On peut changer le repère de telle manière que la cubique (15) prenne une forme canonique.

On peut faire aussi une classification des opérateurs quadratiques, de même que pour les correspondances ponctuelles selon les divers cas de la forme de la cubique (15). Pour le cas $n = 2$, cette classification est déjà donnée dans un travail précédent.

BIBLIOGRAPHIE

1. Creangă I. — *Asupra unor elemente invariante ale corespondenţelor punctuale între două spaţii afine.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. VI (1960), p. 643.
2. Creangă I. — *Sur une classification des correspondances ponctuelles entre deux plans.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. X (1964), p. 121.
3. Creangă I. — *Sur une algèbre attachée à un opérateur dans un espace linéaire.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. XI (1965), p. 21.

ASUPRA OPERATORILOR PĂTRATICI ÎNTR-UN SPAŢIU LINIAR

Rezumat

Se consideră operatori dintr-un spaţiu liniar R_n cu n dimensiuni, care au drept coordonate, într-o bază, forme pătratice; aceşti operatori sînt numiţi operatori pătratici. Se determină valorile caracteristice şi vectorii caracteristici (4), (5). Se ataşează acestor operatori funcţia vectorială biliniară: $x \circ y = F(x + y) - F(x) - F(y)$, care transformă spaţiul vectorial R_n într-o algebră A_p care este asociativă dacă coeficienţii formelor pătratice satisfac relaţiile de structură (11). Se cercetează divizorii lui zero în aceste algebre. Se dau interpretări geometrice şi se exemplifică în cazul spaţiului cu trei dimensiuni.

QUASIGROUPES DE CARDOSO ET PSEUDOGROUPES DE ZELMER

PAR

A. SADE (France)

1. Introduction. La notion de *quasigroupe soustractif*, rencontrée aussi par Whittaker [18] et Furstenberg [6] sous le nom de *demigroupe*, Sholander [17], Cordeiro de Silva [5], Kazim-Husain [7], Morgado [8], [9], est définie par Cardoso [2], comme satisfaisant aux axiomes suivants. Si $Q = E(\,)$,

(1) $\forall a \in E,\ \exists e,\ ae = a$, (unité à droite),

(2) $\forall a, b, c \in E,\ (ab)c = (ac)b$, (permutabilité à droite),

(3) $\forall a, b, c \in E,\ a(bc) = c(ba)$, (loi de Grassmann),

(4) $\forall a \in E,\ aa = e$, (unipotence).

Un *pseudogroupe* de Zelmer [19], [20], [21], est un système multiplicatif, $S = E(\,)$, satisfaisant aux axiomes

(5) $\forall a \in E,\ \exists! e,\ ae = a$, (unicité de l'élément neutre à droite),

(2) $\forall a, b, c \in E,\ (ab)c = (ac)b$, (permutabilité à droite),

(6) $\forall a, b, c \in E,\ a(bc) = [(ab)c]c$, (loi de Zelmer),

(7) $\forall a \in E,\ \exists a' \in E,\ aa' = e$, (existence d'un inverse à droite).

Un *quasigroupe* de Cardoso, [3], [4], est un groupoïde $K = E(\,)$ satisfaisant les axiomes

(1) $\forall a \in E,\ \exists e,\ ae = a$ (neutre à droite),

(8) $\forall a, b \in E,\ ax = b \rightleftarrows (eb)(ea) = x$, (quotient unique à droite),

(9) $\forall a, b \in E,\ ya = b \rightleftarrows b(ea) = y$, (unicité du quotient à gauche).

Toutes ces structures sont en connexion avec des structures connues, (groupes, [9], quasigroupes de Bruck à *propriété inverse*, [15], *quasigroupes demi-symétriques* (*A-Map* s'ils sont idempotents), introduits par l'auteur, [10], [11]).

Schein, [16], a prouvé que tout pseudogroupe de Zelmer a pour loi de composition $ab = a.b.b$, où $G = E(.)$ est un groupe abélien diagonal. La démonstration utilise les quatre axiomes (2), (5), (6), (7).

On se propose ici de montrer que les quasigroupes soustractifs et les pseudogroupes de Zelmer entrent dans une classe commune plus générale dont chaque membre est associé à un groupe (par isotopie). Cette correspondance, dans le cas particulier des pseudogroupes, fournit une démonstration indépendante du théorème de Schein; cette démonstration n'utilise pas l'axiome (2), qui se trouve ainsi être une conséquence des trois autres.

La classe des quasigroupes de Cardoso est plus large que celle des quasigroupes soustractifs, et la contient, [15]. On verra en effet que tout quasigroupe de Cardoso résulte (par isotopie et par parastrophie) d'un quasigroupe de Bruck à *propriété inverse*, [1]. La connexion des structures précédentes avec les quasigroupes *demi-symétriques* a déjà été signalée par l'auteur, ([14], p. 133).

2. **Définitions.** $G = E(.)$ étant un groupoïde avec le signe opératoire $(.)$ sur l'ensemble E, la *translation à droite* Δ_a, relative à l'élément a de E est l'application, ([14], N°. 1, p. 121),

$$\forall x \in E,\ \Delta_a = (x \to x.a).$$

La *translation à gauche* est

$$\forall x \in E,\ \Gamma_a = (x \to a.x).$$

Le groupoïde G est *diagonal*, ([12], p. 210), si l'équation $x^2 = a$ a une solution et une seule en x quel que soit a dans E.

Un *quasigroupe* $Q = E()$ sur l'ensemble E est un système multiplicatif pour lequel, $\forall a \in E$, Δ_a et Γ_a sont dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_E$ ([14], p. 121). *L'adjoint*, $R = E(.) = QP^{23}$, d'un quasigroupe $Q = E()$ est le quasigroupe ([12], N°. 2, p. 200), satisfaisant

$$\forall a, b, c \in E,\ ab = c \rightleftarrows a.c = b.$$

Le *réciproque*, $H = E(*) = QP^{13}$, est défini, ([10], N°. 1.2, p. 74), par

$$\forall a, b, c \in E,\ ab = c \rightleftarrows a = c * b.$$

Le *transposé* ([13], p. 134), $U = E(\bigcirc) = QP^{123}$, de Q est le quasigroupe défini par

$$\forall a, b, c \in E,\ ab = c \rightleftarrows c \bigcirc a = b.$$

L'adjoint, le réciproque et le transposé de Q sont dits *parastrophiques* de Q, [10]. Deux groupoïdes, $G = E()$ et $R = E(.)$ sont *isotopes*, ([12], p. 199), s'il existe trois bijections appartenant au groupe symétrique $\mathfrak{S}_E$, (p, q, r), telles que

$$\forall x, y, z \in E,\ xy = z \rightleftarrows (xp).(yq) = zr.$$

Un quasigroupe, $Q = E()$, est *demi-symétrique*, ([11], p. 630, N°. 5, [10], p. 92, N°. 18.7), s'il satisfait à l'identité

(10) $$\forall x, y, z \in E,\ (xy)x = y,$$

ou, ce qui revient au même, $\forall a \in E$, $\Delta_a \Gamma_a = 1$, ou encore, $ab = c \rightleftarrows ca = b \rightleftarrows bc = a$, ce qui exprime qu'il coïncide avec son transposé.

Un quasigroupe à *propriété inverse et neutre bilatère de* Bruck, ([1], p. 24, Lemme 1, iv), est un quasigroupe $Q = E()$ satisfaisant aux axiomes

(11) $\forall a \in E,\ \exists! e,\ ae = ea = a$, (neutre bilatère unique),

(12) $\forall a \in E,\ \exists! a^{-1},\ aa^{-1} = a^{-1}a = e$, (inverse bilatère),

(13) $\forall a, b \in E,\ (ab)b^{-1} = a$,

(14) $\forall a, b \in E,\ a^{-1}(ab) = b$,

où (12) résulte des trois autres.

Un semi-groupe à *translation identique*, ([11], p. 650, N° 26, ii) est un groupoïde satisfaisant à l'identité

(15) $$\forall x, y \in E,\ xy = x,\ (\text{ou } \Delta_y = 1).$$

3. **Quasigroupes soustractifs.** *Si $Q = E()$ est un quasigroupe soustractif,*

(i), *Q est self adjoint,*

(ij), *Q est réciproque d'un groupe abélien, $G = E(*)$,*

(ijj), *la loi de composition de Q est $xy = x * y^{-1}$,* (Morgado),

(iv) *Q est isotope de G par $Q = G(1, q, 1)$, avec $q = (x \to x^{-1})$,*

(v) *Q est un quasigroupe de* Cardoso.

Preuve. (i). D'après la proposition N° 4 de [2], p. 9, on a

(16) $$\forall a, b, x \in E,\ ax = b \rightleftarrows ab = x,$$

donc $QP^{23} = Q$.

(ij). Soit $R = E(*) = QP^{13}$ le réciproque de Q; donc

(17) $$\begin{aligned} ax = b &\rightleftarrows b * x = a \\ ab = x &\rightleftarrows x * b = a, \end{aligned}$$

d'après (16),

$$b * x = a \rightleftarrows x * b = a,$$

ainsi, R est abélien. Mais (3), en posant $bc = x$, $ax = y$, $ba = z$, devient $cz = y$. Donc, sur le réciproque,

$$\begin{aligned} &x * c = b \wedge y * x = a \wedge z * a = b \Rightarrow y * z = c, \\ &x * c = z * a \wedge y * x = a \Rightarrow y * z = c, \\ &\forall x, y, z \in E,\ x * (y * z) = z * (y * x), \end{aligned}$$

et, puisque R est abélien,

$$x \divideontimes (y \divideontimes z) = (x \divideontimes y) \divideontimes z.$$

(ijj). $G = E(\divideontimes)$ étant un groupe

$$b \divideontimes x = a \rightleftarrows b = a \divideontimes x^{-1}.$$

D'après (17)

$$ax = b \rightleftarrows b = a \divideontimes x^{-1},$$

(18)

$$xy = x \divideontimes y^{-1},$$

ce qui est équivalent à $a \divideontimes b = a(ib)$, formule de Morgado [9]. On vérifie sans peine que tout quasigroupe satisfaisant (18) obéit aux axiomes des demi-groupes de Furstenberg.

(iv). Si H est isotope du groupe abélien G par $H = E(.) = G(1, q, 1)$ on aura

$$\forall a,\ b \in E,\ a \divideontimes b = a\,.\,(bq)$$

et puisque $q = (x \to x^{-1})$,

$$x \divideontimes y^{-1} = x\,.\,[(y^{-1})^{-1}] = x\,.\,y = xy,$$

donc H coïncide avec Q.

(v). D'après (2)

$$(eb)\,(ea) = [e\,(ea)]\,b.$$

D'après (3), (4)

$$(eb)\,(ea) = [a\,(ee)]\,b = ab.$$

Donc, d'après (16),

$$ax = b \rightleftarrows x = ab = (eb)\,(ea), \text{ ce qui est (8).}$$

Ensuite, d'après [2], p. 9, Propos. 4,

$$ya = b \rightleftarrows y = b(ea), \text{ ce qui est (9).}$$

Ainsi Q satisfait à tous les axiomes (1, 8, 9) des quasigroupes de Cardoso.

La réciproque n'est pas vraie. Par exemple, si $G = E(\divideontimes)$ est un groupe non abélien, le quasigroupe $H = E(.) = G(1, q, 1)$ dont la loi de composition est $x\,.\,y = x \divideontimes y^{-1}$ satisfait (1), (8) et (9) mais n'est pas soustractif car il ne remplit pas la condition (2).

4. Pseudogroupes soustractifs. (i) *Pour qu'un quasigroupe soustractif soit un pseudogroupe de Zelmer il faut et il suffit qu'il soit isotope d'une puissance du groupe du 3ième ordre.*

(ij). *Pour qu'un pseudogroupe soit soustractif il faut et il suffit qu'il soit unipotent.*

Preuve. (i) Du théorème de Schein [16], (Cf N⁰. 1, supra), on déduit immédiatement que tout pseudogroupe de Zelmer est isotope d'un groupe abélien $G' = E(.)$ par

(19) $$S = G'(1, q', 1), \quad q' = (x\,.\,x \to x) \in \mathfrak{S}_E.$$

Supposons que $S = E(\,)$ soit en même temps soustractif. Alors S sera d'une part isotope d'un groupe abélien $G = E(\divideontimes)$ par

(3, iv) $$S = G(1, q, 1), \quad q = (x \to x^{-1}),$$

d'autre part isotope de G' selon (19). Eliminant S,

$$G = G'(1, q'\,q^{-1}, 1).$$

Mais deux groupes G et G' qui coïncident par une isotopie de Suschkewitsch $(1, m, 1)$ sont confondus et $m = 1$; or $q^{-1} = q = (x \to x^{-1})$, donc $m = 1 = (x\,.\,x \to x)\,(x \to x^{-1}) = (x\,.\,x \to x^{-1})$,

ou $$x\,.\,x = x^{-1}, \quad (x\,.\,x)\,.\,x = 1.$$

Ainsi, tout élément non identique de G est du 3ième ordre.

Réciproquement, si $S = E(\,)$ est le quasigroupe soustractif, de loi $xy = x\,.\,y^{-1}$, construit comme réciproque d'un groupe abélien $G = E(.)$ satisfaisant à la condition $\forall\, x \in E,\ (x\,.\,x)\,.\,x = 1$, on aura $y\,.\,y = y^{-1}$, d'où

(20) $$xy = x\,.\,y^{-1} = x\,.\,(y\,.\,y),$$

et d'après [16], S sera un pseudogroupe.

On peut réaliser S en lui donnant pour loi de composition

$$VV' = V - V' \quad (V = (a_1, a_2, \ldots), \text{ mod } 3),$$

dans un espace vectoriel sur $Z/3$.

(ij). La condition est nécessaire, d'après (4). Elle est suffisante car, puisque $xy = x\,.\,y\,.\,y$, on aura

$$1 = xx = x\,.\,x\,.\,x \rightleftarrows x\,.\,x = x^{-1} \rightleftarrows xy = x\,.\,y^{-1},$$

ce qui est bien la loi de composition d'un quasigroupe soustractif.

5. **Pseudogroupes d'ordre** m. Définissons sur tout groupoïde $G = E(\,)$ l'opération ax_m, où m est un entier rationnel et $a, x, b \in E$, par

(21) $$ax_0 = a,\ ax_1 = ax,\ ax_{m+1} = (ax_m)x \text{ et } ax_{-m} = b \rightleftarrows a = bx_m.$$

Dans un groupe, de signe opératoire (.), représentons par $x^{\cdot m}$ la $m^{\text{ième}}$ puissance de x. Alors

Théorème. *Tout groupoïde $Q = E(\,)$ satisfaisant* (5), (7) *et*

(21) $$\forall a, b, c \in E, \quad a\,(bc) = (ab)c_m, \quad m \text{ fixe } \in Z \setminus 0,$$

(i). *a pour loi de composition*

(22) $$xy = x\,.\,y^{\cdot m}, \quad G = E(.) \text{ étant un groupe quelconque,}$$

(ij). *est un quasigroupe isotope de G par*

(23) $$Q = G(1, q, 1), \text{ où } q = (x^{\cdot m} \to x) \in \mathfrak{S}_E \text{ est un automorphisme de } G \text{ et}$$

réciproquement.

(ijj). *Si $m = -1$, Q est soustractif; si $m = 2$, Q est un pseudogroupe de* Zelmer *et, dans les deux cas, G est abélien.*

(iv). $[(5) \wedge (6) \wedge (7)] \Rightarrow (2)$.

Preuve. Si m est positif, (21) s'écrit, Δ étant la translation sur Q,

$$\Delta_{bc} = \Delta_b (\Delta_c)^m. \tag{24}$$

Si $m = 0$, $a(bc) = ab \rightleftarrows \Delta_{bc} = \Delta_b$.

Si m est négatif et égal à $-p$, (21) devient

$$[a(bc)]\, c_p = ab \rightleftarrows \Delta_{bc} (\Delta_c)^p = \Delta_b,$$

ou

$$\Delta_{bc} = \Delta_b (\Delta_c)^{-p} = \Delta_b (\Delta_c)^m.$$

Ainsi (24) est vraie $\forall m \in Z$.

(i). Soit C le complexe des translations à droite sur Q.

$$C = \{\Delta_x \mid x \in E\}.$$

I), si $b = e$, $\Delta_b = \Delta_e = 1$ [d'après (5)], et (24) devient

$$\Delta_{ec} = (\Delta_c)^m.$$

Mais $ec \in E$, $\Delta_{ec} \in C$, donc $(\Delta_c)^m \in C$, $\forall c \in E$.

Ainsi C contient, avec tout élément Δ, sa puissance $m^{\text{ième}}$.

II) Si b' est un inverse à droite, (7), de b, $bb' = e$, et si $c = b'$, on a $\Delta_{bc} = \Delta_e = 1$, d'où $1 = \Delta_b (\Delta_{b'})^m$.

D'après I) $(\Delta_{b'})^m \in C$, donc C contient, avec tout élément (Δ_b), son inverse $(\Delta_{b'})^m$.

III) Si dans (24) on remplace c par un inverse à droite, c', elle devient

$$\Delta_{bc'} = \Delta_b (\Delta_{c'})^m$$

ou, d'après II),

$$\Delta_{bc'} = \Delta_b (\Delta_c)^{-1}.$$

Comme $bc' \in E$, $\Delta_{bc'} \in C$ et $\Delta_b (\Delta_c)^{-1} \in C$.

Ainsi C contient, en même temps que deux éléments quelconques (Δ_b) et (Δ_c), le produit $\Delta_b (\Delta_c)^{-1}$. C'est donc un groupe.

L'ensemble $C = \{\Delta\}$ des translations de Q étant un groupe de permutations, si l'on définit sur E une loi de composition $E(.)$ par

$$x \,.\, y = z \rightleftarrows \Delta_x \Delta_y = \Delta_z, \tag{25}$$

$G = E(.)$ sera le groupe abstrait dont C est une représentation. Alors, d'après (25), $\Delta_b (\Delta_c)^m = \Delta_{b \,.\, c^{\cdot m}}$ et, d'après (24)

$$\Delta_{bc} = \Delta_{b \,.\, c^{\cdot m}} \rightleftarrows bc = b \,.\, c^{\cdot m},$$

ce qui est (22).

(ij). Il revient au même de dire que Q est isotope du groupe $G = E(.)$ par

$$Q = E(\,) = G(1, q, 1), \quad q = (x^{\cdot m} \to x).$$

Pour que $Eq = E$, c'est-à-dire $q \in \mathfrak{S}_E$, il faut et il suffit que q soit $1-1$ sur E.

Réciproquement, si $G = E(.)$ est un groupe quelconque, le quasigroupe $R = E(\,)$ défini par (22) satisfait visiblement (5) et (7); pour qu'il satisfasse (21) il faut et il suffit que

$$\forall a, b, c \in E, \; a \,.\, (b \,.\, c^{\cdot m})^{\cdot m} = (a \,.\, b^{\cdot m}) \,.\, (c^{\cdot m})^{\cdot m}$$

ou, en désignant $c^{\cdot m}$ par d, ce qui est légitime puisque q est bijectif

$$\forall b, d \in E, \; (b \,.\, d)^{\cdot m} = b^{\cdot m} \,.\, d^{\cdot m}.$$

Cela exprime que q est un endomorphisme de G, et comme q est $1-1$ sur E, c'est un automorphisme.

Si $m = 0$, $q = (x^0 \to x) = (e \to x)$ ne peut être un automorphisme que si $|E| = 1$. En fait, dans ce cas, (21) devient

$$a(bc) = ab \rightleftarrows bc = b.$$

Le groupoïde Q est un semigroupe à translation identique $xy = x$. Mais à cause de (5), tout élément, y, est égal à l'unité unique et $\{E\} = \{e\}$. Le théorème reste vrai, mais G dégénère et devient le groupe du 1er ordre.

(ijj). Si $m = -1$, l'automorphisme $(x \,.\, y)^{-1} = x^{-1} \,.\, y^{-1}$, à cause de $(x \,.\, y)^{-1} = y^{-1} \,.\, x^{-1}$, entraîne la commutativité de G. Donc (3, ij, ijj), Q est soustractif.

Si $m = 2$, l'automorphisme $(x \,.\, y)^{\cdot 2} = x \,.\, x \,.\, y \,.\, y$ entraîne encore la commutativité de G car $x \,.\, x \,.\, y \,.\, y = x \,.\, y \,.\, x \,.\, y \Rightarrow x \,.\, y = y \,.\, x$. Comme (2) devient $a \,.\, b \,.\, b \,.\, c \,.\, c = a \,.\, c \,.\, c \,.\, b \,.\, b$, elle est satisfaite et Q est un pseudogroupe de Zelmer. On retrouve le théorème de Schein [16].

(iv). Tout ce qui précède découle de (5), (7) et (21) seulement, et a été établi sans supposser (2). La commutativité de G, dans le cas $m = 2$, entraîne $\Delta_b \Delta_c = \Delta_c \Delta_b$, ou $(ab)\,c = (ac)\,b$, ce qui est (2). Ainsi (2) est redondante dans la définition des pseudogroupes.

Remarque. Pour qu'un quasigroupe satisfaisant (5), (7) et (21) pour $m = r$, satisfasse aux mêmes axiomes pour $m = s$, il faut et il suffit que

$$\forall x \in E, \; q = (x \to x^{\cdot r}) = (x \to x^{\cdot s}),$$

ou $x^{\cdot r} = x^{\cdot s}$, $x^{\cdot (r-s)} = 1$, ce qui signifie que l'ordre d'un élément quelconque de G est un diviseur de $(r - s)$. Si $r = 2$, $s = -1$. $r - s = 3$ et l'on retrouve N°4, i.

6. **Quasigroupes de Cardoso.** (i) *Pour qu'un quasigroupe de* Cardoso *K, soit soustractif il faut que Γ_e soit un automorphisme de K.*

(ij). *Tout quasigroupe de Cardoso, $K = E(\,)$, satisfait*

$$\forall a, b \in E, \; \Delta_{ab} \Delta_{ba} = 1,$$

(ijj). *est isotope d'un quasigroupe demi-symétrique, D, par*

$$K(\Gamma_e, 1, 1) = D,$$

(iv). *est réciproque et isotope d'un quasigroupe à inverse bilatère avec la propriété inverse, $S = E(.)$, et réciproquement, l'on a*

$$xy = x \,.\, y^{-1}, \text{ et } K = S(1, q, 1),\ q = (y \to y^{-1}),$$

où y^{-1} est l'inverse de y dans S.

Preuve. (i). Soit $K = E()$ un quasigroupe de Cardoso. Pour qu'il soit soustractif, il faut que (2) soit satisfaite. En particulier, si $a = e$, $c = ed$, $(cb)(ed) = [e(ed)]b$.

Mais $e(ed) = d$, ([3], Propos. 1), donc

$$(eb)(ed) = db = e(bd), \quad \text{([3], Propos. 3)}$$
$$(b\Gamma_e)(d\Gamma_e) = (bd)\Gamma_e.$$

(ij). On a $\Delta_{ab} = [x \to x(ab)]$.
Posons $x(ab) = c$, donc, d'après (9),

$$x = c[e(ab)].$$

D'après [3], Propos. 3, $x = c(ba)$, donc

$$\Delta_{ab} = [c(ba) \to c] = (\Delta_{ba})^{-1}.$$

(ijj). Posons $ex = x'$. On sait ([3], Propos. 1) que $e(ex) = x$, ou $(x')' = x$. Ainsi (8) s'écrit $ab = c \rightleftarrows c'a' = b$, et par itération

$$ab = c \rightleftarrows c'a' = b \rightleftarrows b'(c')' = a' \rightleftarrows b'c = a'.$$

L'application $(a \to a') = (a \to ea)$ est égale à la translation Γ_e.

Donc $\quad ab = c \rightleftarrows (b\Gamma_e)c\,c = a\Gamma_e$.

Soit $R = E(\odot) = KP^{123}$ le transposé de K. Alors

23) $$ab = c \rightleftarrows (b\Gamma_e)c = a\Gamma_e \rightleftarrows (a\Gamma_e) \odot (b\Gamma_e) = c$$

ou $$K(\Gamma_e, \Gamma_e, 1) = R.$$

Or le produit des trois composantes de l'isotopie, $1\,\Gamma_e\Gamma_e = (\Gamma_e)^2 = 1$ est identique puisque $(x')' = x$, donc, ([13], N° 14, p. 141), K est isotope d'un quasigroupe demi-symétrique D

$$K(\Gamma_e, 1, 1) = D.$$

(On comparera avec [14], p. 133, II)

(iv). I). Soit $S = E(.)$ le réciproque de K, $S = KP^{13}$. Sur S l'axiome (1) de définition de K devient

$$\forall a \in E,\ a \,.\, e = a.$$

La propriété [3], propos. 2, $aa = e$ devient $e\,.\,a = a$; donc

(11) $$\forall a \in E,\ e \,.\, a = a \,.\, e = a$$

Ainsi S est un quasigroupe avec neutre bilatère e.

II). L'axiome (8) peut s'écrire

$$\forall a, b \in E,\ eb = y \wedge ea = z \wedge ax = b \Rightarrow x = yz.$$

Cela devient sur le réciproque

$$y \,.\, b = e \wedge z \,.\, a = e \wedge b \,.\, x = a \Rightarrow x \,.\, z = y;$$

et l'axiome (8) se traduit, sur S, par

(27) $$\forall b, z \in E,\ z \,.\, (b \,.\, x) = e \rightleftarrows (x \,.\, z) \,.\, b = e.$$

En particulier, si $z = e$

$$b \,.\, x = e \rightleftarrows x \,.\, b = e$$

ou $$x = b^{-1} \rightleftarrows b = x^{-1} \rightleftarrows (x^{-1})^{-1} = x.$$

S possède donc un inverse bilatère

(12) $$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

III). L'axiome (9) devient, en posant $ea = z$,

$$\forall a, b, y \in E,\ ya = b \wedge ea = z \Rightarrow bz = y.$$

Cela devient, sur le réciproque,

$$b \,.\, a = y \wedge z \,.\, a = e \Rightarrow y \,.\, z = b,$$
$$\forall a, b, z \in E,\ z \,.\, a = e \Rightarrow (b \,.\, a) \,.\, z = b$$

ou enfin

(13) $$(b \,.\, a) \,.\, a^{-1} = b.$$

Par itération de (27),

$$b \,.\, x = z^{-1} \rightleftarrows x \,.\, z = b^{-1} \rightleftarrows z \,.\, b = x^{-1},$$

donc $$(b \,.\, x)^{-1} = z \text{ et } x^{-1} \,.\, b^{-1} = (z \,.\, b) \,.\, b^{-1},$$

ou, d'après (13), $x^{-1} \,.\, b^{-1} = z$; donc

(28) $$(b \,.\, x)^{-1} = x^{-1} \,.\, b^{-1}.$$

Appliquant (28) à (13),

$$b^{-1} = a \,.\, (a^{-1} \,.\, b^{-1}),$$

ou, d'après (12)

(14) $$a^{-1} \,.\, (a \,.\, b) = b.$$

Les conditions (11), (13), (14) définissent un quasigroupe de Bruck. Enfin, puisque K est réciproque de S,

$$\forall x, y, z \in E,\quad z \,.\, y = x \rightleftarrows xy = z.$$

Mais, dans S, $z = x.y^{-1}$, donc $xy = x.y^{-1}$, ce qui est évidemment équivalent à $K = S(1, q, 1)$, $q = (x \to x^{-1})$ dans S.

Réciproquement, si $S = E(.)$ est un I. P. quasigroupe à neutre bilatère, e, et si l'on définit $Q = E()$ par $xy = x.y^{-1}$, on aura

$$xe = x.e^{-1} = x. \tag{1}$$

Puis, $ey = e.y^{-1} = y^{-1}$, donc

$$ax = b \rightleftarrows a.x^{-1} = b \rightleftarrows x = b^{-1}.a = b^{-1}a^{-1} = (eb)(ea). \tag{8}$$

Enfin

$$ya = b \rightleftarrows y.a^{-1} = b \rightleftarrows y = b.a = ba^{-1} = b(ea). \tag{9}$$

Donc Q est un quasigroupe de Cardoso.

Remarque. Un quasigroupe demi-symétrique n'est pas nécessairement isotope d'un I.P. quasigroupe. *L'univers des quasigroupes de* Cardoso *à une isotopie près est donc inclus dans celui des quasigroupes demi-symétriques.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Bruck R. H., *Some results in the theory of quasigroupes.* Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 19–52.
2. Cardoso I. M., *Quasigroupos subtractivos.* Gaz. Mat. Lisboa, *24*, Nr. 90–91, (1963), 7–10.
3. — *Sôbre uma classe de loops à direita.* Gac. Mat. Madrid *17*, (1965), 184–186.
4. — & Carneiro D. S. A., *Non associative structures*, Math. Magazine, *36*, (1963) 126–127.
5. Cordeiro de Silva E., *Um teorema sobre quasigrupos subtractivos.* Gaz. Mat. Lisboa, *25*, Nr. 94–95, (1964), 18–19.
6. Fürstenberg H., *The inverse operation in groups.* Proc. Amer. Math. Soc. *6*, (1955) 991–997.
7. Kazim M. A., Husain F., *On the postulates defining a subtractive group*, Math. Stud. *31*, (1963) 95–107.
8. Morgado J., *Definição de quasi grupo subtractivo por um único axioma*, Gaz. Mat. Lisboa, *24* (1963), Nr. 92–93, pp. 18–19.
9. — *Nota sobre quasigrupos subtractivos*, Gaz. Mat. Lisboa, *24*, (1963), Nr. 92–93 pp. 11–17.
10. Sade A., *Quasigroupes parastrophiques. Expressions et identités.* Math. Nachr. *20*, (1959), 73–106.
11. — *Théorie des systèmes demosiens de groupoïdes.* Pacific J., Math. *10* (1960), 625–660.
12. — *Le groupe d'anti-autotopie et l'équation* $Q(X, X^{-1}, 1) = Q = QP^{12}$. J. Reine, Angew. Math. *216*, (1964), 199–214.
13. — *Quasigroupes demi-symétriques.* Ann. Soc. Sci. Bruxelles, *79*, (1965), 133–143.
14. — *Critères d'isotopie d'un quasigroupe avec un quasigroupe demi-symétrique*, Univer. Lisboa Revista Fac. Sci. 2° Ser A, *11* (1965), 121–136.
15. — *Analyse de* [3] dans Zentralblatt f. Math.
16. Schein B. M., *Zamechanija o stat'e V. Zelmer*, Anal. ştiinţ. Univ. Iaşi, *10*, (1964), 265–268,
17. Sholander M., *On the existence of the inverse operation.* Amer J. Math. *59*, (1949), 211–224.
18. Whittaker J. V., *On the structure of Half-groups.* Can. J. Math. *11*, (1959), 651–659.

19. Zelmer V., *Pseudogroups and pseudorings* I. Mathematica, Cluj, *5*, (28), 1, (1963), 137–172.
20. — II, Ibid. *5*, (28), 2, (1963), 321–342.
21. — *Pseudogrupuri*, Anal. ştiinţ. Univ. Iaşi, (S.N.) 9 (1963), 2, 323–356.

CVASIGRUPURI CARDOSO ŞI PSEUDOGRUPURI ZELMER

Rezumat

Nota pune în evidenţă legătura dintre noţiunile de cvasigrup sustractiv (definită de Cardoso prin (1)—(4)), pseudogrup Zelmer (definit prin (5), (2), (6), (7), cvasigrup Cardoso (definit prin (1), (8), (9)), şi legătura acestora cu cvasigrupurile Bruck cu proprietate inversă (definite de (11)—(14)).

Doi grupoizi $G = E()$ şi $R = E(.)$ se numesc izotopi dacă există trei bisecţii p, q, r, aparţinînd grupului simetric $\mathfrak{S}_E$, astfel că: $\forall x, y, z \in E$, $xy = z \iff (xp).(yq) = zr$.

Se demonstrează, printre alte proprietăţi, că: Un cvasigrup sustractiv este un cvasigrup Cardoso. Pentru ca un cvasigrup sustractiv să fie un pseudogrup Zelmer este necesar şi suficient ca el să fie izotop al unei puteri a grupului de ordin 3; pentru ca un pseudogrup să fie sustractiv este necesar şi suficient să fie unipotent. Definind într'un grupoid $G = E()$ operaţia ax_m prin (21) şi notînd $x^{\cdot m}$ puterea m-a într'un grup cu operaţia (.), se demonstrează: *Teoremă.* Orice grupoid $Q = E()$ ce satisface (5), (7), (21): (i) are ca lege de compunere (22), unde G este un grup oarecare; (ij) este un cvasigrup izotop al lui G prin (23), unde q este un automorfism al lui G şi reciproc; (ijj) dacă $m = -1$, Q este sustractiv, dacă $m = 2$, Q este un pseudogrup Zelmer şi, în ambele cazuri, G este abelian; (iv) $(5) \wedge (6) \wedge (7) \Rightarrow (2)$. Se mai demonstrează că: (i) Pentru ca un cvasigrup Cardoso K să fie sustractiv este suficient ca Γ_a să fie un automorfism al lui $K(x\Gamma_a = ax, x\Delta_a = xa)$; (ij) Orice cvasigrup Cardoso satisface $\Delta_{ab}\Delta_{ba} = 1$ şi (ijj) este izotop al unui cvasigrup demi-simetric D prin $K(\Gamma_a, 1, 1) = D$.