O EXTINDERE A ALGEBRELOR POLINOMIALE CU SCALARI REALI

DE

I. ENESCU

Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Universității „Al. I. Cuza" din Iași, 26 — 28 octombrie 1967

1. În această Notă, ne propunem construirea și studierea proprietăților de structură ale unor algebre reale de ordin $4n$, cu ajutorul produsului direct dintre corpul Q al cuaternionilor reali și algebra polinomială reală generată de polinomul $\varphi(\lambda) = \lambda^n$.

2. Fie mulțimea perechilor ordonate (a, b) de cuaternioni reali unde $a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$ și $b = b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4$ în care $a_s, b_s (s = 1, \ldots, 4)$ sînt numere reale oarecare, iar $1, i, j, k$ formează o bază în Q, cu tabela de înmulțire bine cunoscută [1].

Definind suma a două perechi în mod obișnuit, prin

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

și produsul cu un scalar real prin

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b),$$

mulțimea considerată se organizează într-un spațiu liniar de dimensiune opt, V_8, peste cîmpul real.

Într-adevăr, perechea (a, b) se poate scrie sub forma

$$(a, b) = (a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4,\ b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4),$$

iar corespondența $(a, b) \rightleftarrows (a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$ este biunivocă și satisface cerințelor de izomorfism față de operațiile de adunare a perechilor și respectiv de înmulțire cu scalari.

Atunci o bază în V_8 este dată de perechile

$$u_1 = (1,0),\ u_2 = (i, o),\ u_3 = (j, o),\ u_4 = (k, 0),\ u_5 = (0, 1), \tag{1}$$
$$u_6 = (0, i),\ u_7 = (0, j),\ u_8 = (0, k).$$

3. Definim în V_8 produsul a două perechi prin

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + bc). \tag{2}$$

Se verifică distributivitatea produsului, definit prin (2), la stînga şi la dreapta, faţă de adunarea perechilor de cuaternioni:

$$(a, b)[(c, d) + (e, f)] = (a, b)(c + e, d + f) = (a(c + e),\ a(d + f) + b(c + e)) =$$
$$= (ac + ae, ad + af + bc + be) = (ac, ad + bc) + (ae, af + be) =$$
$$= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f),$$
$$[(c, d) + (e, f)](a, b) = (c + e, d + f)(a, b) = ((c + e)a, (c + e)b + (d + f)a) =$$
$$= (ca + ea, cb + eb + da + fa) = (ca, cb + da) + (ea, eb + fa) =$$
$$= (c, d)(a, b) + (e, f)(a, b).$$

Apoi se vede că:

$$\lambda[(a, b)(c, d)] = [\lambda(a, b)](c, d) = (a, b)[\lambda(c, d)].$$

Într-adevăr

$$\lambda[(a, b)(c, d)] = \lambda(ac, ad + bc) = (\lambda ac, \lambda ad + \lambda bc),$$
$$[\lambda(a, b)](c, d) = (\lambda a, \lambda b)(c, d) = (\lambda ac, \lambda ad + \lambda bc),$$
$$(a, b)[\lambda(c, d)] = (a, b)(\lambda c, \lambda d) = (\lambda ac, \lambda ad + \lambda bc).$$

În sfîrşit, notînd cu: $x = (a, b)$, $y = (c, d)$, $z = (e, f)$, să verificăm şi asociativitatea produsului:

$$xy = (ac, ad + bc);\ (xy)z = (ac, ad + bc)(e, f) = (ace, acf + (ad + bc)e) =$$
$$= (ace. acf + ade + bce);$$
$$yz = (c, d)(e, f) = (ce, cf + de);\ x(yz) = (a, b)(ce, cf + de) =$$
$$= (ace, a(cf + de) + bce) = (ace, acf + ade + bce) = (xy)z.$$

Se observă imediat că produsul nu este comutativ, întrucît produsul a doi cuaternioni nu are această proprietate. De asemenea se constată uşor că elementul $u_1 = (1,0)$ are proprietatea $(a, b)(1,0) = (1,0)(a,b) = (a, b)$, oricare ar fi perechea (a, b).

Aşadar spaţiul liniar V_8 în care s-a introdus produsul (2), formează, o algebră reală, fie ea A_8, asociativă, necomutativă şi cu unitate principală. O bază în A_8 o constituie elementele (1).

Fie acum algebra polinomială H_{λ^2}, generată de polinomul $\varphi(\lambda) = \lambda^2$. Se ştie, [2], că elementele e_1, e_2 ce formează baza sa de puteri, se înmulţesc după relaţiile:

$$e_1^2 = e_1,\ e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2,\ e_2^2 = 0. \tag{3}$$

Considerînd produsul direct dintre corpul Q şi algebra H_{λ^2}, o bază a sa este formată, [1], cu elementele

$$\varepsilon_1 = 1e_1,\ \varepsilon_2 = ie_1,\ \varepsilon_3 = je_1,\ \varepsilon_4 = ke_1, \tag{4}$$
$$\varepsilon_5 = 1e_2,\ \varepsilon_6 = ie_2,\ \varepsilon_7 = je_2,\ \varepsilon_8 = ke_2.$$

Ţinînd seama de permutabilitatea simbolurilor 1, i, j k faţă de e_1, e_2, fapt ce rezultă din definiţia produsului direct [1], calculul produselor $\varepsilon_h \varepsilon_l$ conduce la o tabelă identică cu aceea a produselor $u_h u_l (h, l = 1,\ldots,8)$, dovedind astfel

Teorema 1. *Algebra A_8 este produsul direct $Q \times H_{\lambda^2}$.*

Structura algebrei A_8 se pune uşor în evidenţă scriind tabela sa de înmulţire în baza u_h:

(5)

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_2	u_2	$-u_1$	u_4	$-u_3$	u_6	$-u_5$	u_8	$-u_7$
u_3	u_3	$-u_4$	$-u_1$	u_2	u_7	$-u_8$	$-u_5$	$-u_6$
u_4	u_4	u_3	$-u_2$	$-u_1$	u_8	u_7	$-u_6$	$-u_5$
u_5	u_5	u_6	u_7	u_8	0	0	0	0
u_6	u_6	$-u_5$	u_8	$-u_7$	0	0	0	0
u_7	u_7	$-u_8$	$-u_5$	u_6	0	0	0	0
u_8	u_8	u_7	$-u_6$	$-u_5$	0	0	0	0

Se vede că elementele u_5, u_6, u_7, u_8 formează o bază pentru algebra nulă de ordinul 4, care constituie radicalul algebrei A_8, iar u_1, u_2 u_3, u_4 alcătuiesc o bază pentru algebra cuaternionilor reali, rezultat ce se poate formula prin

Teorema 2. *Algebra A_8 este suma (nedirectă) dintre corpul Q şi algebra nulă de ordin 4 (radicalul) şi această proprietate este pusă în evidenţă prin tabela (5).*

Remarcăm faptul [2], că, la fel ca şi algebra polinomială (3), algebra A_8 este indecompozabilă. Într-adevăr, fie $x = (a, b)$ un element oarecare din A_8 şi atunci avem $x^2 = (a^2,\ ab + ba)$. Condiţia $x^2 = x$ conduce la

sistemul de ecuaţii cuaternionice $a^2 = a$, $ab + ba = b$, care nu admite decît soluţiile $a = 1$ $b = 0$ şi $a = 0$ $b = 0$, de unde rezultă că algebra A_8 nu conţine idempotenţi diferiţi de zero şi de unitatea principală, fiind deci indecompozabilă.

4. Să considerăm acum algebra polinomială H generată de polinomul $\varphi(\lambda) = \lambda^n$. Conform proprietăţilor ei de structură, stabilite în [2], fie e_1, $e_2, \ldots, e_n$ baza sa de puteri. Atunci avem $e_2^0 = e_1$, $e_2 = e_2$, $e_2^2 = e_3, \ldots, e_2^{s-1} = e_2, \ldots, e_2^{n-1} = e_n$ şi $e_2^n = 0$, de unde urmează că $e_p e_q = e_2^{p-1} e_2^{q-1} = e_2^{p+q-2} = e_{p+q-1}$ şi atunci

$$(6) \qquad e_p e_q = \begin{cases} e_{p+q-1} & \text{dacă } p + q < n + 2 \\ 0 & \text{dacă } p + q \geqslant n + 2 \end{cases} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n).$$

Reamintim apoi, aşa cum s-a arătat în [2], că radicalul algebrei H este format cu toate elementele de forma $\sum_{2}^{n} \alpha_h e_h$ şi că indicele său de nilpotenţă este egal cu ordinul n al algebrei polinomiale respective.

Construind produsul direct $Q \times H$ urmează că o bază a sa este formată din ansamblul elementelor de forma $1e_p$, ie_p, je_p, ke_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$. Grupăm aceste elemente în n clase de cîte patru notate respectiv prin $g_1, g_2, \ldots, g_n$, după cum urmează:

$$g_1 = (1e_1, ie_1, je_1, ke_1), \; g_2 = (1e_2, ie_2, je_2, ke_2), \ldots, g_n = (1e_n, ie_n, je_n, ke_n).$$

Notînd cu u_{g_s} un element oarecare din grupa g_s şi ţinînd seama de permutabilitatea lui 1, i, j, k cu oricare e_s, precum şi de relaţiile (6), avem

$$(7) \qquad u_{g_p} u_{g_q} = \begin{cases} u_{g_{p+q-1}} & \text{dacă } p + q < n + 2, \\ 0 & \text{dacă } p + q \geqslant n + 2. \end{cases}$$

Relaţiile (7), împreună cu proprietăţile semnalate ale algebrei H, demonstrează

Teorema 3. *Elementele din clasa g_1 formează o bază pentru o algebră de ordin 4 izomorfă cu corpul Q.*

Lema 1. *Elementele din clasele $g_2, g_3, \ldots, g_n$ considerate împreună, formează o bază pentru o algebră R, de ordin $4n - 4$.*

Lema 2. *Algebra R este ideal pentru produsul direct $Q \times H$.*

Lema 3. *Algebra R este nilpotentă de indice n.*

Teorema 4. *Algebra R este radicalul algebrei $Q \times H$.*

Întrucît spaţiile liniare generate respectiv de g_1 şi ansamblul $g_2, \ldots, g_n$ nu au în comun decît elementul zero, rezultă următorul

Corolar *Algebra $Q \times H$ este suma (nedirectă) dintre corpul Q şi radicalul R.*

Vom arăta acum că algebra $Q \times H$ nu conţine idempotenţi diferiţi de zero şi de unitatea ei principală.

Într-adevăr, fie $a = x + y$ un element oarecare din $Q \times H$, cu $x \in Q$ şi $y \in R$. Avem $a^2 = x^2 + xy + yx + y^2$. Condiţia $a^2 = a$, conduce la $x^2 + xy + yx + y^2 = x + y$ sau

$$(8) \qquad x^2 - x = y - y^2 - xy - yx,$$

unde, evident, $x^2 - x \in Q$ şi $y - y^2 - xy - yx \in R$.

Întrucît Q şi R nu au în comun decît elementul nul, urmează că relaţia (8) nu poate avea loc decît dacă cei doi membri sînt simultan nuli, deci: $x^2 - x = 0$ şi $y - y^2 - xy - yx = 0$.

Din $x^2 - x = 0$, urmează $x(x - e) = 0$ şi cum $x \in Q$ rezultă $x = 0$ sau $x = e$, unde e este unitatea principală a algebrei $Q \times H$. Dacă $x = 0$ urmează că $y - y^2 = 0$ sau $y^2 = y$. Cum $y \in R$, ţinînd seama de nilpotenţa radicalului, rezultă că relaţia $y^2 = y$ nu poate avea loc decît pentru $y = 0$, ceea ce arată că dacă $x = 0$, atunci $a = 0$. Dacă $x = e$, atunci $a = e + y$ şi condiţia $a^2 = a$ ia forma $e + 2y + y^2 = e + y$, sau $y^2 = -y$ ceea ce atrage faptul că $y^n = (-1)^{n+1} y$, care implică din nou anularea lui y, aşa cum rezultă ţinînd seama de lema 3. Deci pentru $x = e$, rezultă $y = 0$ şi $a = e$, ceeace arată că singurii idempotenţi ai algebrei $Q \times H$ sînt elementul nul şi unitatea principală, dovedind astfel

Teorema 5. *Algebra $Q \times H$ este indecompozabilă.*

Institutul politehnic Iaşi
Catedra de Matematici II

BIBLIOGRAFIE

1. Чеботарев Н. Г. — *Введение в теорию алгебр*. М. — Л. 1949.
2. Enescu I. — *Asupra algebrelor polinomiale (I)*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, XI(XV) 3 — 4, pp. 25 — 28.

UNE EXTENSION DES ALGÈBRES POLYNÔMIALES À SCALAIRES RÉELS

(Resumé)

On considère le produit direct formé par le corps Q des quaternions réels et l'algèbre polynômiale engendrée par $\varphi(\lambda) = \lambda^2$ et respectivement $P(\lambda) = \lambda^n$ et on étudie la structure des algèbres obtenues