SUR L'ÉQUIVALENCE DE LA CONVERGENCE ET DE LA STABILITÉ D'UN SCHÉMA ABSTRAIT AUX DIFFÉRENCES POUR L'APPROXIMATION DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION NON-LINÉAIRE

PAR

C. IGNAT

Introduction. Une question importante dans la théorie des schémas aux différences est celle d'établir les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence des approximations vers la solution exacte du problème donné. Sont bien connus en cette direction le théorème de Lax [4] pour le cas linéaire et sa généralisation due à Ansorge [1] pour le cas non-linéaire des problèmes à valeurs initiales. Récemment, N. N. Goudovitch [3] a étudié cette question pour un problème linéaire dans un espace de Banach. En retenant l'idée de Goudovitch de l'approximation sur des espaces-facteurs, nous nous proposons d'étudier l'équivalence de la convergence et de la stabilité pour un problème non-linéaire dans des F-espaces.

§ 1. Familles d'espaces-facteurs attachées à des espaces du type F

Soient F_1 et F_2 deux espaces linéaires, métriques complets (F-espaces), dont les métriques sont $\rho_1(u, v)$, $(u, v \in F_1)$ et $\rho_2(f, g)$ $(f, g \in F_2)$ respectivement; $A = \{\alpha, \geqslant\}$ un ensemble dirigé, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\{H_\alpha\}_{\alpha \in A}$ deux familles de variétés linéaires fermées, $G_\alpha \subset F_1$, $H_\alpha \subset F_2$.

Pour une variété G_α fixée (respectivement H_α) considérons l'espace-facteur F_1/G_α (resp. F_2/H_α) et convenons de notr la classe correspondante d'un élément $x \in F_1$ (resp. $f \in F_2$) par $\tilde{x}_\alpha$ (resp. $\tilde{f}_\alpha$).

Dans l'espace-facteur ainsi construit nous définissons la métrique d'une manière habituelle par

(1) $$\sigma_\alpha(\widetilde{x}_\alpha, \widetilde{\theta}_\alpha) = \inf_{z \in G_\alpha} \rho_1(x + z, \theta_1),$$

(respectivement

(1') $$\tau_\alpha(\widetilde{f}_\alpha, \widetilde{\theta}'_\alpha) = \inf_{h \in H_\alpha} \rho_2(f + h, \theta_2)),$$

où θ_1 (resp. θ_2) est l'élément nul de F_1 (resp. F_2) et $\widetilde{\theta}_\alpha = G_\alpha$ (resp. $\widetilde{\theta}'_\alpha = H_\alpha$).

En ce cas on sait que F_1/G_α (resp. F_2/H_α) est aussi un F-espace ([2], II, § 4, 13). En ce qui concerne les familles $\{F_1/G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ et $\{F_2/H_\alpha\}_{\alpha \in A}$, on suppose qu'elles satisfassent aux conditions suivantes:

(i) Si $\alpha \geqslant \alpha'$ on a $G_\alpha \subseteq G_{\alpha'}$ et $H_\alpha \subseteq H_{\alpha'}$;

(ii) $\bigcap_{\alpha \geqslant \alpha_0} G_\alpha = \{\theta_1\}$, $\bigcap_{\alpha \geqslant \alpha_0} H_\alpha = \{\theta_2\}$ quel que soit $\alpha_0 \in A$;

(iii) $\lim_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\widetilde{u}_\alpha, \widetilde{\theta}_\alpha) = \rho_1(u, \theta_1)$, $\lim_{\alpha \in A} \tau_\alpha(\widetilde{g}_\alpha, \widetilde{\theta}'_\alpha) = \rho_2(g, \theta_2)$.

§ 2. L'adaptation d'un théorème de Rinow sur les familles continues convergentes d'opérateurs

Soit $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'opérateurs, S_α: $F_2/H_\alpha \to F_1/G_\alpha$.

Définition 1. *La famille $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ converge, pour $f \in F_2$ fixé vers $u \in F_1$ si*

(2) $$\lim_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\widetilde{u}_\alpha, S_\alpha \widetilde{f}_\alpha) = 0.$$

Théorème 1. *S'il existe la limite de la famille $\{S_\alpha \widetilde{f}_\alpha\}_{\alpha \in A}$, elle est unique.*

Démonstration. Supposons qu'on a deux éléments-limite u et v de sorte que

$$\lim_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\widetilde{u}_\alpha, S_\alpha \widetilde{f}_\alpha) = 0 \text{ et } \lim_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\widetilde{v}_\alpha, S_\alpha \widetilde{f}_\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe α'_0 et α''_0 tels que:

$$\sigma_\alpha(\widetilde{u}_\alpha, S_\alpha \widetilde{f}_\alpha) < \varepsilon/2 \text{ pour tout } \alpha \geqslant \alpha'_0,$$

$$\sigma_\alpha(\widetilde{v}_\alpha, S_\alpha \widetilde{f}_\alpha) < \varepsilon/2 \text{ pour tout } \alpha \geqslant \alpha''_0.$$

En prenant $\alpha_0 \in A$, $\alpha_0 \geqslant \alpha'_0$, $\alpha_0 \geqslant \alpha''_0$ on a

(a) $$\sigma_\alpha(\widetilde{u}_\alpha, \widetilde{v}_\alpha) \leqslant \sigma_\alpha(\widetilde{u}_\alpha, S_\alpha \widetilde{f}_\alpha) + \sigma_\alpha(\widetilde{v}_\alpha, S_\alpha \widetilde{f}_\alpha) < \varepsilon \text{ pour } \alpha \geqslant \alpha_0.$$

Soit maintenant $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$. D'après (i), $G_{\alpha_1} \subseteq G_{\alpha_2}$ et par suite $\sigma_{\alpha_1}(\widetilde{u}_{\alpha_1}, \widetilde{v}_{\alpha_1}) = \inf_{z \in G_{\alpha_1}} \rho_1(u - v + z, \theta_1) \geqslant \inf_{z \in G_{\alpha_2}} \rho_1(u - v + z, \theta_1) = \sigma_{\alpha_2}(\widetilde{u}_{\alpha_2}, \widetilde{v}_{\alpha_2})$. La fonction

$\psi(\alpha) = \sigma_\alpha(\widetilde{u}_\alpha, \widetilde{v}_\alpha)$ est une application de A dans R^+, isotone et, en vertu de (a) $\lim_{\alpha \in A} \psi(\alpha) = 0$. Soit $\bar{\alpha} \in A$ tel que $\psi(\bar{\alpha}) > 0$. En prenant $\psi(\bar{\alpha}) = \varepsilon$, on trouve $\alpha' \in A$ tel que

(b) $$\psi(\alpha) < \psi(\bar{\alpha}), \text{ quel que soit } \alpha \geqslant \alpha'.$$

Mais pour $\bar{\bar{\alpha}} \geqslant \bar{\alpha}$, $\bar{\bar{\alpha}} \geqslant \alpha'$ on a par suite de la propriété d'isotonie et par (b) $\psi(\bar{\bar{\alpha}}) \geqslant \psi(\bar{\alpha})$ et $\psi(\bar{\bar{\alpha}}) < \psi(\bar{\alpha})$ ce qui est absurde. Alors on a $\psi(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in A$. Mais $\sigma_\alpha(\widetilde{u}_\alpha, \widetilde{v}_\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in A$ implique $u - v \in G_\alpha$, c'est-à-dire $u - v \in \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$ et par suite de la condition (ii), $u - v = \theta_1$, q. e. d.

Théorème 2. *Soit la famille $\{S_\alpha \widetilde{f}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ convergente vers un élément $u \in F_1$. On peut extraire de chaque classe $S_\alpha \widetilde{f}_\alpha$ un représentant $w^\alpha \in F_1$ tel que*

$$\lim_{\alpha \in A} \rho_1(u, w^\alpha) = 0.$$

Démonstration. Soit v^α un élément quelconque de la classe $S_\alpha \widetilde{f}_\alpha$. On a:

$$\sigma_\alpha(\widetilde{u}_\alpha, S_\alpha \widetilde{f}_\alpha) = \inf_{z \in G_\alpha} \rho_1(u - v^\alpha + z, \theta_1).$$

Soit une application $\varphi(\alpha): A \to R^+$ antitone non-stationnaire telle que $\lim_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) = 0$. Par la définition de l'infimum il existe un élément $z^\alpha \in G_\alpha$ de sorte que

$$\rho_1(u - v^\alpha + z^\alpha, \theta_1) < \sigma_\alpha(\widetilde{u}_\alpha, S_\alpha \widetilde{f}_\alpha) + \varphi(\alpha)$$

et comme $v^\alpha + z^\alpha = w^\alpha \in S_\alpha f_\alpha$ on a $\lim_{\alpha \in A} \rho_1(u, w^\alpha) = 0$.

Définition 2. *Une famille d'opérateurs $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est également continue si pour $\varepsilon > 0$ arbitraire et pour tout $f \in F_2$, on trouve $\eta(\varepsilon, f)$ et $\alpha_0(\varepsilon, f) \in A$, de sorte que*

(3) $$\sigma_\alpha(S_\alpha \widetilde{f}_\alpha, S_\alpha \widetilde{g}_\alpha) < \varepsilon,$$

quel que soit $\alpha \geqslant \alpha_0(\varepsilon, f)$ et pour tout $\widetilde{g}_\alpha$ tel que $\tau_\alpha(\widetilde{f}_\alpha, \widetilde{g}_\alpha) < \eta(\varepsilon, f)$.

Définition 3. *Une famille d'opérateurs $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est continûment convergente vers un opérateur $Q: F_2 \to F_1$ si pour $\varepsilon > 0$, arbitraire et tout $f \in F_2$ on trouve $\eta(\varepsilon, f)$ et $\alpha_0(\varepsilon, f) \in A$ de sorte que*

(4) $$\sigma_\alpha(S_\alpha \widetilde{g}_\alpha, (\widetilde{Q} f)_\alpha) < \varepsilon,$$

quel que soit $\alpha \geqslant \alpha_0(\varepsilon, f)$ et pour tout $\widetilde{g}_\alpha$ tel que $\tau_\alpha(\widetilde{f}_\alpha, \widetilde{g}_\alpha) < \eta(\varepsilon, f)$.

Théorème 3. *La condition nécessaire et suffisante afin qu'une famille d'opérateurs $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ soit continûment convergente vers un opérateur Q est que pour tout $f\in F_2$ la famille $\{S_\alpha \tilde{f}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ soit convergente vers Qf et la famille $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ soit également continue.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, la famille étant continûment convergente, on a, pour $\varepsilon>0$ donné, $\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{g}_\alpha,(\widetilde{Qf})_\alpha)<\varepsilon/2$ pour $\alpha\geqslant\alpha_0(\varepsilon,f)$, $\tau_\alpha(\tilde{f}_\alpha,\tilde{g}_\alpha)<\eta(\varepsilon,f)$, mais en particulier, pour $f=g$ on a la convergence simple (déf. 1), c'est-à-dire $\lim\limits_{\alpha\in A}\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{f}_\alpha,(\widetilde{Qf})_\alpha)=0$.

Puis $\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{g}_\alpha,S_\alpha\tilde{f}_\alpha)\leqslant\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{f}_\alpha,(\widetilde{Qf})_\alpha)+\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{g}_\alpha,(\widetilde{Qf})_\alpha)<\varepsilon$ pour $\alpha\geqslant\alpha_0(\varepsilon,f)$ et $\tau_\alpha(\tilde{f}_\alpha,g_\alpha)<\eta(\varepsilon,f)$, c'est-à-dire la famille $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est également continue.

La condition est suffisante. Nous avons par hypothèse, pour $\varepsilon>0$ donné:

$$\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{f}_\alpha,S_\alpha\tilde{g}_\alpha)<\varepsilon/2 \text{ pour } \alpha\geqslant\alpha_0'(\varepsilon,f) \text{ et } \tau_\alpha(\tilde{f}_\alpha,\tilde{g}_\alpha)<\eta(\varepsilon,f),$$

et

$$\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{f}_\alpha,(\widetilde{Qf})_\alpha)<\varepsilon/2 \text{ pour } \alpha\geqslant\alpha_0''(\varepsilon,f).$$

En prenant $\alpha_0\in A$ tel que $\alpha_0\geqslant\alpha_0'$ et $\alpha_0\geqslant\alpha_0''$ on a:

$$\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{g}_\alpha,(\widetilde{Qf})_\alpha)\leqslant\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{f}_\alpha,S_\alpha\tilde{g}_\alpha)+\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{f}_\alpha,(\widetilde{Qf})_\alpha)<\varepsilon$$

pour $\alpha\geqslant\alpha_0(\varepsilon,f)$ et $\tau_\alpha(\tilde{f}_\alpha,\tilde{g}_\alpha)<\eta(\varepsilon,f)$, c'est-à-dire la convergence continue de la famille $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Théorème 4. *Si la famille d'opérateurs $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est continûment convergente vers un opérateur $Q: F_2\to F_1$, l'opérateur Q est continu sur F_2.*

Démonstration. En utilisant le résultat du théorème précédent on a

$$\sigma_\alpha[(\widetilde{Qf})_\alpha,(\widetilde{Qg})_\alpha]\leqslant\sigma_\alpha[(\widetilde{Qf})_\alpha,S_\alpha\tilde{g}_\alpha]+\sigma_\alpha[S_\alpha\tilde{g}_\alpha,(\widetilde{Qg})_\alpha]<\varepsilon/2,$$

pour $\alpha\geqslant\alpha_0$ et $\rho_2(f,g)<\eta(\varepsilon,f)$.

On a donc

$$\lim_{\alpha\in A}\sigma_\alpha[(\widetilde{Qf})_\alpha,(\widetilde{Qg})_\alpha]\leqslant\varepsilon/2, \text{ pour } \rho_2(f,g)<\eta(\varepsilon,f),$$

et par la condition (iii) on a

$$\rho_1(Qf,Qg)<\varepsilon, \text{ pour } \rho_2(f,g)<\eta(\varepsilon,f), \quad \text{q. e. d.}$$

Théorème 5. *Soit $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille également continue d'opérateurs, convergente pour tout élément d d'un sousensemble dense $D\subset F_2$, $\overline{D}=F_2$. Il existe alors un opérateur continu $Q: F_2\to F_1$ vers lequel $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ est continûment convergente.*

Démonstration. Soit $d\in D$. La famille $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ étant convergente pour d, on a $u\in F_1$ de sorte que

$$\lim_{\alpha\in A}\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{d}_\alpha,\tilde{u}_\alpha)=0$$

et soit $u=Q(d)$.

Soit $f\in F_2$ et $\{h_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ une suite d'éléments de D convergente vers f, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_2(f,h_n)=0$. On a

$$\sigma_\alpha[(\widetilde{Q}h_n)_\alpha,(\widetilde{Q}h_m)_\alpha]\leqslant\sigma_\alpha[(\widetilde{Q}h_n)_\alpha,S_\alpha\tilde{h}_{n\alpha}]+\sigma_\alpha(S_\alpha\tilde{h}_{n\alpha},S_\alpha\tilde{h}_{m\alpha})+\sigma_\alpha[S_\alpha\tilde{h}_{m\alpha},(\widetilde{Q}h_m)_\alpha].$$

Le premier et le dernier terme peuvent être faits plus petits que $\varepsilon/3$ pour $\alpha\geqslant\alpha_0'$ en vertu de la convergence simple sur D, le second peut aussi être fait plus petit que $\varepsilon/3$ en vertu de l'équicontinuité de la famille $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$, pour $\alpha\geqslant\alpha_0''$ et $\rho_2(h_m,h_n)<\eta(\varepsilon)$, c'est-à-dire pour $m,n\geqslant N(\varepsilon)$. Donc, en prenant $\alpha_0\in A$ tel que $\alpha_0\geqslant\alpha_0'$, $\alpha_0\geqslant\alpha_0'$ on a

$$\sigma_\alpha[(\widetilde{Q}h_n)_\alpha,(\widetilde{Q}h_m)_\alpha]<\varepsilon \text{ pour } \alpha\geqslant\alpha_0 \text{ et } m,n\geqslant N(\varepsilon).$$

Selon (iii) on a

$$\rho_1(Qh_n,Qh_m)<\varepsilon \text{ pour } m,n\geqslant N(\varepsilon),$$

donc $\{Qh_n\}$ est une suite fondamentale. Soit v la limite de cette suite existante en vertu de la complétitude de F_1, (on peut démontrer facilement que v est indépendante de la suite $\{h_n\}$) et posons $Qf=v$. Nous avons défini ainsi complètement l'opérateur $Q: F_2\to F_1$.

Maintenant on a donc la convergence simple de $\{S_\alpha\tilde{f}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ vers Qf pour tout $f\in F_2$ et par hypothèse l'équicontinuité de la famille $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$; selon le théorème 3 on a la convergence continue de la famille $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ vers Q. Selon le théorème 4, Q est continu sur F_2. Les théorèmes 3, 4, 5 sont les adaptations des théorèmes dus à Rinow ([5], p. 78—79) pour le cas des espaces métriques, en généralisant le théorème de Banach-Steinhaus.

§ 3. Approximation de la solution d'une équation non-linéaire

Considérons l'éqation en u

$$Tu=f, \tag{5}$$

où T est un opérateur: $F_1\to F_2$, $u\in F_1$, $f\in F_2$.

Définition 4. *On dit que le problème (5) est bien posé si le domaine D des éléments $f\in F_2$ pour lesquels (5) admet une solution unique $u\in F_1$ est dense dans F_2, et l'inverse T^{-1} de l'opérateur T, admet une extension continue sur F_2.*

Nous nous proposons d'approximer la solution $u \in F_1$ de l'équation (5) sur les espaces-facteur $\{F_1/G_\alpha\}_{\alpha \in A}$. A ce but considérons, pour chaque $\alpha \in A$, l'équation

$$T_\alpha \tilde{u}_\alpha = \tilde{f}_\alpha, \quad \alpha \in A, \tag{6}$$

où T_α est un opérateur: $F_1/G_\alpha \to F_2/H_\alpha$, $\tilde{u}_\alpha \in F_1/G_\alpha$, $\tilde{f}_\alpha \in F_2/H_\alpha$.

Définition 5. *On dit que la famille d'équations (6) représente une approximation consistente pour le problème* (5) *si:*

(iv) $\lim\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha [T_\alpha \tilde{u}_\alpha, (\widetilde{Tu})_\alpha] = 0$ *pour chaque* $u \in F_2$.

(v) *Pour chaque* $\alpha \in A$ *il existe* T_α^{-1} *défini sur* F_2/H_α.

Définition 6. *On dit que la famille d'équations* (6) *constitue une approximation convergente pour le problème bien posé* (5) *si la famille d'opérateurs* $\{T_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in A}$ *est continûment convergente vers l'extension de* T^{-1} *sur* F_2.

Définition 7. *On dit que l'approximation* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *est stable si la famille d'opérateurs* $\{T_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in A}$ *est également continue sur* F_2.

Théorème 6. *La condition nécessaire et suffisante afin qu'une approximation consistante* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *du problème bien posé* (5) *soit convergente est qu'elle soit stable.*

Démonstration. Si l'approximation est convergente, selon le théorème 3, la famille $\{T_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in A}$ est également continue, c'est-à-dire elle est stable, donc la nécessité est montrée.

Supposons que l'approximation consistente $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est stable. Soit $f \in D$, D étant le domaine de $f \in F_2$ pour lequel l'équation (5) admet une solution unique $u = T^{-1}f$, et considérons $\sigma_\alpha(\tilde{u}_\alpha, T_\alpha^{-1}\tilde{f}_\alpha) = \sigma_\alpha(T_\alpha^{-1} T_\alpha \tilde{u}_\alpha, T_\alpha^{-1}\tilde{f})$. Mais la famille $\{T_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in A}$ étant également continue, pour $\varepsilon > 0$ on trouve $\alpha_0'(\varepsilon, f)$ et $\eta(\varepsilon, f)$, de sorte que, si $\alpha \geqslant \alpha_0'(\varepsilon, f)$ et $\tau_\alpha(T_\alpha \tilde{u}_\alpha, \tilde{f}_\alpha) < \eta(\varepsilon, f)$, on a

$$\sigma_\alpha(T_\alpha^{-1} T_\alpha \tilde{u}_\alpha, T_\alpha^{-1}\tilde{f}_\alpha) < \varepsilon.$$

Mais en vertu de la consistance — condition (iv) — pour $\alpha \geqslant \alpha_0''(\varepsilon, f)$

$$\tau_\alpha(T_\alpha \tilde{u}_\alpha, (\widetilde{Tu})_\alpha) < \eta(\varepsilon, f) \text{ quel que soit } u \in F_1.$$

Or on a $Tu = f$, c'est-à-dire, pour α_0 tel que $\alpha_0 \geqslant \alpha_0'$, $\alpha_0 \geqslant \alpha_0''$, on a

$$\sigma_\alpha(\tilde{u}_\alpha, T_\alpha^{-1}\tilde{f}_\alpha) < \varepsilon \text{ pour tout } \alpha \geqslant \alpha_0(\varepsilon, f).$$

Mais cela signifie que

$$\lim_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\tilde{u}_\alpha, T_\alpha^{-1}\tilde{f}_\alpha) = 0;$$

donc nous avons la convergence simple de la famille $\{T_\alpha^{-1}\tilde{f}_\alpha\}$ vers $T^{-1}f$ sur D. Le domaine D étant dense dans F_2 on a selon les théorèmes 3 et 5, la convergence continue de la famille $\{T_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in A}$ vers l'extension de T^{-1} sur F_2, ce qui achève la démonstration.

Remarque 1. Une condition suffisante pour la convergence d'une approximation $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est que la famille $\{T_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in A}$ soit également lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\sigma_\alpha(T_\alpha^{-1}\tilde{f}_\alpha, T_\alpha^{-1}\tilde{g}_\alpha) \leqslant L\tau_\alpha(\tilde{f}_\alpha, \tilde{g}_\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in A. \tag{7}$$

Remarque 2. Une interprétation de ce schéma est, par exemple, celle donnée par Goudovitch [3], A étant l'ensemble des entiers positifs, mais l'opérateur différentiel étant en général non-linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ansorge A. — *Zur Frage der Verallgemeinerung des Äquivalenzsatzes von Lax.* Numerische Mathematik, 8 (1966), p. 178—185.
2. Dunford W., Schwartz J. T. — *Linear operators.* Part I. Interscience Publishers, New York-London, 1958.
3. Гудович Н. Н. — *Об абстрактной схеме разностного метода.* Журнал вычисл. мат. и мат. физики, Том VI (1966), стр. 916—921.
4. Lax P. D., Richtmyer E. D. — *Survey of the stability of linear finite difference equations.* Commun. Pure and Appl. Math. 9 (1956), p. 267.
5. Rinow W. — *Die innere Geometrie der metrischen Räume.* Springer-Verlag, Berlin 1961.

ASUPRA ECHIVALENŢEI CONVERGENŢEI ŞI STABILITĂŢII UNEI SCHEME ABSTRACTE CU DIFERENŢE PENTRU APROXIMAREA SOLUŢIILOR UNEI ECUAŢII NELINIARE

Rezumat

Se consideră problema aproximării soluţiei problemei (5), T fiind un operator, în general neliniar, de la F-spaţiul F_1 la F-spaţiul F_2, utilizînd metoda reţea-spaţiu-factor dată de Gudovici [3]. Se introduc noţiunile de convergenţă, stabilitate şi consistenţă pentru aproximaţia $\{T_\alpha\}$ şi se demonstrează teorema 6: condiţia necesară şi suficientă de convergenţă a aproximaţiilor consistente ale preblemei corect puse (5) este stabilitatea aproximării.