \overset{(k)}{t}{}^{ij} = \overset{(k)}{\mathfrak{A}}{}^i, \ \text{pe } \Sigma_2 \\ & T^{(k)} = \tau^{(k)}, \ \text{pe } \Sigma_3, \quad {}_0n_i \overset{(k)}{q}{}^i = \Phi^{(k)}, \ \text{pe } \Sigma_4, \ \text{şi} \\ & u^{(k)} = h_i^{(k)}, \ \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} = \eta_i^{(k)}, \quad T^{(k)} = \mathfrak{T}^{(k)} \ \text{pentru } t = t_0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Se observă că pentru $k = 1$, (3.10)—(3.11) reprezintă ecuaţiile termoelasticităţii cuplate clasice cu condiţii iniţiale şi pe frontieră.

Soluţia acestei probleme, dacă există, este unică [4], încît cantităţile $\overset{(2)}{C}{}^{ij}$, $\overset{(2)}{L}{}^i$, $\overset{(2)}{K}$, Ω_1 sînt unic determinate.

Pentru $k > 1$ obţinem ecuaţiile termoelasticităţii cuplate clasice în care apar ca forţe masice, forţe pe suprafaţă, surse termice şi flux prin Σ_1, termeni unic determinaţi de soluţia problemei de rang $k-1$. Deoarece pentru fiecare k se obţin soluţii unice, rezultă unicitatea soluţiei ecuaţiilor termoelasticităţii finite obţinute prin metoda aproximaţiilor succesive.

4. Corpuri iniţial izotrope

Vom stabili ecuaţiile ce se obţin în cazul mediilor izotrope, considerînd în dezvoltările în serii după puterile lui ε numai termenii de grad unu şi doi.

Folosim coordonatele curbilinii θ^i şi notăm

$$\begin{cases} u_i = \varepsilon v_i(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) + \varepsilon^2 w_i(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) + \ldots, \\ T = \varepsilon T_1(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) + \varepsilon^2 T_2(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) + \ldots. \end{cases} \tag{4.1}$$

Deoarece în cazul mediilor izotrope energia liberă este funcţie de temperatura absolută a mediului şi invarianţii deformării I_1, I_2, I_3, din (1.10) avem

$$s^{ij} = 2g^{ij} \frac{\partial A}{\partial I_1} + 2B^{ij} \frac{\partial A}{\partial I_2} + 2I_3 G^{ij} \frac{\partial A}{\partial I_3}, \tag{4.2}$$

unde

$$\begin{cases} I_1 = 3 + 2\gamma_r^r = g^{rs} G_{rs}, \quad I_2 = 3 + 4\gamma_r^r + 2(\gamma_r^r \gamma_s^s - \gamma_s^r \gamma_r^s) = g_{rs} G^{rs} I_3, \\ I_3 = |\delta_s^r + 2\gamma_s^r| = \dfrac{G}{g}, \quad B^{ij} = g^{ij} I_1 - g^{ir} g^{js} G_{rs}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Este mai convenabil să folosim invarianţii $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$, daţi de

$$\mathcal{J}_1 = I_1 - 3, \quad \mathcal{J}_2 = I_2 - 2I_1 + 3, \quad \mathcal{J}_3 = I_3 - I_2 + I_1 - 1. \tag{4.4}$$

Notînd $A(I_1, I_2, I_3, T_0 + T) = A^*(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, T_0 + T)$, (4.2) devine

$$s^{ij} = 2g^{ij} \frac{\partial A^*}{\partial \mathcal{J}_1} + 2(B^{ij} - 2g^{ij}) \frac{\partial A^*}{\partial \mathcal{J}_2} + 2(g^{ij} - B^{ij} + G^{ij} I_3) \frac{\partial A^*}{\partial \mathcal{J}_3}. \tag{4.5}$$

Din (4.1), obţinem [2]

$$\begin{cases} G_{ij} = g_{ij} + \varepsilon(v_i|_j + v_j|_i) + \varepsilon^2(w_i|_j + w_j|_i + v_m|_i v^m|_j) + \ldots, \\ \gamma_{ij} = \dfrac{1}{2}\varepsilon(v_i|_j + v_j|_i) + \dfrac{1}{2}\varepsilon^2(w_i|_j + w_j|_i + v_m|_i v^m|_j) + \ldots, \\ \gamma_i^i = \dfrac{1}{2}\varepsilon(v^i|_j + v_j|^i) + \dfrac{1}{2}\varepsilon^2(w^i|_j + w_j|^i + v_m|^i v^m|_j) + \ldots. \end{cases} \tag{4.6}$$

Invarianţii I_1, I_2, I_3, avînd în vedere (4.3), (4.6), sînt

$$\begin{cases} I_1 = 3 + 2\varepsilon v^i|_i + \varepsilon^2(2w^i|_i + v^i|_j v_i|^j) + \ldots, \\ I_2 = 3 + 4\varepsilon v^i|_i + \varepsilon^2(4w^i|_i + 2v^i|_i v^j|_j - v^i|_j v^j|_i + v^i|_j v_i|^j) + \ldots, \\ I_3 = 1 + 2\varepsilon v^i|_i + \varepsilon^2(2w^i|_i + 2v^i|_i v^j|_j - v^i|_j v^j|_i) + \ldots, \end{cases} \tag{4.7}$$

iar din (4.4) obţinem

$$
(4.8)\qquad \begin{cases} \mathcal{J}_1 = 2\varepsilon v^i|_i + \varepsilon^2(2w^i|_i + v^i|_j v_i|^j) + \dots \\ \mathcal{J}_2 = \varepsilon^2(2v^i|_i v^j|_j - v^i|_j v^j|_i - v^i|_j v_i|^j) + \dots \\ \mathcal{J}_3 = O(\varepsilon^3) \end{cases}
$$

De asemenea avem [2]

$$
(4.9)\qquad \begin{aligned} I_3 G^{ij} = g^{ij} + \varepsilon(2g^{ij} v^m|_m - v^i|^j - v^j|^i) + \varepsilon^2[g^{ij}(2w^m|_m + \\ + 2v^m|_m v^n|_n - v^m|_n v^n|_m) - w^i|^j - w^j|^i - 2v^m|_m(v^i|^j + v^j|^i) + \\ + v^i|_m v^m|^j + v^i|_m v^j|^m + v^m|^i v^j|_m] + \dots \end{aligned}
$$

Ţinînd seama de (4.6), (4.7), (4.9) şi (4.3), obţinem

$$
(4.10)\qquad \begin{cases} B^{ij} - 2g^{ij} = \varepsilon(2g^{ij} v^m|_m - v^i|^j - v^j|^i) + \varepsilon^2[g^{ij}(2w^m|_m + v^m|_n v_m|^n) - \\ \qquad - w^i|^j - w^j|^i - v^m|^i v_m|^j] + \dots \\ g^{ij} - B^{ij} + G^{ij} I_3 = \varepsilon^2[g^{ij}(2v^m|_m v^n|_n - v^m|_n v^n|_m - v^m|^n v_m|_n) + \\ \qquad + v^i|_m v^m|^j + v^i|_m v^j|^m + v^m|^i v^j|_m + v^m|^i v_m|^j - \\ \qquad - 2v^m|_m(v^i|^j + v^j|^i)] + \dots \end{cases}
$$

Dacă A este polinom în $I_1, I_2, I_3, T_0 + T$ atunci este polinom şi în $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, T_0 + T$ şi deci este serie de puteri în ε. Din (4.7), (4.10) şi deoarece tensiunile iniţiale sînt zero, trebuie ca $\partial A^*/\partial \mathcal{J}_1 = 0$ pentru $\varepsilon = 0$.

Avînd în vedere (4.8) şi (4.1), putem scrie

$$
(4.11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A^*}{\partial \mathcal{J}_1} = \varepsilon[2Dv^i|_i - ET_1] + \varepsilon^2[D(2w^m|_m + v^m|^n v_n|_n) + 2Hv^m|_m v^n|_n + \\ \quad + C(2v^n|_m v^n|_n - v^m|_n v^n|_m - v^m|_n v_m|^n) - ET_2 - MT_1^2 - 4Pv^i|_i T_1] + \dots \\ \dfrac{\partial A^*}{\partial \mathcal{J}_2} = B + \varepsilon[2Cv^m|_m - KT_1] + \dots, \quad \dfrac{\partial A^*}{\partial \mathcal{J}_3} = F + \dots \end{cases}
$$

unde am introdus notaţiile

$$
(4.12)\qquad \begin{aligned} &B = \frac{\partial A^*}{\partial \mathcal{J}_2}, \quad C = \frac{\partial^2 A^*}{\partial \mathcal{J}_1 \partial \mathcal{J}_2}, \quad D = \frac{\partial^2 A^*}{\partial \mathcal{J}_1^2}, \quad F = \frac{\partial A^*}{\partial \mathcal{J}_3}, \quad H = \frac{\partial^3 A^*}{\partial \mathcal{J}_1^3}, \\ &E = -\frac{\partial^2 A^*}{\partial \mathcal{J}_1 \partial T}, \quad K = -\frac{\partial^2 A^*}{\partial \mathcal{J}_2 \partial T}, \quad L = -\frac{\partial^2 A^*}{\partial T^2}, \quad M = -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 A}{\partial_1 \partial T^2}, \\ &S_0 = -\frac{\partial A^*}{\partial T}, \quad N = -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 A^*}{\partial T^3}, \quad P = -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 A}{\partial T \partial \mathcal{J}_1^2}, \end{aligned}
$$

derivatele în (4.12) fiind calculate pentru $\varepsilon = 0$.

Cu acestea, tensiunile s^{ij} se pot dezvolta în forma

$$
(4.13)\qquad s^{ij} = \varepsilon s_1^{ij} + \varepsilon^2 s_2^{ij} + \dots,
$$

unde, în baza relaţiilor (4.5), (4.10), (4.11),

$$
(4.14)\qquad \begin{aligned} s_1^{ij} &= 4(B + D)g^{ij} v^m|_m - 2B(v^i|^j + v^j|^i) - 2Eg^{ij} T_1, \\ s_2^{ij} &= 2Dg^{ij}(2w^m|_m - v^m|^n v_n|_m) + 2g^{ij}(D - C)[v^m|^n v_m|_n + v^m|_n v_n|_m) + \\ &\quad + 2Bg^{ij}(2w^m|_m + v^m|^n v_m|_n) - 2Fg^{ij}(v^m|^n v_m|_n + v^m|^n v_n|_m) + \\ &\quad + 4(H + F + 3C)g^{ij} v^m|_m v^n|_n - 2B(w^i|^j + w^j|^i + v^m|^i v_m|^j) + \\ &\quad + 2F(v^i|^m + v^m|^i)(v^j|_m + v_m|^j) - 4(C + F)(v^i|^j + v^j|^i) v^m|_m - \\ &\quad - 2Eg^{ij} T_2 - 2KT_1(2g^{ij} v^m|_m - v^i|_j - v^j|_i) - 2Mg^{ij} T_1^2 - 8Pg^{ij} v^i|_i T_1. \end{aligned}
$$

Considerînd tensorul t^{ij} dezvoltat sub forma

$$
(4.15)\qquad t^{ij} = \varepsilon t_1^{ij} + \varepsilon^2 t_2^{ij} + \dots,
$$

atunci, din (1.6) şi (4.13), avem

$$
(4.16)\qquad t_1^{ij} = s_1^{ij}, \quad t_2^{ij} = s_2^{ij} + s_1^{im} v^j|_m.
$$

Din (4.16) şi (4.14) obţinem

$$
(4.17)\qquad \begin{aligned} t_1^{ij} &= 4(B + D)g^{ij} v^m|_m - 2B(v^i|^j + v^j|^i) - 2Eg^{ij} T_1, \\ t_2^{ij} &= 2Dg^{ij}(2w^m|_m - v^m|^n v_n|_m) + 2(D - C)g^{ij}(v^m|^n v_m|_n + v^m|^n v_n|_m) + \\ &\quad + 2Bg^{ij}(2w^m|_m + v^m|^n v_m|_n) - 2Fg^{ij}(v^m|^n v_m|_n + v^m|^n v_n|_m) + 4(H + \\ &\quad + F + 3C)g^{ij} v^m|_m v^n|_n + 4(B + D)v^m|_m v^i|^i - 2B(w^i|_j + w^j|^i + v^m|^i v_m|^j + \\ &\quad + v^m|^i v^j|_m + v^i|^m v^j|_m) + 2F(v^i|^m + v^m|^i)(v^j|_m + v_m|^j) - 4(C + F) \\ &\quad (v^i|^j + v^j|^i) v^m|_m - 2Eg^{ij} T_2 - 2ET_1 v^i|^i - 2KT_1(2g^{ij} v^m|_m - \\ &\quad - v^i|_j - v^j|_i) - 2Mg^{ij} T_1^2 - 8g^{ij} Pv^i|_i T_1. \end{aligned}
$$

Avînd în vedere (1.10), (4.12), avem

$$
(4.18)\qquad \begin{aligned} S = S_0 + \varepsilon(2Ev^i|_i + LT_1) + \varepsilon^2[LT_2 + E(2w^i|_i + v^i|_j v_i|^j) + \\ + K(2v^i|_i v^j|_j - v^i|_j v^j|_i - v^i|_j v_i|^j) + 4v^i|_i v^j|_j P + NT_1^2 + \\ + 4Mv^i|_i T_1] + \dots, \end{aligned}
$$

încît, dacă

$$
(4.19)\qquad S - S_0 = \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots
$$

atunci

$$
(4.20)\quad \begin{cases} S_1 = 2Ev^i|_i + LT_1, \\ S_2 = 2Ew^i|_i + LT_2 + Ev^i|_j v_i|^j + K(2v^i|_i v^j|_j - v^i|_j v^j|_i - v^i|_j v_i|^j) + \\ \qquad + 4Mv^i|_i T_1 + NT_1^2 + 4Pv^i|_i v^j|_j . \end{cases}
$$

Dacă în ecuaţiile de mişcare (1.7) considerăm $f^i = \varepsilon f_1^i + \varepsilon^2 f_2^i + \ldots$ iar $F^i = \varepsilon F_1^i + \varepsilon^2 F_2^i + \ldots$, obţinem:

$$
(4.21)\quad \begin{aligned} t_1^{ij}|_j + \rho_0 F_1^i &= \rho_0 f_1^i, \\ t_2^{ij}|_j + \rho_0 F_2^i &= \rho_0 f_2^i. \end{aligned}
$$

În cazul mediilor elastice iniţial izotrope, componentele fluxului termic sînt legate de deformări şi temperatură prin [2]

$$
(4.22)\quad \begin{aligned} -Q^i = (C_1 \delta_j^i + C_2 \gamma_j^i + C_3 \gamma_m^i \gamma_j^m) T|_j + {}_0\epsilon^{ijk} T|_r T|_s \gamma_i^r (C_4 \delta_j^s \delta_k^t + C_5 \delta_j^s \gamma_k^t + \\ + C_6 \gamma_j^s \gamma_k^t) \end{aligned}
$$

unde

$$
T|^j = g^{jr} T|_r, \qquad T|_r = \frac{\partial T}{\partial \theta^r}, \qquad {}_0\epsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} e_{ijk},
$$

iar $C_1, C_2, \ldots, C_6$ sînt polinoame în $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ şi invarianţii

$$
I_4 = T|^i T|_i, \qquad I_5 = T|^i T|_j \gamma_i^j, \qquad I_6 = T|^i T|_j \gamma_k^j \gamma_i^k
$$

cu coeficienţi care sînt funcţii continue de $T_0 + T$.

În cazul nostru, ţinînd seama de (4.8), (4.1) şi de gradul de aproximaţie considerat, avem

$$
\begin{aligned} C_1 &= k + \varepsilon(k_1 T_1 + 2k_2 v^i|_i) + \ldots, \\ C_2 &= k_3 + \ldots, \end{aligned}
$$

unde k, k_i sînt constante. Cu acestea, (4.2) devine

$$
(4.23)\quad \begin{aligned} -Q^i = \varepsilon k T_1|^i + \varepsilon^2 [k T_2|^i + k_1 T_1 T_1|^i + 2k_2 v^r|_r T_1|^i + \\ + \frac{k_3}{2} (v^i|_j + v_j|^i) T_1|^j] . \end{aligned}
$$

Avînd în vedere (1.8) şi de faptul că $\sqrt{I_3} = 1 + \varepsilon v^r|_r + \ldots$, avem

$$
(4.24)\quad \begin{aligned} -q^i = \varepsilon k T_1|^i + \varepsilon^2 [k T_2|^i + k_1 T_1 T_1|^i + m v^r|_r T_1|^i + \\ + \frac{1}{2} k_3 (v^i|_j + v_j|^i) T_1|^j] + \ldots \end{aligned}
$$

unde $m = 2k_1 + k$.

Dacă

$$
(4.25)\quad q^i = \varepsilon q_1^i + \varepsilon^2 q_2^i + \ldots,
$$

atunci, din (4.24)

$$
(4.26)\quad \begin{cases} q_1^i = -k T_1|^i, \\ q_2^i = -k T_2|^i - k_1 T_1 T_1|^i - m v^r|_r T_1|^i - \frac{1}{2} k_3 (v^i|_j + v_j|^i) T_1|^j . \end{cases}
$$

Avînd în vedere (4.1), (4.19), (4.25) şi presupunînd că $W = \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \ldots$, din (1.11) obţinem ecuaţiile

$$
(4.27)\quad \begin{cases} T_0 \dfrac{DS_1}{Dt} = W_1 - q_1^i|_i, \\ T_0 \dfrac{DS_2}{Dt} = W_2 - q_2^i|_i - T_1 \dfrac{DS_1}{Dt}, \end{cases}
$$

unde S_1, S_2, şi q_1^i, q_2^i sînt daţi de (4.20) şi (4.16).

Condiţiile pe frontieră şi condiţiile iniţiale, pentru fiecare grad de aproximare se deduc din (3.11).

BIBLIOGRAFIE

1. Dillon, O. W. — *A nonlinear thermoelasticity theory*. J. Mech. Phys. Solids, 10 (1962), p. 123.
2. Green, A. E. and Adkins, J. E. — *Large elastic deformations*, Oxford, Clarendon Press, 1960.
3. Herrmann, G. — *On second-order thermoelastic effects*. Z. angew. Math. Phys., 15 (1964), p. 253.
4. Ionescu-Cazimir, V. — *Problem of linear coupled thermoelasticity*. III. *Uniqueness Theorem*. Bull. Acad. Polon Sci., Sér. sci. techn., 12 (1964), p. 565.
5. Pipkin, A. C. and Rivlin, R. S. — *The formulation of constitutive equations in continuum physics*. I. Arch. Rat. Mech. Anal, 4 (1959), p. 129.
6. Rivlin, R. S. and Topakoglu C. — *A theorem in the theory of finite elastic deformations*. J. Rat. Mech. Anal., 3 (1954), p. 581.

SUR LA THERMOÉLASTICITÉ NONLINÉAIRE

Résumé

Dans cette Note, on généralise le théorème de Rivlin et Topakoglu [6] au cas de la thermoélasticité nonlinéaire et aussi la méthode des approximations successives présentée dans [2]. On établit des relations pour les milieux isotropes dans le cas de la théorie de la thermoélasticité de second ordre.