SUR LA STRUCTURE DES DOMAINES D'OPTIMALITÉ DU PARAMÈTRE, POUR LES PROGRAMMES LINÉAIRES UNIPARAMÉTRIQUES RATIONNELS

PAR

I. DRĂGAN

Travail présenté au Colloque sur la Théorie des fonctions convexes et ses applications au calcul numérique, Cluj, 1—5, Juillet 1965

1. Introduction

Pendant les dernières années, un grand nombre de travaux (voir [1—30]) ont été consacrés à l'achèvement de la théorie des programmes paramétriques. Malgré les efforts, dirigés surtout vers la question de la résolution, d'après nous, on n'a pas obtenu un grand progrès, du point de vue pratique. Les algorithmes connus, adaptés à la résolution de certains programmes paramétriques, de plus en plus généraux, sont difficiles à appliquer. Mais, même en ce qui concerne les questions théoriques, nous ne connaissons pas un travail qui contienne les résultats qu'on peut établir à l'aide de ces méthodes. D'ailleurs, on remarque le fait, que presque tous les auteurs ont cherché à tirer un profit maximum des idées de Gass-Saaty, pour formuler des algorithmes pour les programmes paramétriques, fondés sur les algorithmes pour les programmes ordinaires, sans porter un intérêt manifeste aux questions théoriques.

Dans ce travail, on considère le problème de la résolution d'un programme linéaire paramétrique, dont toutes les données sont des fractions rationnelles d'un paramétre λ. On donne un algorithme pour la résolution de ces programmes fondé sur la méthode des variables directrices de E. M. L. Beale. Pourtant, on adopte l'idée suivante: il faut résoudre le programme paramétrique sur l'axe $O\lambda$, moins un ensemble fini de points, appelés points critiques. Parmi ces points, on trouve les points où le programme considéré n'est pas défini et les divers points qui produisent des embarras pendant la résolution. Evidemment, il faut définir la notion de point critique, ce qu'on ferra dans la dernière section du travail.

D'ailleurs, cette manière d'agir, conduira à la résolution du programme dans certains points critiques, où il est défini. De plus, on peut tirer un certain profit des résultats obtenus déjà pour les valeurs de λ, situées à gauche du point critique. On fait économie, de cette manière, des efforts pour la résolution du programme dans les points critiques et on passe légèrement, par dessus les intervalles sur lesquels le problème ne possède pas un programme optimal.

En supposant que l'origine est un point critique, la marche de la résolution sera la suivante: a) résoudre le programme pour les valeurs assez petites de λ; b) déterminer l'intervalle maximal sur lequel les résultats établis sont encore vrais; c) déplacer l'origine dans l'autre extrémité de l'intervalle trouvé; d) reprendre l'algorithme, pour les valeurs situées à droite de l'origine. L'algorithme sera formulé, pour la résolution sur l'intervalle $(0, +\infty)$.

On commence par une rapide description de l'algorithme de Beale, pour les programmes linéaires ordinaires, puis, on donne quelques propositions auxiliaires; enfin on développe l'algorithme pour les programmes paramétriques considérés et on montre la convergence du procédé. A la fin, on énonce plusieurs théorèmes, sur la structure des domaines d'optimalité du paramètre, théorèmes qui résultent de l'algorithme. On donne aussi une bibliographie sur les programmes paramétriques, en omettant les travaux consacrés seulement aux applications.

2. La méthode de Beale pour les programmes linéaires

La méthode de Beale est un procédé itératif pour la résolution d'un programme linéaire quelconque. Supposons qu'en appliquant sur un problème $(\mathfrak{A})$, donné sur la forme canonique, au moins une itération de la méthode, le problème $(\mathfrak{A})$ est ramené à la forme

$$x_i = \sum_{l \in L} u_i^l x_l, \quad 1 = \sum_{l \in L} q_l x_l, \quad (i \in N - L) \tag{1}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad x_l \geqslant 0, \quad (i \in N - L, \quad l \in L) \tag{2}$$

$$f = \sum_{l \in L} s_l x_l = \min. \tag{3}$$

où N est l'ensemble des indices des variables du problème et L un sous-ensemble de N. On emploie, d'après Beale, les termes qui suivent: équation directrice de l'itération = la dernière équation (1); variables directrices de l'itération = les variables de l'équation directrice. Alors, une itération courante sur le problème (1), (2), (3), comporte les opérations suivantes:

1°. Etablir les signes des nombres q_l $(l \in L)$; si $q_l \leqslant 0$ pour tous les $l \in L$, il n'y a pas des programmes et l'algorithme est arrêté; dans le cas contraire, on en déduit l'ensemble $H \subseteq L$, tel que $q_l > 0$ pour $l \in H$.

2°. Déterminer les variables $x_p (p \in H)$, telles que

$$\frac{s_p}{q_p} = \min_{l \in H} \frac{s_l}{q_l}; \tag{4}$$

ces variables seront appelées variables principales de l'itération. Si on suppose que le minimum est unique, il y aura la solution de base unique

$$x_p = \frac{1}{q_p}, \quad x_i = \frac{u_i^p}{q_p}, \quad x_l = 0, \quad (i \in N - L, \quad l \in L, \quad l \neq p). \tag{5}$$

Grâce aux opérations de l'itération précédente et à la manière de l'obtention de l'indice p, cette solution de base est duale-réalisable, parce qu'on a

$$s_l - \frac{s_p}{q_p} q_l \geqslant 0, \quad (l \in L). \tag{6}$$

3°. Etablir les signes des nombres $u_i^p (i \in N - L)$; si $u_i^p \geqslant 0$, pour tous les $i \in N - L$, la solution duale-réalisable (5) est un programme, donc un programme optimal et l'algorithme est arrêté; dans le cas contraire on en déduit l'ensemble $I \subseteq N - L$, tel que $u_i^p < 0$ pour $i \in I$.

4°. Déterminer les variables $x_j (j \in I)$, telles que

$$u_j^p = \min_{i \in I} u_i^p; \tag{7}$$

soit x_k une quelconque de ces variables.

5°. Réaliser le passage au problème

$$x_p = \frac{1}{u_k^p} x_k - \sum_{\substack{l \in L \\ l \neq p}} \frac{u_k^l}{u_k^p},$$

$$x_i = \frac{u_i^p}{u_k^p} x_k + \sum_{\substack{l \in L \\ l \neq p}} \left(u_i^l - \frac{u_i^p}{u_k^p} u_k^l \right) x_l, \quad (i \in N - L, \quad i \neq k) \tag{8}$$

$$1 = \frac{q_p}{u_k^p} x_k + \sum_{\substack{l \in L \\ l \neq p}} \left(q_l - \frac{q_p}{u_k^p} u_k^l \right) x_l,$$

$$x_i \geqslant 0, \quad x_l \geqslant 0, \quad (i \in N - L, \quad l \in L) \tag{9}$$

$$f = \frac{s_p}{u_k^p} x_k + \sum_{\substack{l \in L \\ l \neq p}} \left(s_l - \frac{s_p}{u_k^p} u_k^l \right) x_l = \min. \tag{10}$$

de la même forme que (1), (2), (3), mais avec les variables directrices x_k et x_l $(l \in L, \quad l \neq p)$. Puis, on passe à une nouvelle itération.

Il reste encore à expliquer la manière d'agir dans le cas où il y a plusieurs variables principales et comment peut-on commencer les itérations, ainsi qu'on trouve un problème équivalent à (2), de la forme (1), (2), (3), qui donnera pendant l'opération 2° une solution de base duale-réalisable. Cela revient à expliquer la manière d'agir pour éviter le cyclage et comment peut-on déterminer la solution de base duale-réalisable de départ.

a) Si la règle (4) ne donne pas une variable principale unique, on utilisera la règle qui suit. Soit R l'ensemble de indices des variables principales et $t_1 < t_2 < \dots t_m$ les éléments de l'ensemble $N-L$. On cherche l'ensemble $R_1 \subseteq R$, des indices, tels que pour $r_1 \in R_1$ on a

$$\frac{u^{r_1}_{t_1}}{q_{r_1}} = \min_{r \in R} \frac{u^r_{t_1}}{q_r}; \tag{11}$$

si le minimum est unique, l'indice p sera déterminé: $p = r_1$.

Dans le cas contraire, on cherche l'ensemble $R_2 \subseteq R_1$, des indices, tels que pour $r_2 \in R_2$ on ait

$$\frac{u^{r_2}_{t_2}}{q_{r_2}} = \min_{r_2 \in R_1} \frac{u^{r_2}_{t_2}}{q_{r_2}}, \tag{12}$$

et ainsi de suite, jusqu'à l'obtention de l'indice unique p.

b) Considérons maintenant un problème de programmation linéaire (P), donné sous la forme standard, avec un système d'équations compatible et non rédondant. Le problème (P) peut être ramené à la forme coronique

$$x_i = v_i^0 + \sum_{l \in L} v_i^l x_l, \quad (i \in \mathfrak{N} - \mathfrak{L}) \tag{13}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad x_l \geqslant 0, \quad (i \in \mathfrak{N} - \mathfrak{L}, \quad l \in \mathfrak{L}) \tag{14}$$

$$f = t_0 + \sum_{l \in L} t_l x_l = \min. \tag{15}$$

où $\mathfrak{N}$ est l'ensemble des indices des variables du problème (P) et $\mathfrak{L}$ un sous-ensemble de $\mathfrak{N}$. Pour résoudre le problème (P) à l'aide de la méthode de Beale, on commence par des itérations courantes sur un problème élargi (P^+), construit à partir du problème (13), (14), (15), de la manière suivante:

$$x_i = v_i^0 x_0 + \sum_{l \in L} v_i^l x_l, \quad 1 = x_0 + w \sum_{l \in L} x_l, \quad (i \in \mathfrak{N} - \mathfrak{L}), \tag{16}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad x_l \geqslant 0, \quad x_0 \geqslant 0, \quad (i \in \mathfrak{N} - \mathfrak{L}, \quad l \in \mathfrak{L}) \tag{17}$$

$$f = t_0 x_0 + \sum_{l \in L} t_l x_l = \min. \tag{18}$$

où x_0 est une variable artificielle, la dernière équation (16) une équation artificielle et w un nombre positif aussi petit que l'on veut. Le problème

(P^+) est de la forme (1), (2), (3), avec $N = \{\mathfrak{N}, 0\}$, $L = \{\mathfrak{L}, 0\}$, $q_0 = 1$, $q_l = w$, $(l \in \mathfrak{L})$ et possède une solution de base duale-réalisable immédiate, parce que $H = L$, à la première itération. Donc, on peut appliquer des itérations courantes sur le problème élargi. Évidemment, il faut tenir compte de la présence du nombre w, à valeurs positives assez petites et des complications dues à la charge de résoudre le problème (P).

On applique des itérations courantes sur le problème élargi jusqu'à l'obtention d'une itération pendant laquelle: soit la variable directrice x_0 devient principale, soit le problème élargi est résolu. Dans le premier cas, cette itération continuera et il y aura deux possibilités: a) la solution duale-réalisable correspondante est optimale; b) la solution duale-réalisable correspondante n'est pas optimale. Si l'on rencontre la première possibilité, en laissant de côté la valeur de x_0, on obtiendra le programme optimal du problème (P). Si l'on recontre la seconde possibilité, après l'itération, on omettra l'équation qui contient x_0 et les termes en w, et l'algorithme continuera sur le problème obtenu. Ce dernier programme est équivalent au problème (P) et possède une solution duale-réalisable immédiate. D'ailleurs, on peut aussi continuer les itérations sur le problème élargi, jusqu'à la résolution de ce problème. Dans le second cas, il y a aussi deux possibilités: a) $s_p \neq 0$; b) $s_p = 0$ (p étant l'indice de la variable principale de cette itération). Si l'on rencontre la première possibilité, le problème (P) ne possèdera pas un programme optimal fini. Si l'on rencontre la seconde possibilité, on travaillera comme dans le cas où x_0 est, en même temps, variable principale, c'est-à-dire de la manière décrite ci-dessus.

Remarquons que pendant les itérations sur le problème élargi, l'algorithme ne peut pas être arrêté à la première opération de l'itération, parce qu'on a toujours $q_0 > 0$. Les calculs seront un peu facilités, si l'on prend, après chaque itération sur le problème élargi, $q_0 = 1$; cela n'entraînera aucune conséquence pour le résultat final.

3. Questions auxiliaires

Pour résoudre un problème de programmation linéaire paramétrique rationnel sur un intervalle de la forme $(0, \varepsilon)$, où ε est un nombre positif aussi petit que l'on veut, il faut savoir des procédés capables de fournir les réponses aux questions suivantes: (α) Etablir les signes d'un nombre fini de fractions rationnelles sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$; (β) déterminer les fractions minimales d'un ensemble fini de fractions rationnelles, sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$.

Soient donnés m couples de polynômes

$$\begin{aligned} P_i(\lambda) &= a_i^{r_i} \lambda^{r_i} + \dots + a_i^{p_i} \lambda^{p_i}, \quad (a_i^{r_i} \neq 0, \quad 0 \leqslant r_i \leqslant p_i), \\ Q_i(\lambda) &= b_i^{s_i} \lambda^{s_i} + \dots + b_i^{q_i} \lambda^{q_i}, \quad (b_i^{s_i} \neq 0, \quad 0 \leqslant s_i \leqslant q_i), \\ &(i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \tag{19}$$

et

$$f_i(\lambda) = \frac{P_i(\lambda)}{Q_i(\lambda)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{20}$$

les fractions rationnelles construites avec ces polynômes.

Il est bien clair que pour établir les signes des fractions (20), sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$, il faudra établir les signes des nombres

$$c_i^{t_i} = \frac{a_i^{r_i}}{b_i^{s_i}}, \quad (t_i = r_i - s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m). \tag{21}$$

Cette opération sera appelée, en ce qui suit, l'opération (α).

Soit $c_i^{t_i}$, $c_i^{t_i+1}, \ldots$ les nombres définis par les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i^{r_i} = b_i^{s_i} c_i^{t_i}, \\ a_i^{r_i+1} = b_i^{s_i} c_i^{t_i+1} + b_i^{s_i+1} c_i^{t_i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \tag{22}$$

on obtient

$$f_i(\lambda) = c_i^{t_i} \lambda^{t_i} + c_i^{t_i+1} \lambda^{t_i+1} + \cdots + g_i(\lambda), \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{23}$$

Il est à remarquer que le nombre t_i peut avoir une valeur négative. En général, il faut calculer au plus un terme pour chaque fonction $f_i(\lambda)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, donc on emploie les mêmes nombres (21) utilisés pendant l'opération (α).

Alors, pour répondre à la seconde question, il faudra commencer la construction de la matrice $T = (c_i^j)$, dans laquelle chaque ligne correspond à une fonction $f_i(\lambda)$ et chaque colonne correspond à une puissance de λ, $(c_i^j = 0$, si $j < t_i)$. On construit les colonnes de T de gauche à droite, pendant la recherche de la fraction minimale sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$.

Soit

$$c_k^j = \min_i c_i^j, \quad (j = \min_i t_i), \tag{24}$$

l'élément minimal de la première colonne déjà construite; si le minimum est unique, $f_k(\lambda)$ déterminée par la condition (24) sera la fraction minimale sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$. Dans le cas contraire, on considère seulement les fractions déterminées par la condition (24) et on construit la seconde colonne de T. Sur cette colonne on reprendra le procédé, et ainsi de suite. En général, la fraction minimale sera déterminée après un nombre assez petit de pas. La fraction minimale ne pourra pas être déterminée par ce procédé dans le cas où elle n'est pas unique. Donc, en général, le procédé conduira à la fraction cherchée.

Parfois, il est nécessaire de déterminer la fraction minimale d'un ensemble de fractions qui contient des fractions identiquement nulles.

Alors, en laissant de côté ces dernières fractions, on applique le procédé aux fractions restantes, et on obtiendra à la fin la fraction minimale, en cherchant le signe de $f_k(\lambda)$. L'opération utilisée pour donner une réponse à la question (β), sera appelée en ce qui suit l'opération (β).

Ajoutons que pour résoudre, sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$, un problème paramétrique rationnel, par la méthode de Beale, il faut employer encore une seule opération, que nous appelerons l'opération (γ): la substitution d'un ensemble de variables directrices, par un autre, connaissant la nouvelle variable directrice et la variable qui sort de l'ensemble.

Pour la résolution sur un certain domaine, il faudra utiliser deux autres opérations: l'opération (δ) — la recherche de la plus petite racine réelle et positive d'un polynôme — et l'operation (λ) — le changement de l'origine des valeurs du paramètre λ, par une transformation de la forme $\lambda = \lambda_0 + \mu$. L'opération (δ) réclame une méthode de la théorie des équations algèbriques, par exemple la méthode de Bairstow, tandis qu'une méthode de type Horner est suffisante pour accomplir l'opération (λ).

En ce qui suit, le nombre λ_0 sera appelé racine de la fraction $f_i(\lambda)$, si $f_i(\lambda_0) = 0$, ou $1/f_i(\lambda_0) = 0$.

4. L'algorithme de Beale pour les problèmes paramétriques rationnels

Soit donné un problème de programmation paramétrique sous la forme standard

$$AX = b, \quad X \geqslant 0, \quad f = cX = \min., \tag{P}$$

où les dimensions des matrices A, b, c, sont respectivement $m \times n$, $m \times 1$, $1 \times n$ et leurs éléments sont des fractions rationnelles du paramètre réel λ, définies sur l'ensemble D. L'algorithme que nous développerons ici, permet la résolution du problème (P) sur l'ensemble D, sauf un ensemble fini de points: Δ. D'ailleurs, les valeurs appartenant à Δ seront déterminées pendant l'application de l'algorithme.

En anticipant, il faut dire que l'ensemble $(\mathcal{J})$ des itérations de l'algorithme, nécessaires pour la résolution du problème (P), sur $D - \Delta$, est formé d'un nombre fini d'itérations, qui appartiennent à un nombre fini s de groupes d'itérations $\mathcal{J}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Chaque groupe $\mathcal{J}_k$ contient un nombre fini d'itérations, pendant lesquelles on poursuit les objectifs suivants: a) résoudre le problème (P) sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$; b) déterminer l'intervalle ouvert maximal $(0, \lambda_k)$, tel que les résultats, déjà connus sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$, restent encore vrais pour $\lambda \in (0, \lambda_k)$; changer λ en $\lambda + \lambda_k$, afin qu'on puisse reprendre le procédé, pendant le groupe d'itérations $\mathcal{J}_{k+1}$ si $k < s$. Ainsi, le problème (P) est résolu sur l'intervalle $(0, \lambda_1)$ par les itérations de $\mathcal{J}_1$, sur l'intervalle $(\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$ par les itérations de $\mathcal{J}_2$, etc. sur l'intervalle $(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{s-1}, +\infty)$ par les itérations de $\mathcal{J}_s$. Il

est bien clair, qu'il suffit de donner seulement la description d'un groupe quelconque d'itérationes de l'algorithme.

Supposons qu'en appliquant les itérations d'un groupe d'itérations quelconques on est arrivé à une itération sur un problème (P^*) qu'il faut dérouler dans les conditions suivantes: a) le problème (P^*) se trouve sous la forme

$$(P^*)\qquad \begin{aligned} & x_i = \sum_{l\in L} u_i^l x_l, \quad 1 = \sum_{l\in L} q_l x_l, \quad (i\in N-L),\\ & x_i \geqslant 0, \quad x_l \geqslant 0, \quad (i\in N-L,\ l\in L),\\ & s_l = s_l(\lambda), \quad u_i^l = u_i^l(\lambda), \quad q_l = q_l(\lambda),\\ & f = \sum_{l\in L} s_l x_l = \min.,\end{aligned}$$

où N est l'ensemble des indices des variables du problème et L un sous-ensemble de N; b) il est disponible un nombre $\bar\lambda$, tel que pour chaque $\lambda\in(0,\bar\lambda)$, la marche de l'algorithme de Beale, eût été exactement celle des itérations précédantes du groupe considéré; c) il est disponible une solution de base duale-réalisable sur l'intervale $(0,\bar\lambda)$, déterminée pendant l'itération précédente, qu'il faut remplacer par une solution meilleure, duale-réalisable. Alors, les opérations d'une itération courante, exécutées sur le problème (P^*), sont les suivantes:

1°. Par une opération (α), on détermine l'ensemble $H\subseteq L$ tel que $q_l>0$, pour $\lambda\in(0,\varepsilon)$ et $l\in H$; puis, à l'aide des opérations (δ) exécutées sur les $q_l\,(l\in L)$, on détermine les nombres $\lambda_\alpha^l\,(l\in L)$, les plus petites racines réelles positives des $q_l\,(l\in L)$. Posons

$$\lambda_\alpha = \min(\lambda, \min_l \lambda_\alpha^l); \tag{28}$$

alors $q_l>0$ sur l'intervalle $(0,\lambda_\alpha)$, pour tous $l\in H$, tandis que, sur le même intervalle, $q_{l'}\leqslant 0$, pour tous $l'\in L-H$.

Il y a deux possibilités: a) Dans la première, H est vide, le problème (P^*) est résolu sur l'intervalle $(0,\lambda_\alpha)$: il n'existe pas des programmes. L'itération considérée est la dernière itération du groupe. Si $\lambda_\alpha=+\infty$, le groupe considéré sera le dernier; si $\lambda_\alpha<+\infty$, après une operation (λ), il faudra commencer un nouveau groupe d'itérations. b) Dans la seconde, H contient au moins un élément, l'itération considérée continuera par l'opération suivante, sur l'intervalle $(0,\lambda_\alpha)$.

2°. Par une opération (β), on détermine les indices p tels que

$$\frac{s_p}{q_p} = \min_{l\in H}\frac{s_l}{q_l}, \tag{29}$$

sur l'intervalle $(0,\varepsilon)$. Supposons que l'indice p est unique. Alors, la solution de base paramétrique

$$x_p = \frac{1}{q_p}, \quad x_i = \frac{u_i^p}{q_p}, \quad x_l = 0, \quad (i\in N-L,\ l\in L,\ l\neq p), \tag{30}$$

est duale-réalisable sur l'intervalle $(0,\varepsilon)$, parce qu'on a

$$\delta_p^l = s_l - \frac{s_p}{q_p} q_l \geqslant 0, \quad (l\in L), \tag{31}$$

en vertu du choix de l'indice p et de la manière de conduire les calculs dans l'itération précédente; puis, à l'aide des opérations (δ) appliquées sur les $\delta_p^l\,(l\in H)$, on détermine les nombres $\lambda_p^l\,(l\in H)$, les plus petites racines réelles positives des $\delta_p^l\,(l\in H)$. Posons

$$\lambda_\beta = \min(\lambda_\alpha, \min_{l\in H}\lambda_\beta^l); \tag{32}$$

alors, la solution (30) est duale-réalisable pour $\lambda\in(0,\lambda_\beta)$ et il faut passer à l'opération suivante, sur l'intervalle $(0,\lambda_\beta)$.

3°. Par une nouvelle opération (α), on détermine l'ensemble $I\subseteq N-L$ des indices, tels que $u_i^p<0$, sur l'intervalle $(0,\varepsilon)$, pour $i\in I$; puis, à l'aide des operations (δ), exécutées sur les $u_i^p\,(i\in N-L)$, on détermine les nombres $\lambda_\alpha^i\,(i\in N-L)$, les plus petites racines réelles positives des $u_i^p\,(i\in N-L)$. Posons

$$\bar\lambda_\alpha = \min(\lambda_\beta, \min_{i\in N-L}\lambda_\alpha^i) \tag{35}$$

alors, $u_i^p<0$ pour $\lambda\in(0,\bar\lambda_\alpha)$ et tous $i\in I$, tandis que $u_{i'}^p\geqslant 0$, pour $\lambda\in(0,\lambda_\alpha)$ et tous $i'\in N-L-I$.

Il y a deux possibilités: a) I est vide; b) I contient au moins un élément. a) Dans le premier cas, le problème (P^*) est résolu sur l'intervalle $(0,\bar\lambda_\alpha)$: la solution de base (30) est un programme optimal du problème, pour chaque $\lambda\in(0,\lambda_\alpha)$. L'itération considérée est la dernière itération du groupe. Si $\bar\lambda_\alpha=+\infty$, ce sera le dernier groupe d'itérations, si $\lambda_\alpha<+\infty$, il faudra commencer un nouveau groupe d'itérations, après une opération (λ). b) Dans le second cas, l'itération continuera par l'opération suivante, sur l'intervalle $(0,\lambda_\alpha)$, pour obtenir une solution de base paramétrique duale-réalisable, plus proche du programme optimal.

4°. Par une nouvelle opération (β), exécutée sur les $u_i^p\,(i\in I)$ on détermine un indice k, tel que

$$u_k^p = \min_{i\in I} u_i^p, \tag{34}$$

sur l'intervalle $(0,\varepsilon)$; puis, à l'aide des opérations (δ) appliquées sur les

$\bar{\delta}_i^k = u_i^p - u_k^p$, $(i \in I)$, on détermine les nombres $\bar{\lambda}_\beta^i$, $(i \in I)$, les plus petites racines réelles positives des $\bar{\delta}_k^i$ $(i \in I)$. Posons

$$\bar{\lambda}^* = \min(\bar{\lambda}_\alpha, \min_{i \in I} \bar{\lambda}_\beta^i); \tag{35}$$

alors, pour trouver une solution meilleure, il faut introduire la variable x_k, dans l'ensemble des variables directrices et éliminer la variable x_p, de cet ensemble.

5°. Le changement des variables de l'ensemble des variables directrices, sera exécuté par une opération (γ).

Si l'itération considérée est la dernière itération, du dernier groupe d'itérations, le problème (P^*) est résolu, sur l'ensemble $D - \Delta$. Il reste à examiner séparément le problème (P^*) pour $\lambda \in \Delta$.

Si l'itération considérée n'est pas la dernière itération, du groupe d'itérations, après les opérations 1° — 5°: a) Le problème (P^*) se trouvera sous la forme

$$(P^{**}) \begin{cases} x_p = \dfrac{1}{u_k^p} x_k - \sum\limits_{\substack{l \in L \\ l \neq p}} \dfrac{u_k^l}{u_k^p} x_l, \quad x_i = \dfrac{u_i^p}{u_k^p} x_k + \sum\limits_{\substack{l \in L \\ l \neq p}} \left(u_i^l - \dfrac{u_i^p}{u_k^p} u_k^l\right) x_l, \\ 1 = \dfrac{q_p}{u_k^p} x_k + \sum\limits_{\substack{l \in L \\ l \neq p}} \left(q_l - \dfrac{q_p}{u_k^p} u_k^l\right) x_l, \quad (i \in N - L,\ i \neq k), \\ x_i \geqslant 0,\ x_l \geqslant 0,\ (i \in N - L,\ l \in L), \\ f = \dfrac{s_p}{u_k^p} x_k + \sum\limits_{\substack{l \in L \\ l \neq p}} \left(s_l - \dfrac{s_p}{u_k^p} u_k^l\right) x_l = \min. \end{cases}$$

analogue à (P^*); b) il est disponible un nombre $\bar{\lambda}^*$, tel que pour chaque $\lambda \in (0, \bar{\lambda}^*)$, la marche de l'algorithme de Beale eût été exactement celle des itérations déjà exécutées du groupe considéré; c) il est disponible la solution de base (30) du problème (P^*), duale-réalisable sur l'intervale $(0, \bar{\lambda}^*)$, déterminée pendant l'itération précédente, par une solution de base duale-réalisable meilleure. Donc, on peut reprendre les opérations 1° — 5°, d'une nouvelle itération du groupe, sur le problème (P^*), trouvé sous la forme (P^{**}).

Les opérations supplémentaires, nécessaires dans le cas où l'indice p n'est pas unique, sont presque évidentes.

Pour achever la description d'un groupe d'itérations de l'algorithme, il reste à montrer, comment par l'application des opérations de l'algorithme, le problème (P) arrivera à la forme (P^*), les conditions a), b), c), étant satisfaites.

Supposons que, par une voie quelconque, on a ramené le problème (P) à la forme

$$(\pi) \begin{cases} x_i = v_i^0 + \sum\limits_{l \in \mathcal{L}} v_i^l x_l, \quad (i \in \mathfrak{N} - \mathfrak{L}) \\ x_i \geqslant 0, \quad x_l \geqslant 0, \quad (i \in \mathfrak{N} - \mathfrak{L},\ l \in \mathfrak{L}) \\ f = t_0 + \sum\limits_{l \in \mathcal{L}} t_l x_l = \min. \end{cases}$$

où $\mathfrak{N} = N$ est l'ensemble des indices des variables du problème (P) et $\mathfrak{L}$ un sous-ensemble de $\mathfrak{N}$. Cette supposition veut dire que le système d'équations du problème (P) est compatible et non redondant sur l'ensemble $D - \Delta$. Au problème (P) trouvé sous la forme (π) on attache le problème élargi:

$$(\pi^+) \begin{cases} x_i = v_i^0 x_0 + \sum\limits_{l \in \mathcal{L}} v_i^l x_l, \quad 1 = x_0 + w \sum\limits_{l \in \mathcal{L}} x_l, \quad (i \in \mathfrak{N} - \mathfrak{L}) \\ x_i \geqslant 0, \quad x_l \geqslant 0, \quad x_0 \geqslant 0, \quad (i \in \mathfrak{N} - \mathfrak{L},\ l \in \mathfrak{L}) \\ f = t_0 x_0 + \sum\limits_{l \in \mathcal{L}} t_l x_l = \min, \end{cases}$$

construite par l'introduction d'une variable artificielle x_0 non-négative, et d'une équation artificielle qui contient le nombre w, une constante positive aux valeurs aussi petites que l'on veut.

Chaque groupe d'itérations de l'algorithme, commence sur le problème élargi (π^+). En effet, le problème (π^+) est de la forme (P^*), avec $N = \{\mathfrak{N}, 0\}$, $L = \{\mathfrak{L}, 0\}$, $q_0 = l$, $q_l = w$, $(l \in \mathfrak{L})$, et pendant la seconde opération de la première itération on obtient une solution de base du problème (π^+), duale-réalisable sur un intervalle de la forme $(0, \lambda_0)$, parce qu'à cette itération $H = L$. Donc, on peut appliquer des itérations possédant quelques particularités analogues à celles rencontrées en §2. Les itérations sur le problème (π^+), continueront jusqu'à ce qu'on envisagera une itération pendant laquelle, sur un intervalle de la forme $(0, \lambda_0)$: a) l'opération 2° donne la variable principale x_0, ou b) l'opération 3° donne un programme optimal du problème élargi.

a) Dans le premier cas, l'opération 3° montre que, sur un certain intervalle, soit qu'il est disponible un programme optimal du problème élargi, soit qu'il faut trouver une solution duale-réalisable meilleure. S'il est disponible un programme optimal du problème élargi, en laissant de côté la valeur de x_0, on obtiendra un programme optimal du problème (P); dans le cas $\lambda_0 < +\infty$, après une opération (λ) sur le problème élargi, il faut commencer un nouveau groupe d'itérations. S'il n'est pas ainsi, en laissant de côté, après l'itération, l'équation qui contient x_0 et les termes en w, il faudra continuer les itérations du groupe par des

itérations sur le problème obtenu; ce dernier problème est équivalent au problème (P).

b) Dans le second cas, on établit, sur un certain intervalle soit $s_p \neq 0$, soit $s_p = 0$; l'indice p est l'indice de la variable principale. Si $s_p \neq 0$, le problème (P) ne possèdera pas un programme optimal fini; après une opération (λ), sur le problème élargi (π^{+}), il faut commencer un nouveau groupe d'itérations. Si $s_p = 0$, il faudra continuer les itérations du groupe, en procédant comme dans le cas où la variable principale était x_0.

Il restera à expliquer en détail, la manière d'agir, si l'itération déroulée d'après les règles de l'algorithme est la dernière itération d'un groupe d'itérations, quand le problème donné n'est pas encore résolu sur l'ensemble $D - \Delta$. Il y a au moins les deux alternatives suivantes: 1) appliquer l'opération (λ), nécessaire avant le commencement d'un nouveau groupe d'itérations, sur le problème obtenu, avant l'itération pendant laquelle on a trouvé l'extremité droite de l'intervalle, en laissant de côté l'équation directrice correspondante et en ajoutant une nouvelle équation directrice de la forme $1 = x_0 + w \sum_i x_i$; 2) appliquer l'opération (λ) nécessaire avant le commencement d'un nouveau groupe d'itérations, sur le problème élargi avec lequel on a commencé les itérations du groupe. D'après notre expérience de calcul manuel, il nous semble que la meilleure est la seconde alternative, car on rencontre souvent, un programme de départ obtenu par le procédé décrit dans la première alternative. D'ailleurs, la seconde alternative est plus élégante et peut-être plus simple du point de vue de la machine. Même dans la méthode de Gass-Saaty, on rencontre des cas, où le programme optimal sur un intervalle est plus loin du programme optimal sur l'intervalle voisin, que le programme de départ initial. On peut donner des exemples.

En ce qui concerne les complications dues à la nécessité de trouver un programme de départ au commencement d'un groupe d'itérations d'après nous, il sera plus simple de dérouler toutes les itérations de l'algorithme, sur le problème élargi.

5. Convergence de l'algorithme

Grâce à la convergence de l'algorithme de Beale, employé sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$, chaque groupe d'itérations contient un nombre fini d'itérations. Après chaque groupe d'itérations, par une opération (λ), on déplace l'origine des valeurs de λ, dans une racine appartenant, au moins, à une des fractions rationnelles attachées aux solutions de base du problème élargi. Le nombre de ces racines est fini, donc il y a un nombre fini d'itérations. Alors, après un nombre fini d'itérations, le problème (P) est résolu sur l'ensemble D, sauf un ensemble fini de points.

Remarques. a) L'algorithme que nous avons développé est fondé sur la méthode de Beale pour les problèmes de programmation linéaire. Cependant, parmi les opérations énoncées dans le second paragraphe, il y a deux opérations qui n'appartiennent pas à cette méthode: le critère de sortie, emprunté à la méthode duale du simplex et l'opération nécessaire si, après quelques itérations sur le problème élargi, on obtiendra son programme optimal, avec $s_p = 0$. b) Par les opérations (δ), qui suivent aux opérations (α) et (β), on n'obtient pas toujours l'intervalle maximal sur lequel les résultats de ces dernières opérations seront encore valables. Vraiment, une fraction rationnelle change son signe seulement dans le cas où la variable passe par une racine d'ordre de multiplicité impaire. Toutefois, si les intervalles avaient été déterminés à l'aide des racines de multiplicités impaires, certains intervalles pourraient contenir des points où les conclusions aient été fausses. C'est le cas rencontré, si, sur l'intervalle considéré, il n'existe pas un programme optimal, mais à l'intérieur on trouvera une racine de multiplicité impaire de l'une des fractions qui déterminent cette situation. Par conséquence, il est préférable la marche indiquée dans la texte.

6. Thoérèmes sur la structure des domaines d'optimalité

Supposons, qu'au commencement de la résolution du programme paramétrique, donné sur la forme standard les éléments des matrices A, b, c, sont des polynômes en λ. De même, supposons que les réstrictions ne contiennent parmi eux des équations redondantes. Alors, appelons point critique d'un programme linéaire paramétrique résoluble, chaque valeur $\lambda = \lambda^*$, qui satisfait au moins à une des conditions suivantes: a) il existe une forme canonique des réstrictions, qui n'est pas définie, pour $\lambda = \lambda^*$; b) le critère d'optimalité appliqué dans un voisinage assez petit du point $\lambda = \lambda^*$, donne des résultats différentes, à gauche et à droite du point considéré; c) le critère d'entrée, ou le critère de sortie, donne des résultats différents, dans les voisinages droit et gauche, du point $\lambda = \lambda^*$; d) il existe d'une côté du point $\lambda = \lambda^*$ des programmes optimales, tandis que de l'autre côte il n'existe pas tels programmes. Evidemment, tous les points critiques du programme donné, ont été déterminés pendant l'application de l'algorithme et se trouvent parmi les points de l'ensemble Δ. Il résulte donc le:

Théorème 1: *Un programme linéaire paramétrique résoluble, possède un nombre fini de points critiques.*

Mais, pendant la résolution, l'algorithme a donné aussi d'autres points, qui ne sont pas des points critiques: les racines de multiplicités paires, des numérateurs des fractions qui interviennent dans les critères

utilisés; ces points qui ont échappé à l'algorithme, seront appelés points critiques de seconde espèce. Une analyse détaillée pourrait donner des indications sur la solution du programme dans les points de Δ. Parfois, on pourrait obtenir même la solution, sans aucune opération supplémentaire; par exemple, ce sera le cas, pour les programmes considérés par Gass-Saaty.

Les points critiques déterminent sur l'ensemble D un nombre fini d'intervalles. Dans les points intérieurs de chaque intervalle, le programme a été résolu à l'aide d'une méthode pour les programmes ordinaires. On peut donc énoncer:

Théorème 2: *Si un programme linéaire paramétrique résoluble n'admet pas une dégénérescence primale ou duale, dans un intervalle déterminé par deux points critiques successifs, alors ou bien le problème possèdera un programme optimal fini unique, dans tous les points de l'intervalle, ou bien le problème ne possèdera pas un tel programme, sur l'intervalle entier.*

Les conditions qui déterminent l'ensemble des valeurs du paramètre, sur lequel une solution de base représente un programme optimal, sont, en général, des inéquations algèbriques non linéaires. Donc, à la différence du cas considéré par Gass-Saaty, il y a la proposition suivante:

Théorème 3: *En général, une solution de base d'un programme linéaire paramétrique résoluble, représente le programme optimal sur une réunion d'intervalles.*

De même, l'ensemble des valeurs de λ, sur lequel le problème ne possède pas un programme optimal fini, peut être connexe ou non.

D'après nous, une étude approfondie sur les points critiques sera bien intéressante et pourra conduire même à une nouvelle méthode pour la résolution des programmes linéaires paramétriques.

BIBLIOGRAPHIE

1. Abadie J., Wiliams R. C. — *Dual and parametric methods in decomposition*, en *Recent advances in Mathematical Programming*, Ed. Ph. Wolfe, R. L. Graves, Mc. Graw Hill, New York, 1963, p. 149—158.
2. Courtilot M. — *On varying all the parameters in a linear programming problem and sequential solution of a linear programming problem*. Op. Res. 10, 1962, p. 438—447.
3. Dantzig G. B. — *Linear Programming and Extensions*. Princeton Univ. Press, 1963, chap. 22.
4. Dragan I. — *Asupra unei clase de probleme de programare parametrică*. St. cerc. mat. Buc., T. 17, 1965, p. 445—449.
5. Dragan I. — *Un algorithme pour la résolution de certains problèmes paramétriques, avec un seul paramètre contenu dans la fonction économique*. Rev. Roum. Math. pures et appl., Buc., T. XI, 1966, p. 447—451.

6. Dragan I. — *Metoda simplex pentru anumite probleme parametrice*. St. statistică IV, Buc., 1966, p. 84—87.
7. Dragan I. — *Algoritmul lui Beale pentru programe liniare parametrice raționale*. St. cerc. mat. Buc, T. 18, 10, 1966, p. 1525—1528.
8. Финкельштейн К. В. — *Обобщение параметрической задачи Линейного Программирования*. Екон. и Мат. Методы, Т. 1, 1965, стр. 442—450.
9. Gass S. — *Linear programming: methods and applications*. Mc. Graw Hill, New York, 1958, chap. 8.
10. Gass S., Saaty T. L. — *The parametric objective function*. I. Op. Res. 2, 1954, p. 316—319.
11. — *The parametric objective function*. II. Op Res. 3, 1955, p. 395—401.
12. — *The computational algorithm for the parametric objective function*. Nav. Res. Log. Quart., 2, 1965, p. 39—45.
13. Gauthier J. M. — *Paramétrisation de la fonction économique d'un programme linéaire: un algorithme construit en utilisant le principe de décomposition de Dantzig et Wolfe*. Rev. Fr. Rech. Op. T. 6, 22, 1962, p. 1—20.
14. Graves R. L. *Parametric linear programming, dans Recent advances in Mathematical programming*. Mc. Graw Hill, 1963, p. 201—210.
15. Гольштейн Е. — *Новые направления в линейном программировании*. Советское Радио, 1966, глава 4.
16. Hadley G. — *Linear programming*. Addison-Wesley, London, 1962, chap. 12.
17. Карабегов К. И. — *Об одной параметрической задаче линейного программирования*. Журн. вычисл. Мат., Т. 3, 3, 1963, стр. 547—558.
18. Kaska J. — *On one problem of parametric programming*. Présenté Conf. E.S./T.I.M.S., Warszawa 1966.
19. Kurata R. — *Notes on parametric quadratic programming*. Journ. Op. Res., Japan, T. 8, 3, 1966, p. 150—153.
20. Kurata S. — *Primal-dual method of parametric programming and Iri's theory on network flow problems*. Journ. Op. Res. Japan, T. 2, 2, 1965, p. 104—144.
21. Kelley J. — *Parametric programming and primal-dual algorithm*. Op. Res., T. 17, 3, 1959, p. 327—334.
22. Maghout K. — *Applications de l'Algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques*. Cah. Rech. Op. T. 5, 1-2, 1963, p. 21—99.
23. Маш В. А. — *Об одной способе выбора вводимой переменной в симплексном методе линейного программирования*. Журн. вычисл. Мат. Т. 4, 2, 1962, стр. 376—379.
24. Maurin H. *Paramétrisation générale d'un programme linéaire*. Rev. Fr. Rech. Op. T. 8, 32, 1964, p. 277—292.
25. Nykovski I. — *Dwuparametryczny dualny problem liniowy*. Przeglad statystycny, T. 4, 3, 1965.
26. Нуковски И. — *Линейная задача с двупараметрической целевой функцией*. Екон. и Мат. мет., Т. 2, 4, 1966, стр. 548—557.
27. Richter K. — *Ein Verfahren zur Lösung parameterabhängiger, nichtlinearer Maximum-Probleme*. Unternehmensforschung, T. 6, 4, 1962, p. 149—166.
28. Seiffart E. — *Ein Lösungalgorythmus eines parametrischen Verteilungsproblems*. Ekon. Mat. Obzor, T. 2, 3, 1966, p. 263—270.
29. Simmonard P. — *Programmation linéaire*. Dunod, Paris, 1962, chap. 7.
30. Simons E. — *A note on parametric linear programming*. Man. Sc. T. 8, 1962, p. 355—358.*)

*) La bibliographie a été complétée le premier janvier 1967.

*) Bibliografia a fost completată la 1 ianuarie 1967.

ASUPRA STRUCTURII DOMENIILOR DE OPTIMALITATE ALE PARAMETRULUI, PENTRU PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ PARAMETRICĂ RAŢIONALĂ

Rezumat

Se întrebuinţează metoda variabilelor directoare a lui E. M. L. Beale, pentru formularea unui algoritm de rezolvare a problemelor de programare liniară parametrică, ale cărei date sînt fracţii raţionale de un parametru λ. Acest algoritm permite demonstrarea constructivă a mai multor teoreme, enunţate în ultima secţiune o lucrării. Se dă la sfîrşit o bibliografie asupra lucrărilor relative la programarea parametrică.

NOTE

CORELAŢIA LINIARĂ (C, m_p) LA PLEIADE

DE

V. NADOLSCHI şi GH. PROCOPIUC

1. Scopul prezentei lucrări este determinarea parametrilor principali ai corelaţiei (C, m_p) pentru roiul deschis al Pleiadelor. Această determinare se face prin metoda directă, mai exactă decît metoda frecvenţelor. Drept material empiric s-a folosit diagrama (C, m_p) pentru Pleiade (planşa 12 din [1]). Forma generală a acestei diagrame, în care cele 264 de puncte reprezentative formează o singură secvenţă liniară, ne arată că putem să ne limităm la calculul corelaţiei liniare respective.

2. Calculul coordonatelor carteziene ortogonale (C, m_p) ale punctelor diagramei a fost efectuat în modul următor. Diagrama a fost copiată pe calc şi introdusă, între două plăci plane de sticlă, în maşina de măsurat coordonate „Komes"-Zeiss Nr. 36603 a Observatorului Astronomic. Coordonatele punctelor au fost măsurate în sistemul arbitrar al instrumentului menţionat. În acelaşi sistem s-au măsurat şi coordonatele a trei puncte pentru care se cunoşteau C şi m_p şi anume:

$$
\begin{aligned}
&A(-0{,}5;\ 17{,}5) - (462{,}6;\ 246{,}3),\\
(1)\qquad &B(-0{,}5;\ 13{,}0) - (462{,}6;\ 174{,}8),\\
&C(+1{,}5;\ 17{,}5) - (525{,}7;\ 246{,}3).
\end{aligned}
$$

Cu ajuterul acestor puncte se deduce uşor următoarea relaţie de transformare de la sistemul arbitrar (a, b) la sistemul (C, m_p):

$$(2)\qquad C = (a - 462{,}6) : 31{,}6 - 0{,}5;\ m_p = 17{,}5 - (246{,}3 - b) : 15{,}9.$$

Folosind aceste relaţii s-au determinat indicii de culoare $C = x$ şi magnitudinile fotografice $m_p = y$ ale celor 264 de stele din roiul Pleiadelor. Aceste mărimi, precum şi mărimile x^2, y^2, xy necesare calculului parametrilor corelaţiei, sînt date în tabloul care urmează. Ultima coloană conţinînd $(x + y)^2$ este dată în vederea verificării calculelor: $\sum (x + y)^2 = \sum x^2 + \sum y^2 + 2 \sum xy$.