ITÉRATIONS MONOTONES DANS LA MÉTHODE DE RELAXATION SUPÉRIEURE POUR LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES ET APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS ÉLLIPTIQUES

PAR

C. ILIOI

Préliminaires. Dans les travaux de L. Collatz [2], J. Schröder [5], J. Albrecht [1], J. Schmidt [4] on obtient des évaluations de la solution d'un système algébrique d'équations linéaires

$$v = Mv + s,$$

par l'emploi de la propriété de monotonie de la matrice M. Sont étudiées de cette manière les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel. C'est du même point de vue, que nous étudierons la méthode de relaxation supérieure.

Nous ferons appel aux relations suivantes de semi-ordre pour les vecteurs et les matrices. Soient $u\,(u_i)$, $w\,(w_i)$ deux vecteurs et $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ deux matrices quadratiques d'ordre n; alors nous aurons: $u < w$ si $u_i \leqslant w_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ et si pour au moins un indice i l'inégalité est stricte, et $A < B$ si $a_{ij} \leqslant b_{ij}\,(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ et si pour au moins un couple d'indices (i, j) l'inégalité est stricte.

En particulier, une matrice A est positive, si tous ses éléments $a_{ij} \neq 0$ sont positifs.

Deux résultats de la théorie des matrices positives sont utilisés. Ce sont les suivants [5]:

(I) Si la matrice $A = \{a_{ij}\}$ satisfait aux conditions:

a) $a_{ij} \leqslant 0$ (pour $i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n$),

b) tous les mineurs principaux de $\det A$ sont positifs; alors la matrice inverse A^{-1} est positive.

(II) Pour une matrice positive, la valeur propre, la plus grande en module, est positive; il existe un vecteur propre associé à cette valeur, qui est aussi positif.

Les notations suivantes sont utilisées: A est une matrice quadratique avec les éléments a_{ij}, A_L est une matrice avec les éléments

$$a_{Lij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{pour } i > j, \\ 0 & \text{pour } i \leqslant j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

et A_R est la matrice des éléments:

$$a_{Rij} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j, \\ a_{ij} & \text{pour } i \leqslant j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 1. La convergence des suites monotones d'itérations dans la méthode de relaxation supérieure

Soit

$$Av + s = 0 \tag{1.1}$$

un système algébrique d'équations linéaires avec la matrice A positive:

$$A > 0. \tag{1.2}$$

Pour le système équivalent

$$v = Mv + s \text{ avec } M = A + E, \tag{1.3}$$

la méthode de relaxation supérieure est donnée par la récurrence suivante:

$$x^{(k+1)} = \omega (M_L x^{(k+1)} + M_R x^{(k)} + s) + (1 - \omega) x^{(k)}; \quad 1 < \omega < 2 \tag{1.4}$$

ou

$$x^{(k+1)} = (E - \omega M_L)^{-1} (\omega M_R + (1 - \omega) E) x^{(k)} + \omega (E - \omega M_L)^{-1} s. \tag{1.4'}$$

L'équation (1.3) est équivalente à

$$v = Tv + t, \tag{1.5}$$

en posant

$$T = (E - \omega M_L)^{-1} (\omega M_R + (1 - \omega) E); \quad t = \omega (E - \omega M_L)^{-1} s. \tag{1.6}$$

Compte tenu de (I) la matrice $(E - \omega M_L)^{-1}$ est positive et, d'après l'hypothèse (1.2), la matrice $(\omega M_R + (1 - \omega) E)$ est aussi positive. Il résulte donc $T > 0$.

Considérons les processus itératifs:

$$u^{(k+1)} = Tu^{(k)} + t; \quad w^{(k+1)} = Tw^{(k)} + t, \tag{1.7}$$

où les vecteurs initiaux $u^{(0)}$ et $w^{(0)}$ sont choisis de façon que:

$$u^{(0)} < w^{(0)}; \quad u^{(0)} < u^{(1)}; \quad w^{(1)} < w^{(0)}. \tag{1.8}$$

Alors nous démontrerons le résultat suivant:

Théorème 1. *Si les conditions (1.2) et (1.8) sont remplies, les suites d'itérations (1.7) sont monotones et convergentes vers la solution du système (1.3) (ou (1.1)).*

En effet, soit l'ensemble des vecteurs

$$\mathfrak{M} = \{x; \quad u^{(0)} < x < w^{(0)}\}$$

et $x \in \mathfrak{M}$. Compte tenu de la monotonie de T, on a:

$$u^{(0)} < u^{(1)} = Tu^{(0)} + t < Tx + t < Tw^{(0)} + t = w^{(1)} < w^{(0)},$$

donc $Tx + t \in \mathfrak{M}$. D'après le théorème de Brouwer, il existe un point fixe, qui est évidemment la solution unique v du système (1.5) et on a:

$$u^{(0)} < u^{(1)} < v < w^{(1)} < w^{(0)}.$$

Puis, toujours par suite de la monotonie de T, il suit que:

$$u^{(1)} < u^{(2)}; \quad w^{(2)} < w^{(1)}.$$

En appliquant encore une fois le théorème de Brouwer, on obtient:

$$u^{(1)} < u^{(2)} < v < w^{(2)} < w^{(1)}.$$

Par induction, on démontrera facilement la suite d'inégalités:

$$\begin{aligned} u^{(0)} < u^{(1)} < \ldots < u^{(k-1)} < u^{(k)} < \ldots < v < \ldots < w^{(k)} < \\ < w^{(k-1)} < \ldots < w^{(1)} < w^{(0)}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

qui fait preuve de la convergence des itérations (1.7). Mais, si ces itérations sont convergentes, elles tendent vers la solution du système (1.5). Compte tenu de l'équivalence entre (1.5) et (1.3), le théorème est complètement démontré.

§ 2. Comparaison entre les méthodes

Nous allons étudier dans ce paragraphe la rapidité de la convergence des suites d'itérations (1.7) en les comparant avec les itérations du type Gauss-Seidel, qu'on obtient pour $\omega = 1$. Ensuite nous allons comparer deux processus de relaxation supérieure avec lec paramètres ω différents, du même point de vue.

Considérons deux suites d'itérations de type Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} (E - M_L) u_1^{(k+1)} &= M_R u_1^{(k)} + s, \\ (E - M_L) w_1^{(k+1)} &= M_R w_1^{(k)} + s, \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec les vecteurs initiaux qui satisfont à:

$$u_1^{(0)} < w_1^{(0)}; \quad u_1^{(0)} < u_1^{(1)}; \quad w_1^{(1)} < w_1^{(0)} \tag{2.2}$$

et deux suites d'itérations obtenues par la méthode de relaxation supérieure $(1 < \omega < 2)$:

$$\begin{aligned} (E - \omega M_L)\, u^{(k+1)} &= (\omega M_R + (1-\omega)\, E)\, u^{(k)} + \omega s, \\ (E - \omega M_L)\, w^{(k+1)} &= (\omega M_R + (1-\omega)\, E)\, w^{(k)} + \omega s, \end{aligned} \tag{2.3}$$

avec les mêmes vecteurs initiaux:

$$u^{(0)} = u_1^{(0)}, \quad w^{(0)} = w_1^{(0)}. \tag{2.4}$$

Dans les conditions (2.2), le théorème 1 est valable (pour $\omega = 1$) et les deux suites (2.1) sont monotones et convergentes vers la solution du système (1.3). Maintenant nous démontrerons le

Théorème 2. *Si les conditions (2.2) sont remplies, alors les suites (2.1) et (2.3), avec (2.4), sont monotones et convergentes vers la solution du système (1.3), et les suites (2.3), obtenues par la méthode de relaxation supérieure, convergent plus vite, c'est-à-dire on a:*

$$u_1^{(k)} < u^{(k)} < v < w^{(k)} < w_1^{(k)}, \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.5}$$

En effet, nous avons fait déjà la remarque que les suites (2.1) sont monotones et convergentes. Pour démontrer la même chose relative à (2.3), nous écrivons:

$$(E - M_L)\, u_1^{(1)} = M_R\, u_1^{(0)} + s,$$

ou, en multipliant avec ω:

$$(E - \omega M_L)\, u_1^{(1)} = \omega M_R\, u_1^{(0)} + (1-\omega)\, u_1^{(1)} + \omega s;$$

ensuite pour la relaxation supérieure:

$$(E - \omega M_L)\, u^{(1)} = \omega M_R\, u^{(0)} + (1-\omega)\, u^{(0)} + \omega s.$$

En soustrayant les deux dernières égalités et en tenant compte de (2.4), on obtient:

$$(E - \omega M_L)\, u^{(1)} = (E - \omega M_L)\, u_1^{(1)} + (\omega - 1)\,(u_1^{(1)} - u_1^{(0)}).$$

Parce que la matrice $(E - \omega M_L)^{-1}$ est positive et $u_1^{(1)} - u_1^{(0)} > 0$, il résulte:

$$u^{(1)} > u_1^{(1)}.$$

D'une manière analogue on peut démontrer que

$$w^{(1)} < w_1^{(1)}.$$

Donc nous avons

$$u^{(0)} = u_1^{(0)} < u_1^{(1)} < u^{(1)}; \quad w^{(1)} < w_1^{(1)} < w_1^{(0)} = w^{(0)} \tag{2.6}$$

et d'après la théorème 1 il résulte que les suites (2.3) sont monotones et convergentes. De plus, la relation (2.5) est vraie pour $k = 1$.

Par induction, supposons que la relation (2.5) est valable pour un indice k quelconque. Alors on a successivement:

$$(E - \omega M_L)\, u^{(k+1)} = \omega M_R\, u^{(k)} + (1-\omega)\, u^{(k)} + \omega s > \omega M_R\, u_1^{(k)} +$$

$$+ (1-\omega)\, u^{(k+1)} + \omega s = \omega\,(E - M_L)\, u_1^{(k+1)} + (1-\omega)\, u^{(k+1)}$$

d'où:

$$\omega\,(E - M_L)\, u^{(k+1)} > \omega\,(E - M_L)\, u_1^{(k+1)}.$$

Puisque la matrice $(E - M_L)^{-1}$ est positive (v. (I)), il résulte

$$u^{(k+1)} > u_1^{(k+1)};$$

d'une manière analogue

$$w^{(k+1)} < w_1^{(k+1)}$$

et c'est ce que nous avons voulu démontrer.

Considérons maintenant les suites itératives:

$$\begin{aligned} (E - \omega_1 M_L)\, u_1^{(k+1)} &= (\omega_1 M_R + (1-\omega_1)\, E)\, u_1^{(k)} + \omega_1 s, \\ (E - \omega_1 M_L)\, w_1^{(k+1)} &= (\omega_1 M_R + (1-\omega_1)\, E)\, w_1^{(k)} + \omega_1 s \end{aligned} \tag{2.7}$$

et

$$\begin{aligned} (E - \omega_2 M_L)\, u_2^{(k+1)} &= (\omega_2 M_R + (1-\omega_2)\, E)\, u_2^{(k)} + \omega_2 s, \\ (E - \omega_2 M_L)\, w_2^{(k+1)} &= (\omega_2 M_R + (1-\omega_2)\, E)\, w_2^{(k)} + \omega_2 s, \end{aligned} \tag{2.8}$$

avec les paramètres

$$1 < \omega_1 < \omega_2 < 2 \tag{2.9}$$

et avec les mêmes vecteurs initiaux:

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)}, \quad w_1^{(0)} = w_2^{(0)}. \tag{2.10}$$

Alors nous avons:

Théorème 3. *Si les conditions*

$$u_1^{(0)} < w_1^{(0)}; \quad u_1^{(0)} < u_1^{(1)}; \quad w_1^{(1)} < w_1^{(0)} \tag{2.11}$$

sont remplies, alors les suites itératives (2.7) et (2.8), avec (2.9), sont monotones et convergentes vers la solution v du système (1.3), et les suites (2.8) tendent vers la solution plus vite que les suites (2.7), c'est-à-dire:

$$u_1^{(k)} < u_2^{(k)} < v < w_2^{(k)} < w_1^{(k)}. \tag{2.12}$$

En effet, les conditions (2.11) assurent la monotonie et la convergence des suites (2.7). Pour démontrer la même chose relative aux suites (2.8), nous écrivons successivement:

$$(E-\omega_1 M_L)\,u_1^{(1)}=\omega_1 M_R u_1^{(0)}+(1-\omega_1)\,u_1^{(0)}+\omega_1 s,$$

$$(E-\omega_2 M_L)\,u_2^{(1)}=\omega_2 M_R u_2^{(0)}+(1-\omega_2)\,u_2^{(0)}+\omega_2 s,$$

d'où on obtient facilement:

$$\omega_2(E-\omega_1 M_L)\,u_1^{(1)}-\omega_1(E-\omega_2 M_L)\,u_2^{(1)}=(\omega_2-\omega_1)\,u_1^{(0)},$$

ou

$$\omega_1(E-\omega_2 M_L)\,u_2^{(1)}=\omega_2(E-\omega_1 M_L)\,u_1^{(1)}-(\omega_2-\omega_1)\,u_1^{(0)}>$$

$$>\omega_2(E-\omega_1 M_L)\,u_1^{(1)}-(\omega_2-\omega_1)\,u_1^{(1)}=\omega_1(E-\omega_2 M_L)\,u_1^{(1)}$$

et puisque $(E-\omega_2 M_L)^{-1}>0$, il suit que

$$u_2^{(1)}>u_1^{(1)}.$$

D'une manière analogue il résulte

$$w_1^{(1)}>w_2^{(1)}$$

et donc

$$u_2^{(0)}=u_1^{(0)}<u_1^{(1)}<u_2^{(1)};\quad w_2^{(1)}<w_1^{(1)}<w_1^{(0)}=w_2^{(0)}$$

et c'est la preuve de la monotonie et de la convergence des suites (2.8) et de la relation (2.12) pour $k=1$.

Par induction, si nous supposons la valabilité de (2.12) pour un certain indice k, nous avons:

$$(E-\omega_1 M_L)\,u_1^{(k+1)}=\omega_1 M_R u_1^{(k)}+(1-\omega_1)\,u_1^{(k)}+\omega_1 s,$$

$$(E-\omega_2 M_L)\,u_2^{(k+1)}=\omega_2 M_R u_2^{(k)}+(1-\omega_2)\,u_2^{(k)}+\omega_2 s,$$

d'où on obtient:

$$\omega_2(E-\omega_1 M_L)\,u_1^{(k+1)}-\omega_1(E-\omega_2 M_L)\,u_2^{(k+1)}=\omega_1\omega_2 M_R u_1^{(k)}-$$

$$-\omega_1\omega_2 M_R u_2^{(k)}+\omega_2(1-\omega_1)\,u_1^{(k)}-\omega_1(1-\omega_2)\,u_2^{(k)},$$

ou

$$\omega_1(E-\omega_2 M_L)\,u_2^{(k+1)}=\omega_1(E-\omega_2 M_L)\,u_1^{(k+1)}+(\omega_2-\omega_1)\,(u_1^{(k+1)}-u_1^{(k)})+$$

$$+\omega_1(\omega_2 M_R+(1-\omega_2)\,E)\,(u_2^{(k)}-u_1^{(k)}));$$

et parce que $\omega_2-\omega_1>0$, $u_1^{(k+1)}>u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}>u_1^{(k)}$ et $\omega_2 M_R+(1-\omega_2)\,E>0$, il résulte:

$$\omega_1(E-\omega_2 M_L)\,u_2^{(k+1)}>\omega_1(E-\omega_2 M_L)\,u_1^{(k+1)},$$

d'où

$$u_2^{(k+1)}>u_1^{(k+1)},$$

car $(E-\omega_2 M_L)^{-1}>0$.

La relation

$$w_1^{(k+1)}>w_2^{(k+1)}$$

suit d'une façon analogue.

Le théorème est complètement démontré.

§ 3. Evaluations de l'erreur

En utilisant le théorème 1 on peut obtenir, sous certaines conditions, des évaluations de l'erreur dans la méthode de relaxation supérieure.

Soit un processus de relaxation supérieure:

(3.1) $$v^{(k+1)}=\omega(M_L v^{(k+1)}+M_R v^{(k)}+s)+(1-\omega)\,v^{(k)},$$

ou

(3.1') $$(E-\omega M_L)\,v^{(k+1)}=(\omega M_R+(1-\omega)\,E)\,v^{(k)}+\omega s,$$

ou encore $v^{(k+1)}=Tv^{(k)}+t$, avec les notations (1.6). D'après le théorème (II) (voir **Préliminaires**), il existe une valeur $\rho>0$ et un vecteur $\alpha>0$, tels que:

(3.2) $$(\omega M_R+(1-\omega)\,E)\,\alpha=\rho(E-\omega M_L)\,\alpha.$$

Si nous désignons

$$\delta^k=v^{(k)}-v^{(k-1)},$$

nous avons:

(3.3) $$(\omega M_R+(1-\omega)\,E)\,\delta^k=(E-\omega M_L)\,\delta^{k+1}.$$

On démontrera le:

Théorème 4. *Si les conditions:*

(3.4) $$\delta^k>0,\quad \rho<1$$

sont remplies, on a l'évaluation:

(3.5) $$p_k\,\alpha<v-v^{(k)}<P_k\,\alpha$$

avec

(3.6) $$p_k=\frac{\rho}{1-\rho}\min_{1\le i\le n}\frac{\delta_i^k}{\alpha_i},\quad P_k=\frac{\rho}{1-\rho}\max_{1\le i\le n}\frac{\delta_i^k}{\alpha_i}.$$

Remarquons que les conditions (3.4) assurent la convergence monotone de la suite (3.1).

Pour la démonstration nous utiliserons le théorème 1, avec

$$u^{(0)} = v^{(k)} + p_k \alpha; \quad w^{(0)} = v^{(k)} + P_k \alpha.$$

Afin que les conditions (1.8) soient remplies il suffit d'avoir:

$$p_k < P_k$$

et

$$(E - \omega M_L) u^{(0)} < (\omega M_R + (1 - \omega) E) u^{(0)} + \omega s;$$

$$(\omega M_R + (1 - \omega) E) w^{(0)} + \omega s < (E - \omega M_L) w^{(0)},$$

ou, compte tenu de (3.1) et (3.2),

$$p_k (\omega M_R + (1 - \omega) E) \alpha < \frac{\varrho}{1 - \varrho} (\omega M_R + (1 - \omega) E) \delta^k <$$

$$< P_k (\omega M_R + (1 - \omega) E) \alpha.$$

Parce que la matrice $(\omega M_R + (1 - \omega) E)$ est positive, il est suffisant d'avoir:

$$p_k \alpha < \frac{\varrho}{1 - \varrho} \cdot \delta^k < P_k \alpha,$$

qui est satisfaite par les nombres p_k et P_k de (3.6). Donc d'après le théorème 1, on a

$$v^{(k)} + p_k \alpha = u^{(0)} < v < w^{(0)} = v^{(k)} + P_k \alpha$$

et c'est ce qu'il a fallu démontrer.

Un autre théorème suit dans certaines conditions modifiées:

Théorème 5. *Si les conditions*

(3.7) $$0 < \delta^k < \delta^{k-1}$$

sont remplies, on a

(3.8) $$q_k \delta^k < v - v^{(k)} < Q_k \delta^k,$$

avec

(3.9) $$q_k = \frac{r_k}{1 - r_k}; \quad Q_k = \frac{R_k}{1 - R_k}$$

et

(3.10) $$r_k = \min_{1 \le i \le n} \frac{\delta_i^k}{\delta_i^{k-1}}; \quad R_k = \max_{1 \le i \le n} \frac{\delta_i^k}{\delta_i^{k-1}}.$$

La démonstration est analogue. Il suffit d'avoir:

$$q_k < Q_k$$

et successivement:

$$(E - \omega M_L)(v^{(k)} + q_k \delta^k) < (\omega M_R + (1 - \omega) E)(v^{(k)} + q_k \delta^k) + \omega s,$$

$$(\omega M_R + (1 - \omega) E)(v^{(k)} + Q_k \delta^k) + \omega s < (E - \omega M_L)(v^{(k)} + Q_k \delta^k),$$

ou, compte tenu de (3.3):

$$(\omega M_R + (1 - \omega) E) q_k (\delta^{k-1} - \delta^k) < (\omega M_R + (1 - \omega) E) \delta^k < (\omega M_R +$$
$$+ (1 - \omega) E) Q_k (\delta^{k-1} - \delta^k);$$

et parce que $\omega M_R + (1 - \omega) E > 0$,

$$q_k (\delta^{k-1} - \delta^k) < \delta^k < Q_k (\delta^{k-1} - \delta^k),$$

qui est satisfaite si les nombres q_k et Q_k sont ceux de (3.9) et (3.10). Alors, en appliquant le théorème 1, on obtient:

$$v^{(k)} + q_k \delta^k < v < v^{(k)} + Q_k \delta^k$$

et l'évaluation est démontrée.

§ 4. Le choix des vecteurs initiaux

Les vecteurs initiaux $u^{(0)}$ et $w^{(0)}$ dans les suites itératives (1.7) doivent être choisis de manière que les conditions (1.8) soient remplies. Prenons, par exemple, des vecteurs initiaux avec toutes les composantes identiques:

(4.1) $$u^{(0)} = (\xi, \xi, \ldots, \xi); \quad w^{(0)} = (\eta, \eta, \ldots, \eta)$$

et soit

(4.2) $$u^{(1)} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n); \quad w^{(1)} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

Alors il faut que

(4.3) $$\xi < \eta_i, \quad \xi_i < \xi, \quad \eta_i < \eta, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où

(4.4) $$\xi_i = \omega \left(\sum_{k=1}^{i-1} m_{ik} \xi_k + \xi \sum_{k=i}^{n} m_{ik} + s_i \right) + (1 - \omega) \xi,$$
$$\eta_i = \omega \left(\sum_{k=1}^{i-1} m_{ik} \eta_k + \eta \sum_{k=i}^{n} m_{ik} + s_i \right) + (1 - \omega) \eta.$$

Considérons les récurrences:

(4.5) (a) $$\tau_i = \omega \sum_{k=1}^{i-1} m_{ik} \tau_k + \omega \sum_{k=i}^{n} m_{ik} + 1 - \omega,$$

(b) $$\sigma_i = \omega \sum_{k=1}^{i-1} m_{ik} \sigma_k + \omega s_i.$$

Par induction on démontre facilement que

$$\xi_i = \tau_i \xi + \sigma_i ; \quad \eta_i = \tau_i \eta + \sigma_i , \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

et alors les conditions (4.3) s'écrivent:

(4.6) $$\xi < \tau_i \xi + \sigma_i ; \quad \tau_i \eta + \sigma_i < \eta, \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Donc si nous prenons:

(4.7) $$\xi = \min_{1 \le i \le n} \frac{\sigma_i}{1 - \tau_i} \quad \text{et} \quad \eta = \max_{1 \le i \le n} \frac{\sigma_i}{1 - \tau_i},$$

sous la condition très importante:

(4.8) $$\tau_i < 1, \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

alors les relations (4.3) sont remplies.

Il reste à voir quand la condition (4.8) est satisfaite. Désignons par μ le vecteur qui a toutes les composantes égales à 1 et par t_{ij} les éléments de la matrice $T = (E - \omega M_L)^{-1} (\omega M_R + (1 - \omega) E)$. Alors la récurrence (4.5) (a) peut être écrite sous la forme:

$$\tau = \omega M_L \tau + \omega M_R \mu + (1 - \omega) \mu, \quad \tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n)$$

ou

$$\tau = (E - \omega M_L)^{-1} (\omega M_R + (1 - \omega) E) \mu = T\mu$$

et donc:

$$\tau_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} = \sum_{k=1}^{n} |t_{ik}|, \quad \text{car } t_{ik} \geq 0.$$

Avec la définition

$$\|T\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{k=1}^{n} |t_{ik}|$$

de la norme de la matrice T il suit que la condition (4.8) revient à:

(4.9) $$\|T\| < 1.$$

C'est une condition suffisante de convergence des suites itératives (1.7).

Maintenant, prenons les vecteurs initiaux sous la forme plus générale

(4.10) $$u^{(0)} = \xi z ; \quad w^{(0)} = \eta z,$$

avec $z = (z_1, z_2, ..., z_n) > 0$ un vecteur quelconque et

(4.11) $$u^{(1)} = \xi_i z ; \quad w^{(1)} = \eta_i z \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Alors, avec les récurrences:

(4.12) $$\text{(a)} \quad \tau_i = \frac{\omega}{z_i} \sum_{k=1}^{i-1} m_{ik} z_k \tau_k + \frac{\omega}{z_i} \sum_{k=i}^{n} m_{ik} z_k + 1 - \omega,$$

(4.12) $$\text{(b)} \quad \sigma_i = \frac{\omega}{z_i} \sum_{k=1}^{i-1} m_{ik} z_k \sigma_k + \frac{\omega}{z_i} s_i ,$$

les conditions (4.3) s'écrivent sous la même forme (4.6) et les vecteurs initiaux sont donnés toujours par (4.7) dans la condition (4.8).

Si $z = \alpha$ est le vecteur propre de la matrice T associé à la valeur propre $\rho > 0$ donnée par le théorème (II) (Préliminaires), alors nous avons

$$T\alpha = \rho\alpha,$$

qui a lieu si et seulement si

(4.13) $$\rho\alpha_i = \omega \left(\sum_{k=1}^{i-1} m_{ik} \rho\alpha_k + \sum_{k=i}^{n} m_{ik} \alpha_k \right) + (1 - \omega) \alpha_i \ (i = 1, 2, ..., n)$$

(voir par exemple [6]).

En comparant (4.12) (a) avec (4.13), pour $i = 1, 2, ..., n$ il suit que

$$\tau_i = \rho.$$

Donc la condition (4.8) revient à:

$$\rho < 1.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante de convergence des suites itératives (1.7).

§. 5. Application aux équations élliptiques

Remarquons que la façon dont nous avons construit le système (1.3) équivalent à (1.1) n'est pas la seule possible. Pour tout système

(5.1) $$v = Mv + s$$

équivalent à (1.1), qui satisfait aux conditions:

(5.2) $$M > 0 \quad \text{et} \quad m_{ii} \geq \frac{1}{2},$$

les résultats obtenus dans §§ 1—4 restent valables. En effet la matrice T dans ces conditions reste positive.

C'est cette remarque que nous utiliserons dans l'application suivante.

Considérons le problème à la limite [6]:

(5.3) $$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + C_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] + Fu + G = 0, \quad x \in R^n,$$

(5.4) $$u(x) = g(x) \ \text{pour} \ x \in S,$$

où S est la frontière d'une région bornée Ω de l'espace euclidien R^n, $u(x)$ la fonction inconnue de n variables de classe C^2 dans Ω et les fonctions

$F, G, A_1, \ldots, A_n, C_1, \ldots, C_n$ sont des fonctions données du vecteur $x \in R^n$ continues et deux fois dérivables dans Ω, qui satisfont aux conditions:

$$A_k(x) > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad F(x) \leqslant 0. \tag{5.5}$$

D. Young [6] a démontré que l'application de la méthode des réseaux à ce problème conduit à un système algébrique d'équations linéaires

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j + d_i = 0 \tag{5.6}$$

avec

$$a_{ij} \geqslant 0, \quad i \neq j,$$
$$a_{ii} < 0$$

pour un réseau suffisamment fin.

Il est facile de voir que le système (5.6) est équivalent au suivant:

$$x^{(i)} = \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N} \frac{a_{ij}}{-2a_{ii}} x^{(j)} + \frac{1}{2} x^{(i)} + \frac{s_i}{-2a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

qui est de la forme de (5.1) et satisfait à (5.2). Donc toutes les considérations des paragraphes précédents restent valables pour ce système.

BIBLIOGRAPHIE

1. Albrecht J. — *Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge.* Num. Math. 4, 1962, p. 196.
2. Collatz L. — *Funktionalanalysis und numerische Mathematik.* Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.
3. Frobenius G. — *Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen.* S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1912, p. 456.
4. Schmidt J. W. — *Ausgangsvektoren für monotone Iterationen bei linearen Gleichungssystemen.* Num. Math., 6, 1964, p. 78.
5. Schröder J. — *Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz.* Arch. Rat. Mech. Anal 3, 1959, p. 28.
6. Young D. — *Iterative Methods for Solving Partial Difference equations of elliptic type.* Trans. Amer. Math. Soc. 76, 1954, p. 92.

ITERAŢII MONOTONE ÎN METODA RELAXĂRII SUPERIOARE PENTRU REZOLVAREA SISTEMELOR LINIARE ŞI APLICAŢII LA ECUAŢIILE ELIPTICE

Rezumat

Se studiază metoda relaxării superioare în cazul cînd matricea sistemului de ecuaţii liniare este pozitivă. Se dovedeşte că rapiditatea de convergenţă a acestei metode creşte o dată cu creşterea factorului de relaxare $1 < \omega < 2$. Sînt obţinute două evaluări ale erorii folosind teoria lui Frobenius a matricelor pozitive. În ultimele paragrafe este dat un algoritm simplu pentru alegerea vectorilor iniţiali şi o aplicaţie la ecuaţii eliptice.

TENSIUNI TERMICE ÎN MEDII ELASTICE TRANSVERSAL-IZOTROPE

DE

I. GRINDEI

Scopul lucrării de faţă constă în obţinerea unei clase de soluţii ale problemelor de echilibru din teoria termoelasticităţii pentru medii elastice transversal-izotrope. Metoda folosită ne dă posibilitatea obţinerii soluţiilor corespunzătoare în cazul general.

Fie un mediu elastic omogen şi transversal-izotrop. Alegem sistemul de axe de coordonate carteziene în aşa fel încît planele sale să coincidă cu cele ale simetriei elastice.

Fie E şi ν modulul de elasticitate, respectiv coeficientul lui Poisson pentru direcţiile x_1 şi x_2, iar E' şi ν' mărimile corespunzătoare pentru direcţia x_3. De asemenea, fie α şi λ coeficientul de dilatare termică liniară, respectiv coeficientul de conducţie termică pentru direcţiile x_1 şi x_2, iar α' şi λ' mărimile corespunzătoare pentru direcţia x_3.

Componentele stării de tensiune σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ sînt legate de componentele u_i ale deplasării prin relaţiile [1]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \beta T, \quad \sigma_{12} = A_{66}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\\
&\sigma_{22} = A_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \beta T, \quad \sigma_{13} = A_{44}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),\\
&\sigma_{33} = A_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{13}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \beta' T, \quad \sigma_{23} = A_{44}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

unde coeficienţii A_{ij} au expresiile: