APROXIMAREA SOLUŢIILOR UNEI ECUAŢII DIFERENŢIALE CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL AL IV-LEA CU COEFICIENŢI VARIABILI

DE

OLGA-ADINA GHEORGHIEV

Într-o Notă anterioară [2] am aplicat metoda reţelelor la aproximarea soluţiilor unor ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al patrulea cu coeficienţi constanţi, ce se întîlnesc în teoria elsticităţii.

In Nota de faţă aplicăm aceeaşi metodă pentru aproximarea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale cu coeficienţi variabili, de ordinul al patrulea:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}u = {} & a_{40}u_{x^4} + a_{31}u_{x^3y} + a_{22}u_{x^2y^2} + a_{13}u_{xy^3} + a_{04}u_{y^4} + \\ & + b_{30}u_{x^3} + b_{21}u_{x^2y} + b_{12}u_{xy^2} + b_{03}u_{y^3} + \\ & + d_{20}u_{x^2} + d_{11}u_{xy} + d_{02}u_{y^2} + \\ & + e_{10}u_x + e_{01}u_y + g_{00}u = f(x, y)\end{aligned}$$

unde $a_{40}, a_{31}, \ldots, g_{00}$ sînt funcţiuni continue de variabilele x şi y care satisfac unor anumite condiţii pe care le vom enunţa mai jos.

Vom presupune că această ecuaţie admite o soluţie unică $u(x, y)$ funcţie de opt ori derivabilă într-un domeniu $\mathfrak{D}$ din plan, care e mărginit de o curbă Liapunov Γ; această funcţie satisface pe frontiera Γ la următoarele condiţii

$$\begin{aligned} u|_\Gamma &= \varphi_0(x, y), \\ \mathfrak{K}u|_\Gamma &= \varphi_1(x, y), \end{aligned} \tag{2}$$

unde $\mathfrak{K}$ este un anumit operator diferenţial de ordinul al doilea care va fi precizat în cele ce urmează, φ_0 şi φ_1 sînt funcţii continue pe frontiera Γ iar f e o funcţie continuă pe $\mathfrak{D}$.

§ 1. **Generalităţi asupra metodei** I. În primul rînd vom studia condiţiile în care este posibil să punem operatorul $\mathcal{A}$ ca produs de doi operatori de ordinul al doilea $\mathcal{K}$ şi $\mathfrak{K}$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}\mathfrak{K} \tag{3}$$

unde

$$\mathcal{K} = P\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2Q\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + R\frac{\partial^2}{\partial y^2} + S\frac{\partial}{\partial x} + T\frac{\partial}{\partial y} + V,$$

$$\mathfrak{K} = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + G \tag{4}$$

iar $A, B, C, D, E, G, P, Q, R, S, T, V$ sînt funcţii de (x, y).

II. În al doilea rînd vom găsi condiţiile în care se poate folosi metoda reţelelor pentru aproximarea soluţiilor unei probleme Dirichlet de forma:

$$\mathfrak{K}u = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Gu = s(x,y) \tag{5}$$

cu condiţia pe frontieră:

$$u|_{\Gamma} = s_0(x,y). \tag{6}$$

III. În al treilea rînd vom aproxima soluţia problemei diferenţiale de ordinul al patrulea, folosind rezultatele precedente.

§ 2. **Condiţiile ca operatorul $\mathcal{A}$ să se poată exprima ca un produs de doi operatori de ordinul al doilea.** Operatorul $\mathcal{A}$ se scrie ca un produs de doi operatori de ordinul al doilea $\mathcal{K}$ şi $\mathfrak{K}$ dacă coeficienţii: $A, B, C, D, E, G, P, Q, R, S, T, V, a_{ij}, b_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, g_{ij}$ sînt legaţi prin sistemul de ecuaţii:

$$AP = a_{40},$$

$$2(BP + AQ) = a_{31}, \quad 2(CQ + BR) = a_{13},$$

$$CP + 4BQ + AR = a_{22}, \quad RC = a_{04},$$

$$2\left(P\frac{\partial A}{\partial x} + Q\frac{\partial A}{\partial y}\right) + DP + AS = b_{30},$$

$$4\left(P\frac{\partial B}{\partial x} + Q\frac{\partial B}{\partial y}\right) + 2\left(Q\frac{\partial A}{\partial x} + R\frac{\partial A}{\partial y}\right) + 2DQ + 2SB + EP + AT = b_{21},$$

$$2\left(P\frac{\partial C}{\partial x} + Q\frac{\partial C}{\partial y}\right) + 4\left(Q\frac{\partial B}{\partial x} + R\frac{\partial B}{\partial y}\right) + 2EQ + 2TB + DR + CS = b_{12},$$

$$2\left(Q\frac{\partial C}{\partial x} + R\frac{\partial C}{\partial y}\right) + ER + CT = b_{03},$$

$$P\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2Q\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} + R\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 2\left(P\frac{\partial D}{\partial x} + Q\frac{\partial D}{\partial y}\right) + S\frac{\partial A}{\partial x} + T\frac{\partial A}{\partial y} + GP + DS + AV = d_{20},$$

$$2\left(P\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + 2Q\frac{\partial^2 B}{\partial x\partial y} + R\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right) + 2\left(P\frac{\partial E}{\partial x} + Q\frac{\partial E}{\partial y}\right) + 2\left(Q\frac{\partial D}{\partial x} + R\frac{\partial D}{\partial y}\right) + 2\left(S\frac{\partial B}{\partial x} + T\frac{\partial B}{\partial y}\right) + 2QG + 2BV + ES + DT = d_{11}, \tag{7}$$

$$P\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + 2Q\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial y} + R\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + 2\left(Q\frac{\partial E}{\partial x} + R\frac{\partial E}{\partial y}\right) + S\frac{\partial C}{\partial x} + T\frac{\partial C}{\partial y} + GR + ET + CV = d_{02},$$

$$P\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + 2Q\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y} + R\frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + 2\left(P\frac{\partial G}{\partial x} + Q\frac{\partial G}{\partial y}\right) + S\frac{\partial D}{\partial x} + T\frac{\partial D}{\partial y} + SG + DV = e_{10},$$

$$P\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + 2Q\frac{\partial^2 E}{\partial x\partial y} + R\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + 2\left(Q\frac{\partial G}{\partial x} + R\frac{\partial G}{\partial y}\right) + S\frac{\partial E}{\partial x} + T\frac{\partial E}{\partial y} + GT + EV = e_{01},$$

$$P\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 2Q\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y} + R\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + S\frac{\partial G}{\partial x} + T\frac{\partial G}{\partial y} + GV = g_{00}.$$

Aflarea coeficienţilor $A, B, \ldots, P, Q, \ldots, V$ din acest sistem diferenţial, este o operaţie greoaie. Este evident însă că se pot studia cazuri mai generale decît acelea pe care le-am tratat în [2], unde a_{ij} erau constante şi $b_{ij} = d_{ij} = e_{ij} = g_{ij} = 0$. Vom da mai jos un caz particular, mai general decît cel din [2].

§ 3. **Metoda reţelelor pentru aproximarea soluţiilor unei probleme Dirichlet.** Vom considera o reţea de pătrate de pas h care acoperă întregul domeniu $\mathfrak{D}$. Scopul nostru este de a determina în nodurile situate în interiorul lui $\mathfrak{D}$, valorile aproximative ale lui u, pe care le vom nota prin u cu indici: $u(x_i, y_j) = u_{ij}$, $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jh$, $x_i, y_j \in D$.

Să aproximăm operatorul $\mathfrak{K}$ prin:

$$\tilde{\mathfrak{R}}u = \alpha^1_{ij} u_{i+1,j+1} + \alpha^2_{ij} u_{i+1,j-1} + \alpha^3_{ij} u_{i-1,j+1} + \alpha^1_{ij} u_{i-1,j-1} + \alpha_{ij} u_{ij} + \beta^1_{ij} u_{ij+1} + \beta^2_{ij} u_{i,j-1} + \gamma^1_{ij} u_{i+1,j} + \gamma^2_{ij} u_{i-1,j}; \ \alpha_{ij} \neq 0,$$

Să asociem ecuaţiei (5), ecuaţia

$$\tilde{\mathfrak{R}}u_{ij} = \alpha^1_{ij} u_{i+1,j+1} + \alpha^2_{ij} u_{i+1,j-1} + \dots + \gamma^2_{ij} u_{i-1,j} = s_{ij}. \tag{8}$$

Dezvoltînd în serie Taylor şi comparînd cu (5) obţinem un sistem în care necunoscutele sînt α_{ij}, α^m_{ij}, β^n_{ij}, γ^n_{ij}, $(m = 1, 2, 3, 4;\ n = 1,2)$.

Pentru aproximaţia de ordin I în h, sistemul:

$$\begin{aligned}
&\alpha^1_{ij} + \alpha^2_{ij} + \alpha^3_{ij} + \alpha^4_{ij} + \alpha_{ij} + \beta^1_{ij} + \beta^2_{ij} + \gamma^1_{ij} + \gamma^2_{ij} = G_{ij},\\
&h(\alpha^1_{ij} + \alpha^2_{ij} - \alpha^3_{ij} - \alpha^4_{ij} + \gamma^1_{ij} - \gamma^2_{ij}) = D_{ij},\\
&h(\alpha^1_{ij} - \alpha^2_{ij} + \alpha^3_{ij} - \alpha^4_{ij} + \beta^1_{ij} - \beta^2_{ij}) = E_{ij},\\
&\frac{h^2}{2}(\alpha^1_{ij} + \alpha^2_{ij} + \alpha^4_{ij} + \alpha^3_{ij} + \gamma^1_{ij} + \gamma^2_{ij}) = A_{ij},\\
&h^2(\alpha^1_{ij} - \alpha^2_{ij} - \alpha^3_{ij} + \alpha^4_{ij}) = 2B_{ij},\\
&\frac{h^2}{2}\left(\alpha^1_{ij} + \alpha^2_{ij} + \alpha^3_{ij} + \alpha^4_{ij} + \beta^1_{ij} + \beta^2_{ij}\right) = C_{ij},
\end{aligned} \tag{9'}$$

este echivalent cu:

$$\begin{aligned}
&\beta^1_{ij} = G_{ij} - \alpha_{ij} - \frac{2A_{ij}}{h^2} - \beta^2_{ij},\\
&\gamma^1_{ij} = G_{ij} - \alpha_{ij} - \frac{2C_{ij}}{h^2} - \gamma^2_{ij},\\
&\alpha^1_{ij} = -\frac{3}{4}(G_{ij} - \alpha_{ij}) + \frac{D_{ij} + E_{ij}}{4h} + \frac{2A_{ij} + 2C_{ij} + B_{ij}}{2h^2} + \frac{1}{2}(\beta^2_{ij} + \gamma^2_{ij}),\\
&\alpha^2_{ij} = -\frac{1}{4}(G_{ij} - \alpha_{ij}) + \frac{D_{ij} - E_{ij}}{4h} + \frac{2C_{ij} - B_{ij}}{2h^2} - \frac{1}{2}(\beta^2_{ij} - \gamma^2_{ij}),\\
&\alpha^3_{ij} = -\frac{1}{4}(G_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{D_{ij} - E_{ij}}{4h} + \frac{2A_{ij} - B_{ij}}{2h^2} + \frac{1}{2}(\beta^2_{ij} - \gamma^2_{ij}),\\
&\alpha^4_{ij} = \frac{1}{4}(G_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{D_{ij} + E_{ij}}{4h} + \frac{B_{ij}}{2h^2} - \frac{1}{2}(\beta^2_{ij} + \gamma^2_{ij}),
\end{aligned} \tag{9}$$

unde α_{ij}, β^2_{ij}, γ^2_{ij} rămîn funcţii arbitrare, ultimele două le presupunem > 0.

Pentru a demonstra că sistemul (8) are soluţie şi că aceasta este unică e suficient să se arate că sistemul omogen corespunzător are numai soluţia banală. Ultima afirmaţie rezultată imediat dacă se poate aplica principiul maximului (vezi [1]). Or, principiul maximului are loc numai în cazul cînd coeficienţii α^m_{ij}, β^n_{ij}, γ^n_{ij} sînt de acelaşi semn (pentru a fixa ideile, vom presupune acest semn pozitiv).

Să vedem, deci, în ce caz toţi coeficienţii sînt pozitivi; Din (9) presupunînd realizată această condiţie avem:

$$\begin{aligned}
&0 < \beta^2_{ij} < -(\alpha_{ij} - G_{ij}) - \frac{2A_{ij}}{h^2},\\
&0 < \gamma^2_{ij} < -(\alpha_{ij} - G_{ij}) - \frac{2C_{ij}}{h^2},\\
&0, \frac{3}{4}(G_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{D_{ij} + E_{ij}}{4h} - \frac{2A_{ij} + 2C_{ij} + B_{ij}}{2h^2} < \frac{\beta^2_{ij} + \gamma^2_{ij}}{2} <\\
&< \frac{1}{4}(G_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{D_{ij} + E_{ij}}{4h} + \frac{B_{ij}}{2h^2},\\
&\frac{1}{4}(G_{ij} - \alpha_{ij}) + \frac{D_{ij} - E_{ij}}{4h} - \frac{2A_{ij} - B_{ij}}{2h^2} < \frac{\beta^2_{ij} - \gamma^2_{ij}}{2} < \frac{1}{4}(\alpha_{ij} - G_{ij}) +\\
&\frac{D_{ij} - E_{ij}}{4h} + \frac{2C_{ij} - B_{ij}}{2h^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

De aici rezultă pentru α_{ij} următoarele inegalităţi:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{ij} - G_{ij} > -\frac{2}{h^2}(A_{ij} + C_{ij} + B_{ij}), \quad \alpha_{ij} - G_{ij} < -\frac{D_{ij} + E_{ij}}{h} + \frac{2B_{ij}}{h^2},\\
&\alpha_{ij} - G_{ij} > -\frac{2}{h^2}(A_{ij} + C_{ij} - B_{ij}), \quad \alpha_{ij} - G_{ij} < -\frac{2A_{ij}}{h^2},\\
&\alpha_{ij} - G_{ij} < \frac{D_{ij} + E_{ij}}{h} + \frac{2B_{ij}}{h^2}, \quad \alpha_{ij} - G_{ij} < -\frac{2C_{ij}}{h^2},\\
&\alpha_{ij} - G_{ij} < \frac{D_{ij} - E_{ij}}{h} - \frac{2B_{ij}}{h^2},
\end{aligned}$$

şi de aici următoarele condiţii pentru A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}

$$A_{ij} > 0, \quad C_{ij} > 0,$$

$$|B_{ij}| < A_{ij}, C_{ij},$$

(12) $$|D_{ij} + E_{ij}| < \frac{2}{h}(A_{ij} + C_{ij}), \quad \frac{2}{h}(A_{ij} + C_{ij}) + \frac{4B_{ij}}{h},$$

$$|D_{ij} - E_{ij}| < \frac{2}{h}(A_{ij} + C_{ij}), \quad \frac{2}{h}(A_{ij} + C_{ij}) - \frac{4B_{ij}}{h}.$$

Reciproc, dacă condiţiile (12) sînt îndeplinite, atunci se poate alege o funcţie α_{ij}, care să îndeplinească condiţiile (11). O dată aleasă funcţia α_{ij}, putem alege pe β^2_{ij} şi γ^2_{ij} ca să fie îndeplinite inegalităţile (10) şi astfel toţi coeficienţii lui $\tilde{\mathfrak{K}}$ sînt pozitivi.

Pentru aproximaţia de ordinul al doilea în h, la sistemul (9') se adaugă:

$$\alpha^1_{ij} + \alpha^2_{ij} - \alpha^3_{ij} - \alpha^4_{ij} + \gamma^1_{ij} - \gamma^2_{ij} = 0,$$

$$\alpha^1_{ij} - \alpha^2_{ij} + \alpha^3_{ij} - \alpha^4_{ij} = 0,$$

(13') $$\alpha^1_{ij} + \alpha^2_{ij} - \alpha^3_{ij} - \alpha^4_{ij} = 0,$$

$$\alpha^1_{ij} - \alpha^2_{ij} + \alpha^3_{ij} - \alpha^4_{ij} + \beta^1_{ij} - \beta^2_{ij} = 0$$

şi noul sistem va fi echivalent cu:

$$D_{ij} = E_{ij} = 0,$$

$$\beta^1_{ij} = \beta^2_{ij} = \frac{G_{ij} - \alpha_{ij}}{2} - \frac{A_{ij}}{h^2},$$

$$\gamma^1_{ij} = \gamma^2_{ij} = \frac{G_{ij} - \alpha_{ij}}{2} - \frac{C_{ij}}{h^2},$$

(13) $$\alpha^1_{ij} = \alpha^4_{ij} = \frac{\alpha_{ij} - G_{ij}}{4} + \frac{A_{ij} + C_{ij} + B_{ij}}{2h^2},$$

$$\alpha^2_{ij} = \alpha^3_{ij} = \frac{\alpha_{ij} - G_{ij}}{4} + \frac{A_{ij} + C_{ij} - B_{ij}}{2h^2}.$$

Urmînd acelaşi raţionament ca mai sus aflăm în locul condiţiilor (12) următoarele:

(14) $$-A_{ij}, \quad -C_{ij} < B_{ij} < A_{ij}, \quad C_{ij}.$$

Evident aceasta implică $A_{ij}, C_{ij} > 0$.

Observaţie. Dacă am fi considerat α^m_{ij}, β^n_{ij}, γ^n_{ij} negativi, atunci inegalităţile (13) ar fi avut sensul invers.

§ 4. **Evaluarea diferenţei** $\mathfrak{K}u - \tilde{\mathfrak{K}}u$. Se poate verifica simplu că diferenţa dintre $\mathfrak{K}u - \tilde{\mathfrak{K}}u$ este:

$$|\mathfrak{K}u - \tilde{\mathfrak{K}}u| \leqslant \frac{h^3}{3!} M^{(3)}_u [8(|\alpha^1_{ij}| + |\alpha^2_{ij}| + |\alpha^3_{ij}| + |\alpha^4_{ij}|) + |\beta^1_{ij}| + |\beta^2_{ij}| + |\gamma^1_{ij}| + |\gamma^2_{ij}|]$$

unde

$$M^{(3)}_u = \max\left\{ \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|, \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}\right|, \left|\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right|, \left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right| \right\}.$$

Folosind inegalităţile (11), (12) obţinem:

$$|\mathfrak{K}u - \tilde{\mathfrak{K}}u| \leqslant \frac{h^3}{3!} M^{(3)}_u \left[8\left|\frac{A_{ij} + C_{ij}}{h^2}\right| + 8\left|\frac{A_{ij} + C_{ij}}{h^2}\right| + 8\left|\frac{A_{ij} + C_{ij}}{h^2}\right| + 8\left|\frac{A_{ij} + C_{ij}}{h^2}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{2(A_{ij} + C_{ij})}{h^2}\right| + \left|\frac{2(A_{ij} + C_{ij})}{h^2}\right| + \left|\frac{2(A_{ij} + C_{ij})}{h^2}\right| + \left|\frac{2(A_{ij} + C_{ij})}{h^2}\right| \right] +$$

$$= \frac{h}{3!} M^{(3)}_u 40 |A_{ij} + C_{ij}| < \frac{40}{3} M^{(3)}_u h \tau; \quad \tau = \max(A_{ij}, C_{ij}).$$

Dacă se lucrează cu sistemul (9') completat cu (13') atunci diferenţa dintre $\mathfrak{K}u - \tilde{\mathfrak{K}}u$ este

$$|\mathfrak{K}u - \tilde{\mathfrak{K}}u| \leqslant \frac{h^4}{4!} M^{(4)}_u \{16(|\alpha^1_{ij}| + |\alpha^2_{ij}| + |\alpha^3_{ij}| + |\alpha^4_{ij}|) + |\beta^1_{ij}| + |\beta^2_{ij}| + |\gamma^1_{ij}| +$$

$$|\gamma^2_{ij}|\} \leqslant \frac{13}{3} h^2 \tau M^{(4)}_u.$$

§ 5. **Aproximarea soluţiei problemei de ordinul al patrulea pentru ecuaţia** $\mathfrak{A}u = f(x, y)$ **cu condiţiile pe frontieră** $u|_\Gamma = \varphi_0(x, y)$, $\mathfrak{K}u|_\Gamma = \varphi_1(x, y)$

Vom rezolva problema în următoarele etape:

a) Vom găsi în nodurile reţelei valorile aproximative $\tilde{z}$ ale funcţiei z care în interiorul lui $\mathfrak{D}$ satisface condiţia:

(17) $$\mathfrak{K}z = f(x, y) \text{ iar pe frontieră } z|_\Gamma = \varphi_1(x, y)$$

b) Vom găsi valorile aproximative ale lui $u(x, y)$ care în interiorul domeniului $\mathfrak{D}$ satisfac ecuaţia

(18) $$\mathfrak{K}u = \tilde{z}(x, y) \text{ iar pe frontieră condiţia } u|_\Gamma = \varphi_0(x, y).$$

Fiecare din această problemă de ordinul al doilea este o problemă de tip Dirichlet a cărei soluţie aproximativă a fost găsită în § 3.

§ 6. **Evaluarea diferenţei** $\mathfrak{A}u - \tilde{\mathfrak{A}}u$. Vom arăta că dacă presupunem

$\mathcal{K}u - \widetilde{\mathcal{K}}u$ şi $\mathcal{H}u - \widetilde{\mathcal{H}}u$ de ordinul I sau respectiv de II în h, atunci şi diferenţa $\mathcal{A}u - \widetilde{\mathcal{A}}u$ este de asemenea de ordinul lui h respectiv al lui h^2.

În acest scop să punem:

$$\mathcal{K}u - \widetilde{\mathcal{K}}u = F(x, y)\,h; \quad \mathcal{H}v - \widetilde{\mathcal{H}}v = G(x, y)\,h$$

unde

$$|F(x, y)| \leqslant c\tau M_u^{(3)} \quad ; \quad \tau = \max(A_{ij}, C_{ij}),$$

$$|G(x, y)| \leqslant c\rho M_v^{(3)} \quad ; \quad \rho = \max(P_{ij}, R_{ij}),$$

$M_v^{(k)}$ fiind maximul modulului derivatelor de ordinul k ale funcţiei v.

Avem apoi:

$$\mathcal{A}u - \widetilde{\mathcal{A}}u = \mathcal{H}(\mathcal{K}u) - \widetilde{\mathcal{H}}(\widetilde{\mathcal{K}}u) = \mathcal{H}(\mathcal{K}u - \widetilde{\mathcal{K}}u) + (\mathcal{H} - \widetilde{\mathcal{H}})(\mathcal{K}u - F(x, y)\,h) =$$

$$= h\mathcal{H}(F) + hG^*(x, y) - h^2 G^{**}(x, y)$$

unde

$$|\mathcal{H}(F)| \leqslant 4\rho^* M_F^{(2)} \leqslant 4c\tau M_u^{(5)} \quad , \quad \rho^* = \max(\rho, |Q_{ij}|),$$

$$|G^*(x, y)| \leqslant c\rho M_{Ku}^{(3)} \leqslant 4c\rho\tau M_u^{(5)},$$

$$|G^{**}(x, y)| \leqslant c\rho M_F^{(3)} \leqslant c^2\rho\tau M_u^{(6)}.$$

Deci

(19) $$|\mathcal{A}u - \widetilde{\mathcal{A}}u| < hw,$$

unde w se poate calcula din cele de mai sus.

Un caz particular al formulelor (7). Am văzut că formulele (7) reprezintă condiţiile în care este posibilă scrierea operatorului $\mathcal{A}u$ ca produs de doi operatori de ordinul al doilea.

Să examinăm un caz particular şi anume acela cînd:

(20) $$B = D = E = G = Q = S = T = V = 0.$$

Atunci sistemul (7) se reduce la următorul:

(21)
$$(*)\begin{cases} P = \dfrac{a_{40}}{A}; \quad R = \dfrac{a_{04}}{C}, \\ a_{04}A^2 - a_{22}AC + a_{40}C^2 = 0, \\ a_{13} = a_{31} = 0, \end{cases}$$

$$(**)\begin{cases} \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial x} = \dfrac{b_{30}}{2a_{40}}; \quad \dfrac{1}{C}\dfrac{\partial A}{\partial y} = \dfrac{b_{21}}{2a_{40}}, \\ \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial C}{\partial x} = \dfrac{b_{12}}{2a_{40}}; \quad \dfrac{1}{C}\dfrac{\partial C}{\partial x} = \dfrac{b_{03}}{2a_{04}}, \end{cases}$$

$$(***)\begin{cases} \dfrac{a_{04}}{A}\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \dfrac{a_{04}}{C}\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} = d_{20}, \\ \dfrac{a_{40}}{A}\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \dfrac{a_{04}}{C}\dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2} = d_{02}, \; d_{11} = 0. \end{cases}$$

Să notăm funcţiile $b_{30}/2a_{40}$, $b_{03}/2a_{04}$, $b_{12}/2a_{40}$, $b_{21}/2a_{04}$ respectiv prin k_1, k_2, h_1, h_2.

Sistemul (21**) se poate integra numai dacă vor fi îndeplinite condiţiile:

(22)
$$A\left(h_1 h_2 - \frac{\partial k_1}{\partial y}\right) + C\left(-k_1 h_2 + \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) = 0;$$
$$A\left(h_1 k_2 - \frac{\partial h_1}{\partial y}\right) + C\left(-h_1 h_2 + \frac{\partial k_2}{\partial x}\right) = 0,$$

or, ca acest sistem să admită soluţie nebanală trebuie ca:

(23)
$$\frac{h_1 h_2 - \dfrac{\partial k_1}{\partial y}}{-k_1 h_2 + \dfrac{\partial h_2}{\partial x}} = \frac{h_1 k_2 - \dfrac{\partial h_1}{\partial y}}{-h_1 h_2 + \dfrac{\partial k_2}{\partial x}} = -\frac{C}{A}$$

Notăm acest raport cu λ. De aici:

(24) $$C = -\lambda A.$$

Acum sistemul (21) are forma următoare:

(25)
$$(*)\begin{cases} P = \dfrac{a_{40}}{A}, \quad R = -\dfrac{a_{04}}{\lambda A}, \\ a_{40}\lambda^2 + a_{22}\lambda + a_{04} = 0, \\ a_{13} = a_{31} = 0, \end{cases}$$

$$(**)\begin{cases} \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial x} = k_1; \quad \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial y} = -\lambda h_2, \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial x} + \dfrac{\lambda}{A}\dfrac{\partial A}{\partial x} = -h_1; \quad \dfrac{\partial \lambda}{\partial y} + \dfrac{\lambda}{A}\dfrac{\partial A}{\partial y} = \lambda k_2, \end{cases}$$

$$(***)\begin{cases} \dfrac{a_{40}}{A}\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \dfrac{a_{04}}{\lambda A}\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} = d_{20}; \quad d_{11} = 0, \\ \dfrac{a_{40}}{A}\left(\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}A + 2\dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\dfrac{\partial A}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) - \dfrac{a_{04}}{\lambda A}\left(\dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2}A + 2\dfrac{\partial \lambda}{\partial y}\dfrac{\partial A}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right) = d_{02}. \end{cases}$$

Din primele două ecuaţii (25**) rezultă

$$A = e^{\int k_1 dx} \varphi(y), \tag{26}$$

unde

$$\varphi(y) = \alpha e^{-\int \left(\lambda h_2 + \int \frac{\partial k_1}{\partial y} dx\right) dy}, \tag{27}$$

iar α e o constantă.

Deci operatorul $\mathcal{A}u$ se va putea scrie sub forma:

$$\mathcal{A}u = \left(P \frac{\partial^2}{\partial x^2} + R \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

în cazurile în care λ dat de raportul (23), va satisface ecuaţiile în λ din sistemul (25).

§ 7. **Studiul unui caz particular.** Fie ecuaţia:

$$\begin{aligned} &G\nabla^4 F + 2\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 F + 2\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 F + 4\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

unde G este modulul lui Kirchkoff, iar F o funcţie continuă împreună cu derivatele ei pînă la ordinul patru inclusiv, într-un domeniu închis D. Această ecuaţie intervine în determinarea componentelor deplasării în cazul problemei elasticităţii plane pentru medii neomogene, izotrope, incompresibile [4].

Coeficienţii operatorului $\mathcal{A}$ vor fi:

$$a_{40} = a_{04} = G; \quad a_{22} = 2G; \quad a_{13} = a_{31} = 0,$$

$$b_{30} = b_{12} = 2\frac{\partial G}{\partial x}; \quad b_{03} = b_{21} = 2\frac{\partial G}{\partial y},$$

$$d_{20} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}; \quad d_{02} = -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}; \quad d_{11} = 4\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y},$$

$$e_{10} = e_{01} = g_{00} = 0.$$

Ecuaţia de mai sus se poate descompune în felul următor:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(P\frac{\partial^2}{\partial x^2} + R\frac{\partial^2}{\partial y^2} + T\frac{\partial}{\partial y} + V\right)F = 0$$

unde

$$D = \frac{2}{G}\frac{\partial G}{\partial x}, \quad P = R = G, \quad T = 2\frac{\partial G}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}.$$

G satisface următoarea condiţie

$$\Delta G = \frac{2}{G}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Березин И. С., Жидков Н. П. — *Методы вычислений*, том. II. Физматгиз. Москва, 1962.
2. Gheorghiev, O. A. — *Aproximarea soluţiilor unor ecuaţii care intervin în teoria elasticităţii*. Studii şi cerc. şt. Acad. R. P. R. Fil. Iaşi — Matematica, t XIV, (1963), p. 231.
3. Greenspan D., Warthen R. M. — *On the Approximate Solution of Dirichlet-Type Problems with Singularities on the Boundary*. Journal of the Franklin Institute, t. 273, (1962), p. 187.
4. Olszak W., *Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity*. Proceedings of the I.U.T.A.M. Symposium, Pergamon Press, London, 1959.
5. Petrovski I. G. — *Prelegeri asupra teoriei ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale*. Traducere din l. rusă. Buc. Ed. tehnică, 1953.

L'APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE À COEFFICIENTS VARIABLES

Résumé

On donne une méthode numérique pour l'approximation des solutions d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre à coefficients variables du type (1) qui satisfassent aux conditions (2), (3); $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ étant des opérateurs du deuxième ordre.

Ce problème se rencontre dans la théorie de l'élasticité pour la détermination des composantes du deplacement dans le cas du problème de l'élasticité plane des milieux non homogènes, isothropes et incompressibles.

Pour trouver la solution approximative de l'équation envisagée on divise le problème en deux problèmes du type Dirichlet (17) et (18) dont la solution par la méthode des réseaux est déjà connue.

Pour approximer la solution du problème de Dirichlet pour l'équation $\mathcal{K}u = s(x, y)$ avec la condition sur la frontière $u_\Gamma = s_0(x, y)$, il faut que la condition (12) soit réalisée. On étudie le problème quand l'approximation de la solution est de l'ordre h ou h^2.

Dans le dernier § du travail on examine les cas particuliers (20) et (28) utiles, dans la théorie de l'élasticité.