HOMOMORFISME ÎN INELE SLABE

DE

TUDORA LUCHIAN

Comunicare prezentată la al III-lea Congres Interbalcanic al Matematicienilor din 12—17 septembrie 1965

1. Noţiunea de inel slab, introdusă de Al. Climescu în [1], apoi în [2] într-o formă mai generală, se defineşte în felul următor:

Se numeşte inel slab R un grup aditiv abelian în care există o a 2-a operaţie, înmulţirea, notată „.", ce satisface

$$x \,.\, 0 = x\varphi + c, \qquad (2) \qquad 0 \,.\, x = x\psi + c, \tag{1}$$

— unde φ, ψ sînt endomorfisme ale grupului aditiv R, c un element constant din R (din (1), (2) rezultă $c = 0 \,.\, 0$) — iar cele două operaţii sînt legate prin legile de distributivitate:

$$x \,.\, (y + z) + x \,.\, 0 = x \,.\, y + x \,.\, z, \tag{3}$$

$$(y + z) \,.\, x + 0 \,.\, x = y \,.\, x + z \,.\, x. \tag{4}$$

Se obţin inelele obişnuite în cazul particular cînd $\varphi = \psi = 0$ endomorfismul nul şi $c = 0$.

Din definiţia inelului slab, se deduc relaţiile:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) . \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum_{i,j} (x_i \,.\, y_j) - (n-1) \sum_{i=1}^{m} (x_i \,.\, 0) -$$

$$- (m-1) \sum_{j=1}^{n} (0 \,.\, y_j) + (m-1)(n-1)\, c = \sum_{i,j} (x_i \,.\, y_j) - \tag{c.1}$$

$$- (n-1) \sum_{i=1}^{m} x_i \varphi - (m-1) \sum_{j=1}^{n} y_j \psi + (1 - mn)\, c;$$

$$(-a) \,.\, b = -(a \,.\, b) + 2\,(0 \,.\, b); \tag{c.2}$$

(c.2') $a.(-b) = -(a.b) + 2(a.0)$;

(c.3) $(a-b).z = a.z - b.z + 0.z$;

(c.3') $z.(a-b) = z.a - z.b + z.0$.

Dintr-un inel obişnuit $R^{\times}$ se poate construi un inel slab $R^{\cdot}$ păstrînd grupul aditiv al lui $R^{\times}$ şi definind o nouă înmulţire „.“ prin

(5) $$x.y = x \times y + x\varphi + y\psi + c,$$

unde $x \times y$ este înmulţirea din $R^{\times}$ iar φ, ψ şi c au semnificaţia de mai sus. Reciproc, dîndu-se inelul slab $R^{\cdot}$, lui îi corespunde un inel obişnuit $R^{\times}$ avînd acelaşi grup aditiv iar înmulţirea definită de

(5') $$x \times y = x.y - x.0 - 0.y + 0.0.$$

Deci unui inel slab $R^{\cdot}$ i se poate asocia în mod biunivoc un inel obişnuit $R^{\times}$.

Introducerea noţiunii de inel slab sugerează o serie de probleme, dintre care unele au fost tratate de Al. Climescu [1], [2] şi de autoarea prezentei Note, [3], [4], [5]. În Nota de faţă se va schiţa teoria homomorfismelor în inele slabe.

2. O submulţime A a unui inel slab $R^{\cdot}$ se numeşte subinel slab dacă este subgrup aditiv în $R^{\cdot}_{+}$ şi este închisă pentru înmulţirea „.“. Dacă A este subinel slab în $R^{\cdot}$, atunci în mod necesar

(6) $$\begin{cases} 0.0 = c \in A, \\ 0.y = y\psi + c \in A \Rightarrow y\psi \in A, \ \forall y \in A, \\ x.0 = x\varphi + c \in A \Rightarrow x\varphi \in A, \ \forall x \in A, \\ \text{din (5)} \Rightarrow x \times y = x.y - x\varphi - y\psi - c \in A \end{cases}$$

şi ultima relaţie arată că relaţiile (6) sînt şi suficiente pentru ca un subgrup aditiv al lui $R^{\cdot}_{+}$ să fie subinel slab; aşa că avem

Lema 1. O submulţime A este subinel slab în $R^{\cdot}$ atunci şi numai atunci cînd $A^{\times}$ este subinel în inelul obişnuit asociat $R^{\times}$, A conţine elementul c şi A_{+} este invariant la endomorfismele φ şi ψ.

O submulţime H a unui inel slab $R^{\cdot}$ se numeşte *ideal slab drept* dacă:

1° H este un subgrup H_{+} al grupului aditiv R_{+};

2° $hr - 0.r \in H$, oricare ar fi $h \in H$ şi $r \in R$.

Un ideal drept slab H are în mod necesar proprietatea că *grupul său aditiv H_{+} este invariant la endomorfismul φ*. În adevăr, dacă în 2° punem $r = 0$, si ţinem seama de (1), avem

$$h.0 - 0.0 = h\varphi + c - c = h\varphi \in H, \ \forall h \in H.$$

Analog se defineşte un *ideal slab stîng*, prin 1° şi

$$2'. \quad r.h - r.0 \in H, \quad \forall h \in H, \quad \forall r \in R$$

şi aceasta implică H_{+} subgrup invariant la endomorfismul ψ. Un *ideal slab bilater* se defineşte prin 1°, 2°, 2' şi este, deci, ca subgrub aditiv, invariant la endomorfismele φ şi ψ. Acestei definiţii satisfac, în mod banal, inelul slab $R^{\cdot}$ şi submulţimea formată numai din zero (ideale slabe improprii). O consecinţă imediată a definiţiei idealului slab este următoarea:

Consecinţă. Dacă H este ideal slab drept (stîng, bilater) în $R^{\cdot}$, atunci H este ideal slab drept (stîng, bilater) şi în orice subinel slab A ce-l conţine, H ideal $\subset A$ subinel $\subset R$.

Se ştie că, în inelele obişnuite, orice ideal este un subinel; această proprietate nu este adevărată, în general, pentru idealele slabe, dar se demonstrează

Lema 2. Un ideal slab drept (stîng) H este subinel slab atunci şi numai atunci cînd elementul $c \in H$ şi H_{+} este invariant şi la endomorfismul ψ (φ).

Căci din 2°, cu $r = h'$, rezultă

$h \cdot h' - 0.h' = h_1 \in H$, deci $h.h' = 0.h' + h_1 \in H$ atunci şi numai atunci cînd $0 \cdot h' \in H$, adică $h'\psi + c \in H$, $\forall h' \in H$, în particular pentru $h' = 0$, $c \in H$, deci $h'\psi \in H$.

Consecinţă. Un ideal slab bilater H este subinel slab atunci şi numai atunci cînd $c \in H$.

Existenţa idealelor slabe (unilatere sau bilatere), într-un inel slab $R^{\cdot}$ precum şi legătura lor cu idealele inelului obişnuit asociat $R^{\times}$ este dată de

Lema 3. Condiţia necesară şi suficientă ca o submulţime H a inelului slab $R^{\cdot}$ să fie ideal slab drept (stîng sau bilater) este ca H să fie ideal drept (stîng sau bilater) în inelul obişnuit asociat $R^{\times}$, invariant la endomorfismul de grup aditiv φ (respectiv ψ, sau φ şi ψ).

În adevăr, din (5) sau (5') se deduce relaţia

(7) $$h \times r = [h.r - 0.r] - h\varphi$$

care demonstrează lema.

Consecinţă. Un ideal bilater H din $R^{\times}$ este ideal slab bilater atunci şi numai atunci cînd H_{+} este invariant la endomorfismele φ şi ψ.

3. Homomorfismele inelelelor slabe se definesc în mod obişnuit: vom spune că aplicaţia χ aplică homomorf inelul slab $R^{\cdot}$ pe structura algebrică R' cu două operaţii $+$ şi $.$, dacă χ satisface relaţiile

(8) $(r + r_1)\chi = r\chi + r_1\chi$, (9) $(r.r_1)\chi = (r\chi).(r_1\chi)$.

Din faptul că $R^{\cdot}_{+}$ este grup abelian şi (8) rezultă că R'_{+} este grup abelian şi $0\chi = 0' \in R'$. Apoi, din (1), (2) şi (9) rezultă că în R'

(10) $r'.0' = (r\varphi)\chi + c'$, cu $r' = r\chi$, $c' = c\chi$,

(10') $0'.r' = (r\psi)\chi + c'$,

în particular $(0.0)\chi = c\chi$ sau (10") $0'.0' = c'$.

Fie H *nucleul homomorfismului* χ

$$H = \{h \mid h \in R^{\cdot}, \ h\chi = h' = 0' \in R'\}.$$

Să demonstrăm că H *este ideal slab bilater în* $R^{\cdot}$. Se știe că H_+ este subgrup aditiv; apoi

$$(h\,.\,r - 0\,.\,r)\chi = h'\,.\,r' - 0'\,.\,r' = 0'\,.\,r' - 0'\,.\,r' = 0',$$

deci $2^{\circ}\,.\,h\,.\,r - 0\,.\,r \in H$, $\forall h \in H$, $\forall r \in R^{\cdot}$,
aşa că H este ideal slab drept. La fel

$$(r\,.\,h - r\,.\,0)\chi = 0' \Rightarrow 2'\,.\,r\,.\,h - r\,.\,0 \in H.$$

Vom demonstra acum că R' *este un inel slab*. În adevăr, s-a văzut mai sus că R'_+ este grup abelian; în R'_+ să definim o corespondenţă φ' prin

(11) $$r'\varphi' = (r\varphi)\chi \text{ cu } r \in R^{\cdot},\ r' = r\chi \in R'$$

sau $(r\chi)\varphi' = (r\varphi)\chi$.

Corespondenţa φ', definită de (11), este univocă: în primul rînd avem $0'\varphi' = (0\varphi)\chi = 0\chi = 0'$ şi pentru orice $x \in H$, avînd $x\varphi \in H$, rezultă $(x\varphi)\chi = 0' = (x\chi)\varphi' = 0'\varphi'$; apoi, dacă

(12) $$r_1\chi = r_2\chi = r' \in R',\ r_1,\ r_2 \in R,$$

aceasta implică

(12′) $$(r_1\varphi)\chi = (r_2\varphi)\chi, \text{ deci } r'\varphi' = (r_1\varphi)\chi = (r_2\varphi)\chi$$

este unic determinat, căci

$$(r_1\varphi)\chi - (r_2\varphi)\chi = (r_1\varphi - r_2\varphi)\chi = [(r_1 - r_2)\varphi]\chi$$

şi, conform cu definiţia (11),

$$[(r_1 - r_2)\varphi]\chi = [(r_1 - r_2)\chi]\varphi' = (r_1\chi - r_2\chi)\varphi' = 0'\varphi' = 0'$$

şi astfel (12′) este justificată. Aplicaţia φ' este un endomorfism al grupului R'_+, căci

$$\forall r',\ r'_1 \in R'_+,\quad (r' + r'_1)\varphi' = [(r + r_1)\varphi]\chi = [(r\varphi + r_1\varphi]\chi =$$
$$= (r\varphi)\chi + (r_1\varphi)\chi = r'\varphi' + r'_1\varphi'.$$

Endomorfismul φ' îl vom numi endomorfismul indus de φ în R'_+ sau φ' *endomorfismul asociat endomorfismului* φ *prin homomorfismul* χ. În mod analog, endomorfismului ψ a lui $R^{\cdot}_+$ i se asociază endomorfismul ψ' a lui R'_+, definit prin

(11′) $$r'\psi' = (r\psi)\chi,\ \forall r' \in R'_+$$

unde r este o contraimagine oarecare a lui r' în $R^{\cdot}$.

Înmulţirea în R' satisface relaţii analoge cu (1) şi (2), căci din (1), (2), prin homomorfismul χ şi după definiţia lui φ', ψ' rezultă

$$(x\,.\,0)\chi = (x\varphi)\chi + c\chi \text{ sau } (1')\quad x'\,.\,0' = x'\varphi' + c';\ \text{la fel}$$

(2′) $$0'\,.\,x' = x'\psi' + c',\ \forall x' \in R'$$

în particular $0'\,.\,0' = 0'\varphi' + c' = c'$.

Apoi relaţiile (3), (4), prin homomorfismul χ dau

(3′) $$x'\,.\,(y' + z') + x'\,.\,0' = x'\,.\,y' + x'\,.\,z',$$

(4′) $$(y' + z')\,.\,x' + 0'\,.\,x' = y'\,.\,x' + z'\,.\,x'.$$

Am demonstrat astfel

Teorema 1. *Dacă inelul slab* $R^{\cdot}$ *se aplică homomorf prin* χ *pe structura algebrică* R' *cu două operaţii* $+$, $.$, *atunci* R' *este în mod necesar inel slab, pentru care constanta* $c_1 = c\chi = c'$, *iar endomorfismele de definiţie* φ', ψ' *sînt respectiv asociate endomorfismelor* φ *şi* ψ *prin homomorfismul* χ, *fiind definite de relaţiile* (11), (11′).

Consecinţă. Dacă A este subinel slab în $R^{\cdot}$, atunci $A\chi$ este subinel slab în R'.

4. În acest paragraf vom demonstra teoremele de homomorfism ale inelelor slabe.

Fie $H^{\cdot}$ un ideal slab bilater în inelul slab $R^{\cdot}$. Se ştie că mulţimea $R^{\cdot}/H^{\cdot}_+$ este un grup aditiv abelian, în care adunarea este definită prin

(13) $$(a + H^{\cdot}_+) + (b + H^{\cdot}_+) = (a + b) + H^{\cdot}_+.$$

Să arătăm că se poate defini şi înmulţirea claselor.

Fie $a \equiv a'$, $b \equiv b'$ mod $H^{\cdot}_+$, sau $a - a'$, $b - b' \in H^{\cdot}$.

Atunci $(a - a')\,.\,b - 0\,.\,b \in H^{\cdot}$ conform cu 2° din definiţia idealului; dar conform cu (c.3)

$$(a - a')\,.\,b - 0\,.\,b = a\,.\,b - a'\,.\,b \in H^{\cdot} \Rightarrow a\,.\,b \equiv a'\,.\,b\ (\mathrm{id}\ H^{\cdot}).$$

La fel $a'\,.\,(b - b') - a'\,.\,0 = a'\,.\,b - a'\,.\,b' \in H^{\cdot} \Rightarrow a'\,.\,b \equiv a'\,.\,b',\ (H^{\cdot})$, de unde $a\,.\,b \equiv a'\,.\,b'\,(H^{\cdot})$. Aceasta justifică definirea înmulţirii claselor prin.

(14) $$(a + H^{\cdot})\,.\,(b + H^{\cdot}) = a\,.\,b + H^{\cdot}.$$

Din (13) şi (14) rezultă că aplicaţia

$$\chi_H : a \to a + H^{\cdot}$$

este un homomorfism ce aplică $R^{\cdot}$ pe mulţimea claselor, $R^{\cdot}/H^{\cdot}$; atunci din teorema 1 se deduce

Teorema 2. *Mulţimea claselor de resturi ale inelului slab* $R^{\cdot}$ *relativ, la idealul său bilater* $H^{\cdot}$ *este un inel slab, imagine homomorfă a inelului* $R^{\cdot}$, *ale cărui endomorfisme de definiţie sînt* Φ, Ψ *date de*

(11_0) $$(r + H^{\cdot})\Phi = (r\varphi)\chi_H = r\varphi + H^{\cdot},$$

($11'_0$) $$(r + H^{\cdot})\Psi = (r\psi)\chi_H = r\psi + H^{\cdot},$$

iar constanta $c_1 = c\chi_H = c + H^{\cdot}$.

Fie acum R' un inel slab imagine homomorfă a inelului slab $R^{\cdot}$: $R' = R^{\cdot}\chi$ şi endomorfismele de definiţie ale sale fie φ', ψ' (satisfăcînd (11), (11')). Se ştie că nucleul $N_\chi = H$ al homomorfismului este un ideal slab bilater (§3) şi că grupul aditiv R'_+ se aplică izomorf pe grupul aditiv $R^{\cdot}_+/H^{\cdot}_+$, prin aplicaţia

$$\alpha : r' = r\chi \longleftrightarrow r + H^{\cdot}_+ . \tag{15}$$

Aplicaţia α este un izomorfism de inele slabe, căci dacă

$$r'_1 = r_1\chi \overset{\alpha}{\longleftrightarrow} r_1 + H^{\cdot}_+ ,$$

atunci $r' . r'_1 = (r . r_1)\chi \overset{\alpha}{\longleftrightarrow} r . r_1 + H^{\cdot} = (r + H) . (r_1 + H)$.

Să verificăm că endomorfismele de definiţie ale lui $R^{\cdot}/H^{\cdot}$, Φ, Ψ — ce satisfac (11_0) $(11'_0)$ — sînt asociate prin izomorfismul α endomorfismelor de definiţie ale lui R', φ' şi ψ' ce satisfac (11), (11'), adică ar trebui să avem satisfăcute relaţiile

$$(r + H^{\cdot})\,\Phi = (r'\alpha)\,\Phi = (r'\varphi')\,\alpha , \tag{$\overline{11}$}$$

$$(r + H^{\cdot})\,\Psi = (r'\alpha)\,\Psi = (r'\psi')\,\alpha . \tag{$\overline{11'}$}$$

În adevăr, servindu-ne de (11) şi (11'), apoi de definiţia (15) a lui α, avem relaţiile

$$(r'\varphi')\,\alpha = [(r\varphi)\chi]\,\alpha = (r\varphi)'\,\alpha = r\varphi + H^{\cdot} ,$$

$$(r'\psi')\,\alpha = [(r\psi)\chi]\,\alpha = (r\psi)'\,\alpha = r\psi + H^{\cdot}$$

care, comparate cu (11_0), $(11'_0)$ ne dau $(\overline{11})$, $(\overline{11'})$. Am demonstrat astfel

Teorema 3. *Dacă inelul slab $R^{\cdot}$ se aplică homomorf pe inelul slab R', atunci R' este izomorf cu inelul claselor $R^{\cdot}/H^{\cdot}$, unde $H^{\cdot}$ este idealul slab nucleu al homomorfismului considerat.*

5. Să punem în evidenţă alte proprietăţi ale idealelor şi subinelelor slabe. Se demonstrează simplu următoarele două leme:

Lema 4. Intersecţia a două subinele slabe ale inelului slab $R^{\cdot}$, este un subinel slab în $R^{\cdot}$,

Lema 5. Intersecţia a două ideale slabe drepte (stîngi, bilaterale) din $R^{\cdot}$ este un ideal slab drept (stîng, bilater).

Să demonstrăm acum

Lema 6. Dacă A este subinel slab, iar B' ideal slab în $R^{\cdot}$, atunci $A \cap B'$ este ideal slab în A.

Căci, în primul rînd, $A \cap B'$ este subgrup aditiv în A_+. Apoi fie $x \in A \cap B'$; cum B' ideal slab,

$$x . r - 0 . r \in B',\ r . x - r . 0 \in B',\ \forall r \in R;$$

în particular $x . a - 0 . a,\ a . x - a . 0 \in B',\ A,\ \forall a \in A$, ceea ce demonstrează lema.

Lema 7. Suma a două ideale slabe drepte A, B (stîngi, bilatere) este un ideal slab drept (stîng, bilater).

Căci se ştie că $A + B$ este subgrup aditiv în R_+ şi dacă $a + b \in A + B$, atunci $(a + b) . r - 0 . r = a . r + b . r - 0 . r - 0 . r = (a . r - 0 . r) + (b . r - 0 . r) = a' + b' \in A + B$, $\forall r \in R^{\cdot}$, pentru că A, B sînt ideale drepte. La fel se demonstrează lema pentru A, B ideale slabe stîngi, sau bilatere.

Lema 7'. Suma dintre un subinel slab A şi un ideal slab bilater H este un subinel slab în $R^{\cdot}$.

În adevăr $A_+ + H_+$ este subgrup aditiv în $R^{\cdot}_+$ şi dacă $a_1 + h_1$, $a_2 + h_2 \in A + H$, atunci, cu ajutorul formulei (c.1) şi ţinînd seama că H este ideal slab bilater,

$$(a_1 + h_1) . (a_2 + h_2) = a_1 . a_2 + a_1 . h_2 + h_1 . a_2 + h_1 . h_2 - a_1 . 0 - h_1 . 0 - 0 . a_2 - 0 . h_2 + 0 . 0 = [(a_1 . h_2 - a_1 . 0) + (h_1 . a_2 - 0 . a_2) + (h_1 . h_2 - 0 . h_2) - (h_1 . 0 - 0 . 0)] + a_1 . a_2 = h + a \in A + H .$$

În legătură cu homomorfismele, se pot demonstra o altă serie de proprietăţi ale subinelelor şi idealelor slabe. Să presupunem că inelul slab $R^{\cdot}$ se aplică homomorf pe inelul slab R', $R' = R^{\cdot}\chi$. S-a văzut (§ 3, consecinţa teoremei 1) că atunci orice subinel slab al lui $R^{\cdot}$ se aplică pe un subinel slab din R'. Reciproca nu este adevărată, dar se demonstrează ca la inele obişnuite:

Lema 8. Dacă A' este un subinel slab în R', atunci contraimaginea sa completă A este subinel slab în $R^{\cdot}$ şi conţine nucleul homomorfismului.

Lema 9. Imaginea homomorfă a unui ideal slab drept (stîng, bilater) din $R^{\cdot}$ este un ideal slab drept (stîng, bilater) în R'.

Căci, dacă $H^{\cdot}$ ideal slab drept în $R^{\cdot}$, atunci $H\chi = H'$ este subgrup aditiv în R'_+ şi

$$h . r - 0 . r \in H^{\cdot},\ \forall r \in R^{\cdot}\ \forall h \in H$$

implică, prin homomorfismul χ

$$h' . r' - 0' . r' \in H'$$

şi se verifică uşor că relaţia precedentă este valabilă pentru orice $r' \in R'$ şi orice $h' \in H'$.

Reciproca este adevărată în sensul următor:

Lema. 10. Dacă H' este ideal slab drept (stîng, bilater) în R', atunci contraimaginea sa completă H^* este ideal slab drept (stîng bilater) în $R^{\cdot}$ şi conţine nucleul homomorfismului χ.

Căci H^* este subgrup aditiv în $R^{\cdot}_+$ şi pentru orice $h \in H^*$ şi orice $r \in R^{\cdot}$, dacă $r' = r\chi$, $h' = h\chi$, atunci $h' . r' - 0' . r' \in H'$, deci orice contrai-

magine a acestei diferenţe aparţine lui H^*, în particular $h.r - 0.r \in H^*$. Deci H^* este ideal slab drept.

Dacă H' este ideal slab bilater, H va fi ideal slab bilater în $R^\cdot$; există deci inelele slabe $R^\cdot/H^\cdot$ şi R'/H', iar între grupurile lor aditive se ştie că există izomorfismul

$$r + H^* \xleftrightarrow{\alpha} r' + H'.$$

Dar χ păstrează şi înmulţirea, căci

$$(r + H^*).(r_1 + H^*) = r.r_1 + H^* \xleftrightarrow{\alpha} (r.r_1)\chi + H' = r'.r_1' + H' = (r' + H').(r_1' + H').$$

S-a demonstrat astfel

Teorema 4. (Teorema a II-a de izomomorfism al inelelor slabe). *Dacă inelul slab R' este imagine homomorfă a inelului slab $R^\cdot$, $R' = R^\cdot\chi$, iar H' este ideal slab în R', atunci contraimaginea sa completă H^* este ideal slab, ce conţine nucleul homomorfismului χ, iar inelele de clase respective sînt izomorfe*

$$R/H^* \cong R'/H'.$$

Se poate demonstra direct şi o teoremă analogă teoremei I de izomorfism al inelelor obişnuite; dar aceasta va rezulta şi ca o consecinţă a teoremei ce se va demonstra mai jos.

6. Vom demonstra acum o teoremă analogă cu cunoscuta *lemă a lui Zassenhaus.*

Teorema 5. *Dacă în inelul slab $R^\cdot$ sînt date subinelele A, B şi complexele A', B' sînt ideale slabe respectiv în A şi B, atunci*

$$A' + (A \cap B') \text{ ideal slab } \subset A' + (A \cap B),$$

$$B' + (B \cap A') \text{ ideal slab } \subset B' + (B' \cap A)$$

şi inelele slabe de clase respective sînt izomorfe.

Demonstraţie. 1) În inelul slab A, A' este ideal slab iar $A \cap B$ este subinel slab (Lema 4), atunci — conform lemei 7' — $A' + (A \cap B)$ este subinel în A (deci şi în $R^\cdot$); cu acelaşi raţionament aplicat inelului slab B, se deduce că $B' + (B \cap A)$ este subinel slab în B.

2) $A \cap B$ este subinel slab în A (lema 4), A' este ideal slab în A, atunci (lema 6) $A' \cap (A \cap B) = A' \cap B$ este ideal slab în $A \cap B$; acelaşi raţionament aplicat inelului slab B, ne dă $A \cap B'$ ideal slab în $A \cap B$; lema 7 ne dă că $(A \cap B') + (A' \cap B)$ este ideal slab în inelul slab $A \cap B$, deci există inelul slab de clase

$$\frac{A \cap B}{(A \cap B') + (A' \cap B)} = \frac{A \cap B}{H} = U.$$

3) $A'_+ + (A \cap B')_+$ este evident subgrub în grupul aditiv $A'_+ + (A \cap B)_+$; pentru a arăta că este ideal slab, fie

$$a' + d \in A' + (A \cap B'),\ a_1' + d_1 \in A' + (A \cap B),\ a', a_1' \in A',$$

$$d \in A \cap B',\ d_1 \in A \cap B;$$

$$x = (a' + d).(a_1' + d_1) - 0.(a_1' + d_1) = a'.(a_1' + d_1) + d.(a_1' + d_1) - 2[0.(a_1' + d_1)] = [a'.(a_1' + d_1) - 0.(a_1' + d_1)] + [d.a_1' - d.0] - [0.a_1' - 0.0] + [d.d_1 - 0.d_1]$$

Primele trei paranteze, din ultima expresie, aparţin lui A', căci A ideal slab $\subset A \supset (A \cap B) \supset (A \cap B')$; ultima paranteză aparţine lui $A \cap B'$, căci acesta este ideal slab în $A \cap B$, cum s-a arătat la 2); deci

$$x = a^* + d^* \in A' + (A \cap B'), \text{ cu } a^* \in A', d^* \in A \cap B.$$

La fel se demonstrează că

$$(a_1' + d_1).(a' + d) - (a_1' + d_1).0 \in A' + (A \cap B').$$

Am arătat astfel că $A' + (A \cap B')$ este ideal slab în inelul slab $A' + (A \cap B)$; există deci inelul slab al claselor de resturi

$$\frac{A' + (A \cap B)}{A' + (A \cap B')} = V.$$

În mod analog se justifică existenţa inelului slab al claselor de resturi

$$\frac{B' + (B \cap A)}{B' + (B \cap A')} = W.$$

4) Lema lui Zassenhaus din teoria grupurilor spune că grupul aditiv $A_+ + (A \cap B_+)$ se aplică homomorf pe grupul aditiv U_+ prin aplicaţia

$$\chi: a_1' + d_1 \to d_1 + H$$

şi nucleul homomorfismului este $A'_+ + (A \cap B')_+$. Fie şi $a_2' + d_2 \to d_2 + H$, $a_2' \in A'$, $d_2 \in A \cap B$, atunci $(a_1' + d_1).(a_2' + d_2) = [a_1'.(a_2' + d_2) - 0.(a_2' + d_2)] + [d_1.a_2' - d_1.0] + d_1.d_2 = a^{**} + d_1.d_2 \in A' + (A \cap B)$.

Rezultă că

$$(a_1' + d_1).(a_2' + d_2) = a^{**} + d_1.d_2 \xleftrightarrow{\chi} d_1.d_2 + H = (d_1 + H).(d_2 + H).$$

Deci χ este un homomorfism de inele slabe

$$A' + (A \cap B) \overset{\chi}{\cong} U.$$

Nucleul homomorfismului χ este idealul $A' + (A \cap B')$; conform teoremei 3, avem izomorfismul de inele slabe

$$U \overset{\eta_1}{\cong} \frac{A' + (A \cap B)}{A' + (A \cap B')} = V.$$

Analog, se găseşte izomorfismul

$$U \overset{\eta_2}{\cong} W.$$

Rezultă că aplicaţia $\eta_1^{-1}\eta_2$ este un izomorfism ce aplică inelul slab V pe inelul slab W; teorema 5 este astfel demonstrată.

În particular, dacă subinelul $B \subset A$, iar $B' = (0)$ idealul nul, se obţine

Teorema 6. (Teorema I de izomorfism al inelelor slabe). *Dacă în inelul slab $A^{\cdot}$ avem un ideal slab A' şi un subinel slab B, atunci A' este ideal slab în subinelul $A' + B$, $B \cap A'$ este ideal slab în B şi inelele slabe ale claselor de resturi sînt izomorfe*

$$\frac{A' + B}{A'} \cong \frac{B}{B \cap A'}.$$

7. Vom numi *şir normal*, în inelul slab $R^{\cdot}$, un lanţ descendent finit de subinele slabe ce începe cu $R^{\cdot}$

$$R^{\cdot} = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \ldots \supset R_{i-1} \supset R_i \supset \ldots \supset R_{k-1} \supset (0) = R_k \tag{16}$$

şi astfel că fiecare R_i este ideal în R_{i-1}; să observăm că (0) nu este subinel slab, dar este ideal slab în R_{k-1}. Există deci inelele slabe de clase

$$R^{\cdot}/R_1, R_1/R_2, \ldots, R_{i-1}/R_i, \ldots, R_{k-1}/R_k = R_{k-1} \tag{17}$$

numite factorii şirului (16). Rafinarea unui şir normal, izomorfismul a două şiruri normale, se definesc în modul cunoscut. Este adevărată

Teorema 7. (Teorema lui Schreier). *Oricare două şiruri normale ale aceluiaşi inel slab $R^{\cdot}$ admit rafinări izomorfe.*

În adevăr, pe baza teoremei 5, şirul (16) şi şirul

$$R^{\cdot} = Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots \supset Q_{j-1} \supset Q_j \supset \ldots \supset Q_s = (0) \tag{16'}$$

pot fi rafinate respectiv prin subinelele

$$R_{ij} = R_i + (R_{i-1} \cap Q_j), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, k, \\ j = 0, 1, \ldots, s, \end{matrix} \tag{18}$$

$$Q_{ij} = Q_j + (Q_{j-1} \cap R_i), \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, k, \\ j = 1, 2, \ldots, s \end{matrix} \tag{18'}$$

pînă la două şiruri normale izomorfe.

Demonstraţia este complet analogă celei cunoscute din teoria grupurilor sau modulelor; trebuie numai observat că, în adevăr, complexele definite de (18) şi (18') sînt subinele slabe; căci, de exemplu, R_{ij} este ideal slab în R_{ij-1} (teorema 5) şi $c \in R_{ij}$ pentru că $c \in R_i$ subinel; din consecinţa lemei 2 (§ 2) rezultă că R_{ij} este subinel slab.

Se deduce că există inelele slabe de clase R_{ij-1}/R_{ij} şi $Q_{i-1,j}/Q_{ij}$ şi ele sînt izomorfe.

Se observă că teoria şirurilor normale poate fi continuată introducînd noţiunea de şir de compoziţie într-un inel slab $R^{\cdot}$ şi şirurile de compoziţie din $R^{\cdot}$ sînt toate izomorfe, pe baza teoremei lui Schreier.

BIBLIOGRAFIE

1. Climescu Al. — *Anneaux faibles*. Bul. Inst. polit. Iaşi, T. VII (XI), 1961, p. 1.
2. Climescu Al. — *O nouă clasă de inele slabe*, Bul. Inst. pol. Iaşi, T X (XIV), 1964, p. 29.
3. Luchian T. — *Asupra algebrelor slabe de ordin 3, cu diviziune*. An şt. Univ. Iaşi, t. X, 1964, p. 29–42.
4. Luchian T. — *Observaţii asupra inelelor slabe*. An. şt. Univ. Iaşi, t. XI, 1965, p. 99–111.
5. Luchian T. — *Asupra unor inele slabe generalizate*. An. şt. Univ. Iaşi, T. XII, 1966, p. 19–36

WEAK-RING HOMOMORPHISMS

Abstract

A weak-ring $R^{\cdot}$ [1], [2] is an additive group in which a *multiplication* „·" is defined, and (1), (2), (3), (4) hold, where φ and ψ are endomorphisms of R_+ and c a fixed element of $R^{\cdot}$. We may construct a weak-ring $R^{\cdot}$ from an ordinary ring $R^{\times}$, by keeping the additive group of $R^{\times}$ and defining a new multiplication by (5); conversely, $R^{\times}$ can be constructed from $R^{\cdot}$ in the same manner and (5'). A subset $H^{\cdot} \subset R^{\cdot}$ is called a *weak right* (left, two-sided) *ideal* of $R^{\cdot}$ if $H^{\cdot}_+$ is a subgroup of $R^{\cdot}_+$ and 2° (2', or 2° and 2') holds (§ 2).

The additive group $H^{\cdot}_+$ of a weak right (left, two-sided) ideal is necessarily invariant under the endomorphism φ (ψ, or φ and ψ).

Lemma 2. A weak-ideal $H^{\cdot}$ is a weak-subring if and only if it contains the element c. Weak-ring homomorphisms are defined and the following theorems are proved:

Theorem 1. If χ is a homomorphism of the weak-ring $R^{\cdot}$ into the algebraic system R' with two operations $+$, $\cdot$, then R' is a weak-ring for which $c_1 = c\chi$ and its defining endomorphisms φ', ψ' are respectively associated to φ and ψ under χ, by (11), (11').

Theorem 2. If $H^{\cdot}$ is any weak-ideal of the weak-ring $R^{\cdot}$, then the cosets $r + H^{\cdot}$ of $H^{\cdot}$ in $R^{\cdot}$ form a weak-ring $R^{\cdot}/H^{\cdot}$, which is a homo-

morphic map of $R^{\cdot}$, and its defining endomorphisms Φ, Ψ are given by (11_0), $(11'_0)$.

Theorem 3. If χ is a weak-ring homomorphism of $R^{\cdot}$ onto R', then $R' \cong R^{\cdot}/H^{\cdot}$, where $H^{\cdot}$ is a weak-ideal, the kernel of the homorphism χ.

Theorem 4 is the analogous of the second ring isomorphism theorem.

Theorem 5 is the analogous of the Zassenhaus lemma in group theory. Subinvariant and composition series are defined and the Schreier theorem is proved, for weak-rings.

ASUPRA MATRICELOR TRIDIMENSIONALE

DE

C. REISCHER şi M. BRÂNZEI

De la lucrarea publicată de Vandermonde în 1771, în care introduce noţiunea de determinant spaţial pentru a determina poziţia pieselor pe tabla de şah în timpul jocului, matricele şi determinanţii spaţiali au fost subiectul cercetării multor matematicieni, care au generalizat unele rezultate cunoscute din cazul matricelor bidimensionale, aplicînd în acelaşi timp calculul matricial multidimensional la rezolvarea unor probleme din teoria momentelor (cazul mai multor variabile), la studiul formelor algebrice multidimensionale, la găsirea soluţiilor sistemelor de ecuaţii liniare sau multiliniare prin formule de tip Cramer.

Dificultăţile deosebite de scriere au făcut însă ca teoria matricelor multidimensionale să fie puţin dezvoltată şi au împiedicat folosirea acestor matrice ca un instrument de calcul, în diverse probleme în care apar.

În această Notă se dă o reprezentare a matricelor tridimensionale cu ajutorul unor elemente supuse la o lege de compoziţie simplă, ceea ce permite extinderea unor rezultate din teoria matricelor bidimensionale, faciliteză efectuarea calculelor şi simplifică scrierea formulelor.

O matrice tridimensională A de tip (p, q, r) este un sistem de pqr numere a_{ijk} $(1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q, 1 \leqslant k \leqslant r)$ dintr-un corp numeric oarecare K, situate în punctele spaţiului tridimensional $P(i, j, k)$. Se notează $A = (a_{ijk})$.

Vom numi matrice cubice de ordin p matricele tridimensionale pentru care $p = q = r$ şi matrice tridimensionale pătratice, acele matrice pentru care două din cele trei numere ce definesc tipul sînt egale între ele.

Interpretăm matricea tridimensională ca fiind formată din foi bidimensionale, ale căror elemente sînt toate elementele matricei date care au un indice fixat.

Alegem pentru foi direcţia j = constant, deoarece în cazul $q = 1$, matricea se reduce la o matrice cu două dimensiuni; notăm foile prin