morphic map of $R^{\cdot}$, and its defining endomorphisms Φ, Ψ are given by (11_0), $(11'_0)$.

Theorem 3. If χ is a weak-ring homomorphism of $R^{\cdot}$ onto R', then $R' \cong R^{\cdot}/H^{\cdot}$, where $H^{\cdot}$ is a weak-ideal, the kernel of the homorphism χ.

Theorem 4 is the analogous of the second ring isomorphism theorem.

Theorem 5 is the analogous of the Zassenhaus lemma in group theory. Subinvariant and composition series are defined and the Schreier theorem is proved, for weak-rings.

ASUPRA MATRICELOR TRIDIMENSIONALE

DE

C. REISCHER şi M. BRÂNZEI

De la lucrarea publicată de Vandermonde în 1771, în care introduce noţiunea de determinant spaţial pentru a determina poziţia pieselor pe tabla de şah în timpul jocului, matricele şi determinanţii spaţiali au fost subiectul cercetării multor matematicieni, care au generalizat unele rezultate cunoscute din cazul matricelor bidimensionale, aplicînd în acelaşi timp calculul matricial multidimensional la rezolvarea unor probleme din teoria momentelor (cazul mai multor variabile), la studiul formelor algebrice multidimensionale, la găsirea soluţiilor sistemelor de ecuaţii liniare sau multiliniare prin formule de tip Cramer.

Dificultăţile deosebite de scriere au făcut însă ca teoria matricelor multidimensionale să fie puţin dezvoltată şi au împiedicat folosirea acestor matrice ca un instrument de calcul, în diverse probleme în care apar.

În această Notă se dă o reprezentare a matricelor tridimensionale cu ajutorul unor elemente supuse la o lege de compoziţie simplă, ceea ce permite extinderea unor rezultate din teoria matricelor bidimensionale, faciliteză efectuarea calculelor şi simplifică scrierea formulelor.

O matrice tridimensională A de tip (p, q, r) este un sistem de pqr numere a_{ijk} $(1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q, 1 \leqslant k \leqslant r)$ dintr-un corp numeric oarecare K, situate în punctele spaţiului tridimensional $P(i, j, k)$. Se notează $A = (a_{ijk})$.

Vom numi matrice cubice de ordin p matricele tridimensionale pentru care $p = q = r$ şi matrice tridimensionale pătratice, acele matrice pentru care două din cele trei numere ce definesc tipul sînt egale între ele.

Interpretăm matricea tridimensională ca fiind formată din foi bidimensionale, ale căror elemente sînt toate elementele matricei date care au un indice fixat.

Alegem pentru foi direcţia j = constant, deoarece în cazul $q = 1$, matricea se reduce la o matrice cu două dimensiuni; notăm foile prin

$A_1, A_2, \ldots, A_q$. $A_j (1 \leqslant j \leqslant q)$ sînt matrice bidimensionale, cu elemente $b_{ik} = a_{ijk}$, cu j fixat. Atunci, matricea A se poate nota prin

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + \cdots + A_q e_q, \tag{1}$$

unde $e_1, e_2, \ldots, e_q$ sînt niște simboli cu tabela de înmulțire $e_m e_n = \delta_{mn} e_n$ (δ_{mn} = simbolul lui Kronecker).

Operațiile cu matrice tridimensionale se introduc atunci în mod firesc. Astfel, suma a două matrice de același tip (p, q, r) va fi o matrice de tip (p, q, r) dată prin

$$A + B = (A_1 + B_1) e_1 + \cdots + (A_q + B_q) e_q, \tag{2}$$

unde $B = B_1 e_1 + \cdots + B_q e_q$.

Avantajul interpretării date apare însă abia la definirea produsului a două matrice tridimensionale A de tip (p, q, r) și B de tip (p_1, q_1, r_1). Dacă A și B satisfac o condiție de înlănțuire, anume $r = p_1$ și $q = q_1$, atunci produsul celor două matrice este o matrice tridimensională de tip (p, q, r_1):

$$AB = (A_1 B_1) e_1 + \cdots + (A_q B_q) e_q. \tag{3}$$

Pentru matricele cubice de același ordin, formula (3) conduce tocmai la produsul dat de Cayley-Scott [1], singurul produs care păstrează dimensiunea matricei și singurul care s-a pretat la generalizări fructuoase pentru matrice de dimensiune mai mare decît trei [1, 2]. Toate celelalte produse a două matrice cu trei dimensiuni introduse de Rice [1], Oldenburger [2] Weyl [2] conduc la matrice cu patru, cinci sau șase dimensiuni.

Matricele tridimensionale pătratice de tip (p, q, p) formează un inel $cl^{(p, q)}$ cu divizori ai lui zero, a cărui unitate este matricea E de forma

$$E = E_1 e_1 + E_2 e_2 + \ldots + E_q e_q, \tag{4}$$

E_j avînd elementele $\varepsilon_{ijk} = \delta_{ik}$.

Cu ajutorul simbolilor $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$, considerați drept bază, putem construi o algebră de ordin q peste corpul K. Matricele tridimensionale pot fi considerate atunci ca matrice bidimensionale cu elementele în algebra astfel construită,

$$A = (\alpha_{ik}), \quad \alpha_{ik} = a_{i_1 k} e_1 + a_{i_2 k} e_2 + \ldots + a_{i_q k} e_q. \tag{5}$$

Această nouă interpretare a matricei tridimensionale justifică introducerea noțiunii de determinant al matricei tridimensionale pătratice ca determinantul matricei bidimensionale (α_{ik}):

$$\det A = \det A_1 e_1 + \det A_2 e_2 + \cdots + \det A_q e_q. \tag{6}$$

Pentru acești determinanți vectoriali rămîn adevărate o serie de proprietăți ale determinanților obișnuiți, printre care și aceea care afirmă că

$$\det (AB) = \det A \,.\, \det B. \tag{7}$$

Definind minorii de tip (m, q, m) ai matricei tridimensionale A ca fiind minorii matricei bidimensionale asociate ei, adică: $\det M_1 e_1 + \det M_2 e_2 + \cdots + \det M_q e_q$ unde $\det M_j (1 \leqslant j \leqslant q)$ sînt minori de ordin m formați cu aceleași m linii și m coloane ai feței bidimensionale $A_j (1 \leqslant j \leqslant q)$, se verifică prin calcul direct că rămîne adevărată dezvoltarea determinantului vectorial prin regula lui Laplace după m secțiuni i = const. sau k = const.; la fel, formula lui Binet-Cauchy asupra minorilor matricei produs a două matrice tridimensionale.

Vom spune că o matrice tridimensională pătratică A este nesingulară dacă determinantul său vectorial nu este divizor al lui zero. Atunci se poate vorbi despre matricea inversă a unei matrice tridimensionale pătratice și condiția necesară și suficientă ca o matrice A să admită o inversă este ca ea să fie nesingulară. Matricea inversă va fi:

$$A^{-1} = A_1^{-1} e_1 + \cdots + A_q^{-1} e_q, \tag{8}$$

A^{-1} avînd același tip ca și matricea A.

Se poate defini produsul unei matrice A cu un element al algebrei liniare peste $e_1, e_2, \ldots, e_q$; fie $\Lambda = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_q e_q$:

$$\Lambda A = (\lambda_1 A_1) e_1 + \cdots + (\lambda_q A_q) e_q, \tag{9}$$

unde $\lambda_j A_j$ sînt produse cu scalari ale matricelor obișnuite.

Plecînd de la ecuația matricială

$$AX = X\Lambda, \tag{10}$$

unde A este de tip (p, q, p), X este de tip $(p, q, 1)$ iar Λ este de tip $(1, q, 1)$, se poate dezvolta o teorie spectrală a matricelor.

Soluțiile Λ_j și X_j ale ecuației (10) le vom numi valori și vectori proprii ai matricei A. Problema găsirii valorilor și vectorilor proprii ai matricei A se reduce la găsirea valorilor și vectorilor proprii pe fețe. Vectorii proprii $X_{h_1}, X_{h_2}, \ldots, X_{h_s}$ de tip $(p, q, 1)$ sînt liniar independenți dacă o relație de forma

$$\gamma_1 X_{h_1} + \gamma_2 X_{h_2} + \cdots + \gamma_s X_{h_s} = 0,$$

cu $\gamma_h (1 \leqslant h \leqslant s)$ în algebra liniară cu bază $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$, are loc dacă și numai dacă $\gamma_h (1 \leqslant h \leqslant s)$ sînt divizori ai lui zero. Considerăm că două valori proprii Λ_{h_1} și Λ_{h_2} sînt distincte, dacă lor le corespund vectori proprii X_{h_1}, X_{h_2} liniar independenți. Atunci, dacă $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \ldots, \lambda_{jp}$ sînt valorile proprii ale feței A_j, o valoare proprie pentru A va avea forma

$$\Lambda_h = \lambda_{i_1 h} e_1 + \lambda_{i_2 h} e_2 + \cdots + \lambda_{i_q h} e_q, \tag{11}$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_q$ iau valori dintre numerele $1, 2, \ldots, p$, ordinea nefiind esențială.

Polinomul caracteristic vectorial al matricei A este

$$C_A(\Lambda) = \Lambda^p - \sum_1 \Lambda^{p-1} + \cdots + (-1)^{p-1} \sum_{p-1} \Lambda + (-1)^p \sum_p, \tag{12}$$

unde $\sum_t$ sînt elemente ale algebrei cu baza $e_1, e_2, \ldots, e_q$, funcţii simetrice elementare de valorile proprii ale matricei A. Evident, $\sum_p = \det A$, $\sum_1 = S(A) = S(A_1)e_1 + \cdots + S(A_q)e_q$, $S(A_j)$ fiind urma matricei A_j.

Pentru o matrice tridimensională pătratică A este adevărată o teoremă analogă cu aceea a lui Cayley-Hamilton din cazul bidimensional şi anume:

$$C_A(A) = 0.$$

Demonstraţia se face prin calcul, aplicînd teorema lui Cayley-Hamilton la feţele $A_j (1 \leqslant j \leqslant q)$ şi reprezentînd matricea A prin (1).

Se verifică de asemenea că, dacă $\Lambda_h (1 \leqslant h \leqslant p)$ sînt valorile proprii ale matricei A, atunci matricea A^r va avea valorile proprii Λ_h^r, ţinînd seamă de tabla de înmulţire din algebra cu baza $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$.

Se pot introduce de asemenea factorii invarianţi şi divizorii elementari, deci se poate ajunge la forma normală Jordan pentru o matrice tridimensională pătratică.

Folosind acelaşi simbolism, forma Jordan pentru matricea A va f

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 e_1 + \cdots + \mathcal{J}_q e_q \tag{13}$$

unde $\mathcal{J}_j$ este forma Jordan a feţei $A_j (1 \leqslant j \leqslant q)$.

Dacă considerăm transformările elementare pentru matricele tridimensionale pătratice, date cu ajutorul unor matrice de forma

$$T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + \cdots + T_q e_q, \tag{14}$$

$T_j (1 \leqslant j \leqslant q)$ fiind matricele transformărilor elementare pentru matricele bidimensionale $A_j (1 \leqslant j \leqslant q)$ de tip $p \times p$, atunci matricele A şi $\mathcal{J}$ sînt legate prin relaţia

$$A = P \mathcal{J} P^{-1}, \tag{15}$$

unde P este un produs de matrice al transformărilor elementare.

BIBLIOGRAFIE

1. Соколов Н. Н. — *Пространственные матрицы и их приложения*. Гос. изд. физ' мат. лит. Москва, 1960.
2. Соколов Н. Н. — *Об операциях над многомерными матрицами*. ДАН СССР, 163 (6), 1965, стр. 1322 — 1325.

О ТРЕХМЕРНЫХ МАТРИЦАХ

Резюме

Приводится представление трехмерных символов, имеющие простой закон умножения. Это позволяет расширение одных результатов из теории двухмерных матриц и упрощает формулы и исчисления с трехмерными матрицами.

COMPARISON PRINCIPLE AND LYAPUNOV'S SECOND METHOD

BY

V. LAKSHMIKANTHAM and S. LEELA

1. It is widely known that the comparison principle has been one of the important approaches to Lyapunov's second method, which provides a convenient means of discussing the behaviour of solutions of a given differential system in terms of the properties of the Lyapunov function and the solutions of the scalar differential equation. The advantage of the comparison technique is in obtaining stability criteria under rather less restrictive conditions than those demanded in the classical theorems of Lyapunov's second method. In particular, it often helps in deducing asymptotic stability without the stronger requirement that the derivative of the Lyapunov function be negative definite, which, in many practical applications, is difficult to achieve. Moreover, the comparison method is readily applicable to the questions of conditional stability and boundedness. [4].

Recently, Brauer [1] has proved a result which apparently suggests that, in the case of stability, theorems stated in terms of differential inequality and the behaviour of the solutions of the corresponding scalar differential equation are not really more general than the classical theorems.

The purpose of the present paper is to substantiate the generality of the comparison technique. It is shown that whenever a Lyapunov function exists satisfying the conditions of the classical stability theorems, it is possible to find another Lyapunov function which fulfills the conditios of the stability theorems in terms of differential inequalities. On the other hand, starting with the stability theorems in terms of differential inequalities, we can arrive at the classical stability theorems, provided some additional conditions are assumed, namely, in the case of stability (simple or uniform) and equiasymptotic stability the assumption (a_2) [See (Theorem 2] and in the case of uniform asymptotic stability assumptions (a_2) and (3.9) [See Theorem 7].