SUR LES SYSTÈMES DISSIPATIFS

PAR

P. TALPALARU

1. Dans [1], B. P. Demidovic a donné un critérium de dissipativité pour des systèmes différentiels non-linéaires. Nous donnons dans cette courte Note une généralisation de ce critérium en utilisant un résultat sur certains espaces de fonctions.

Rappelons que le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{1}$$

est dissipatif au sens de Levinson, quand toute courbe intégrale $x = x(t)$ du système entre dans un domaine borné D, le même pour toutes les courbes intégrales, pour $t > T\{x\}$.

Sous une forme précise ([3], p. 29) le système de plus haut est dissipatif s'il existe une constante $R > 0$ telle que $\overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} \| x(t; x_0, t_0) \| < R$, pour tout (x_0, t_0) du domaine où les solutions existent.

2. Avant d'énoncer le résultat qui constitue l'objet de cette Note, énonçons le lemme suivant (dû à Demidovič):

Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \in C^1(\Omega)$, *où* $f_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *sont des fonctions réelles et le domaine* Ω *est un ensemble convexe de l'espace euclidien* E^n.

Si $\lambda(x)$ *et* $\Lambda(x)$ *sont le plus petit et le plus grand nombre caractéristique de la matrice symétrique*

$$J_{ij}(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right],$$

alors pour tous les points $x \in \Omega$ *et* $x + \Delta x \in \Omega$ *on a l'inégalité*

$$\lambda_m(\Delta x, \Delta x) \leqslant (\Delta f(x), \Delta x) \leqslant \Lambda_M(\Delta x, \Delta x), \tag{i}$$

où

$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$; $\lambda_m = \min \lambda(\xi)$ *et* $\Lambda_M = \max \Lambda(\xi)$ *sur l'intervalle* $\xi = x + t\Delta x$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

La démonstration du lemme est donnée par exemple dans [1].

Considérons maintenant le système différentiel (1) où $f(x,t) \in C(E^n \times I^+)$, $I^+ = (t < t < \infty)$ et $f(x,t) \in C^1(E^n)$ pour tout t fixée de l'intervalle I^+, et $t \geqslant -\infty$.

Théorème 1. *Sous les hypothèses :*

a) *Il existe une matrice* $A = (a_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *constante, symétrique positive définie de manière que la matrice*

$$\mathcal{J}_s(x,t) = \frac{1}{2}\left[(Af_x(x,t)) + (Af_x(x,t))^*\right]$$

a le plus grand nombre caractéristique

$$\Lambda(x,t) \leqslant -\alpha < 0 \quad \textit{pour } \|x\| \geqslant R_0 \textit{ et } t \in I^+, \tag{2}$$

$$\Lambda(x,t) \leqslant \varphi(t) \quad \textit{pour } \|x\| < R_0 \textit{ et } t \in I^+; \tag{3}$$

b) *les fonctions* $f(0,t)$ *et* $\varphi(t) \geqslant 0$ *appartiennent à l'espace* M *des fonctions mesurables, intégrables Bochner sur tout intervalle compact* [2], *le système* (1) *a la propriété de Levinson.*

Démonstration. Considérons la forme quadratique

$$V(x) = (Ax, x).$$

Du fait que A est positive-définie et symétrique, on déduit

$$a\|x\|^2 \leqslant V(x) \leqslant b\|x\|^2, \tag{4}$$

où a et b sont le plus petit et le plus grand nombre caractéristique de la matrice A.

Pour toute solution du système (1)

$$\frac{dV}{dt} = 2(Ax(t), x(t)). \tag{5}$$

Posons maintenant $x_p = (R_0/\|x\|)x$ et écrivons (5) sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = (Af(x,t), x) = (Af(x,t) - Af(x_p,t), x - x_p) + (Af(x_p,t) - \tag{6}$$
$$- Af(0,t), x - x_p) + (Af(x,t) - Af(0,t), x_p) + (Af(0,t), x).$$

En appliquant le lemme énoncé et prenant $\|x(t)\| \geqslant 2R_0$, nous obtenons

$$(Af(x,t) - Af(x_p,t), x - x_p) \leqslant \Lambda_M \|x - x_p\|^2 \leqslant -\alpha\|x - x_p\|_2 =$$
$$= -\alpha(\|x\| - R_0)^2 = -\alpha\left(\frac{\|x\|}{2} + \frac{\|x\|}{2} - R_0\right)^2 \leqslant -\frac{\alpha}{4}\|x\|^2, \text{ pour } t \in I^+,$$

$$(Af(x,t) - Af(0,t), x_p) = (Af(x,t) - Af(0,t), x)\frac{R_0}{\|x\|} \leqslant \varphi(t)\|x\|^2\frac{R_0}{\|x\|} =$$
$$= \varphi(t)R_0\|x\|, \text{ pour } t \in I^+,$$
$$(Af(x_p,t) - Af(0,t), x - x_p) =$$
$$= (Af(x_p,t) - Af(0,t), x_p)\left(\frac{\|x\|}{R_0} - 1\right) \leqslant \varphi(t)\|x_p\|^2\left(\frac{\|x\|}{R_0} - 1\right) < \varphi(t)R_0\|x\|,$$
$$\text{pour } t \in I^+,$$
$$(Af(0,t), x) \leqslant \|A\|\|f(0,t)\|\|x\|.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} < -\frac{\alpha}{4}\|x\|^2 + (2\varphi(t)R_0 + \|A\|\|f(0,t)\|)\|x\|$$

et, en utilisant la relation (4), on a :

$$\frac{dV}{dt} < -\beta V + 2h(t)V^{1/2}$$

$$\text{où } \beta = \frac{\alpha}{2b} > 0, \quad h(t) = \frac{2\varphi(t)R_0 + \|A\|\|f(0,t)\|}{\sqrt{a}} \in M.$$

Considérons maintenant l'équation scalaire

$$\frac{dr}{dt} = -\beta r + 2h(t)r^{1/2}$$

dont la solution, qui passe par $(0, r_0)$, est

$$r(t) = \left[\sqrt{r_0}e^{-\frac{\beta}{2}t} + e^{-\frac{\beta}{2}t}\int_0^t e^{\frac{\beta}{2}\sigma}h(\sigma)\,d\sigma\right]^2$$

et qui est l'intégrale maximale par ce point.

En appliquant les résultats connus sur les inégalités différentielles, on obtient :

$$V(x(t)) < r(t),$$

dès que $V(0) \leqslant r_0$.

Compte tenu du lemme 2 [2] et du fait que $f(0,t)$, $\varphi(t)$ appartiennent à M, et par conséquent la fonction $h(t) \in M$, il suit que la fonction $r(t)$ est bornée pour tout t et par suite de la relation (4) toute solution du système (1) entre dans le même domaine D pour $t \geqslant T[x]$.

Remarque 1. Dans le cas particulier où $\varphi(t) = \text{const.}$ et $\|f(0,t)\| \leqslant c < +\infty$ pour tout $t \in I^+$, on obtient le cas étudié par Demidovic.

Remarque 2. Quand $\Lambda(x,t) \leqslant -\alpha < 0$ pour $x \in E^n$, $t \in I^+$ et $f(0,t) \in M$, le théorème est aussi vrai et nous obtenons une légère généralisation du théorème 2 de Demidovic [1].

3. Considérons maintenant à côté du système (1) le système perturbé

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + R(x,t) \tag{1'}$$

et voyons à quelle condition doit satisfaire $R(x,t)$ pour que le système (1) soit dissipatif.

Nous avons le

Théorème 2. *Supposons que les conditions du théorème 1 sont satisfaites et que*

$$\|R(x,t)\| \leqslant \omega(\|x\|, t),$$

où $\omega(r,t)$ est une fonction continue, monotone non-décroissante par rapport à $r \geqslant 0$.

Alors, si l'équation scalaire

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\beta}{2}u + \|A\|\,\omega(u,t) + h(t)\sqrt{a} \tag{7}$$

a toutes les solutions bornées (par la même constante), le système (1) a la propriété de Levinson.

Démonstration. Soit la forme quadratique de 1,

$$V(x) = (Ax, x).$$

Considérons une solution $x(t)$ du système (1') pour laquelle nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = (Af(x,t), x(t)) + (AR(x,t), x(t)).$$

En choisissant $R_0 > 0$ et $\|x(t)\| \geqslant 2R_0$, nous avons

$$\frac{dV}{dt} < -\beta V + 2h(t)V^{1/2} + 2(AR(x,t), x(t)), \tag{8}$$

β et $h(t)$ ayant la signification du § précédent.

Considérons l'équation

$$\dot{r} = -\beta r + 2h(t)r^{1/2} + 2\|A\|\,\omega\left(\sqrt{\frac{r}{a}}, t\right)\sqrt{\frac{r}{a}}$$

qui devient

$$\dot{u} = -\frac{\beta}{2}u + \|A\|\,\omega(u,t) + \sqrt{a}\,h(t) \tag{9}$$

où $u = \sqrt{\frac{r}{a}}$.

Des relations (8) et (9) il s'ensuit

$$V(t) < u(t),$$

où $u(t)$ est la solution maximale de l'équation (9) qui passe par le point (u_0, t_0), dès que $V(t_0) \leqslant u(t_0)$.

Cas particulier. La conclusion du théorème 2 a lieu si nous prenons

$$\omega(r,t) = \psi(t)r, \quad \psi(t) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \psi(\tau)\,d\tau < +\infty.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Демидович Б. П. — *О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений.* I. ВМУ (1961), стр. 19 — 27.
2. Massera J. L., Schaffer J. J. — *Linear differential equations and functional analysis.* I. Ann. of Math., vol. 67, (1958), p. 517—573.
3. Плисс В. А. — *Нелокальные проблемы теории колебаний.* Изд. „Наука", Москва-Ленинград. 1964.

ASUPRA SISTEMELOR DISIPATIVE

Rezumat

Se generalizează un rezultat al lui Demidovici asupra sistemelor disipative. Rezultatul principal stabilit este următorul:

Dacă sînt îndeplinite condiţiile (a) şi (b), atunci toate soluţiile sistemului (1) intră într-un domeniu D pentru $t \geqslant T[x]$ (Teorema 1). Acest rezultat este extins apoi la sistemul perturbat (1') (Teorema 2).