$F, G, A_1, \ldots, A_n, C_1, \ldots, C_n$ sont des fonctions données du vecteur $x \in R^n$ continues et deux fois dérivables dans Ω, qui satisfont aux conditions:

$$A_k(x) > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad F(x) \leqslant 0. \tag{5.5}$$

D. Young [6] a démontré que l'application de la méthode des réseaux à ce problème conduit à un système algébrique d'équations linéaires

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j + d_i = 0 \tag{5.6}$$

avec

$$a_{ij} \geqslant 0, \quad i \neq j,$$
$$a_{ii} < 0$$

pour un réseau suffisamment fin.

Il est facile de voir que le système (5.6) est équivalent au suivant:

$$x^{(i)} = \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N} \frac{a_{ij}}{-2a_{ii}} x^{(j)} + \frac{1}{2} x^{(i)} + \frac{s_i}{-2a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

qui est de la forme de (5.1) et satisfait à (5.2). Donc toutes les considérations des paragraphes précédents restent valables pour ce système.

BIBLIOGRAPHIE

1. Albrecht J. — *Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge.* Num. Math. 4, 1962, p. 196.
2. Collatz L. — *Funktionalanalysis und numerische Mathematik.* Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.
3. Frobenius G. — *Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen.* S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1912, p. 456.
4. Schmidt J. W. — *Ausgangsvektoren für monotone Iterationen bei linearen Gleichungssystemen.* Num. Math., 6, 1964, p. 78.
5. Schröder J. — *Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz.* Arch. Rat. Mech. Anal 3, 1959, p. 28.
6. Young D. — *Iterative Methods for Solving Partial Difference equations of elliptic type.* Trans. Amer. Math. Soc. 76, 1954, p. 92.

ITERAŢII MONOTONE ÎN METODA RELAXĂRII SUPERIOARE PENTRU REZOLVAREA SISTEMELOR LINIARE ŞI APLICAŢII LA ECUAŢIILE ELIPTICE

Rezumat

Se studiază metoda relaxării superioare în cazul cînd matricea sistemului de ecuaţii liniare este pozitivă. Se dovedeşte că rapiditatea de convergenţă a acestei metode creşte o dată cu creşterea factorului de relaxare $1 < \omega < 2$. Sînt obţinute două evaluări ale erorii folosind teoria lui Frobenius a matricelor pozitive. În ultimele paragrafe este dat un algoritm simplu pentru alegerea vectorilor iniţiali şi o aplicaţie la ecuaţii eliptice.

TENSIUNI TERMICE ÎN MEDII ELASTICE TRANSVERSAL-IZOTROPE

DE

I. GRINDEI

Scopul lucrării de faţă constă în obţinerea unei clase de soluţii ale problemelor de echilibru din teoria termoelasticităţii pentru medii elastice transversal-izotrope. Metoda folosită ne dă posibilitatea obţinerii soluţiilor corespunzătoare în cazul general.

Fie un mediu elastic omogen şi transversal-izotrop. Alegem sistemul de axe de coordonate carteziene în aşa fel încît planele sale să coincidă cu cele ale simetriei elastice.

Fie E şi ν modulul de elasticitate, respectiv coeficientul lui Poisson pentru direcţiile x_1 şi x_2, iar E' şi ν' mărimile corespunzătoare pentru direcţia x_3. De asemenea, fie α şi λ coeficientul de dilatare termică liniară, respectiv coeficientul de conducţie termică pentru direcţiile x_1 şi x_2, iar α' şi λ' mărimile corespunzătoare pentru direcţia x_3.

Componentele stării de tensiune σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ sînt legate de componentele u_i ale deplasării prin relaţiile [1]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = A_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \beta T, \quad \sigma_{12} = A_{66}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\\
&\sigma_{22} = A_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \beta T, \quad \sigma_{13} = A_{44}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),\\
&\sigma_{33} = A_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{13}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \beta' T, \quad \sigma_{23} = A_{44}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

unde coeficienţii A_{ij} au expresiile:

$$A_{11}=\frac{1}{DE'}\left(\frac{1}{E}-\frac{\nu'^2}{E'}\right),\quad A_{12}=\frac{1}{DE'}\left(\frac{\nu}{E}+\frac{\nu'^2}{E'}\right),\quad A_{13}=\frac{\nu'(1+\nu)}{DEE'},$$

(2) $$A_{33}=\frac{1-\nu^2}{DE^2},\quad A_{44}=G',\quad A_{66}=G=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad \beta=\frac{1+\nu}{DEE'}(\alpha+\alpha'\nu'),$$

$$\beta'=\frac{1+\nu}{DE}\left(\frac{2\alpha\nu'}{E'}+\frac{1-\nu}{E}\alpha'\right),\quad D=\frac{1+\nu}{EE'}\left(\frac{1-\nu}{E}-\frac{2\nu'^2}{E'}\right).$$

Se constată uşor, în baza formulelor (2), că între coeficienţii A_{11}, A_{12} şi A_{66} avem următoarea relaţie

(3) $$A_{11}-A_{12}=2A_{66}.$$

Dacă introducem tensiunile date de formulele (1) în ecuaţiile de echilibru elastic fără forţe masice

(4) $$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=0,\quad (i=1,2,3),$$

obţinem:

(5)
$$A_{66}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right)+A_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{(A_{11}+A_{12})}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]-\beta\frac{\partial T}{\partial x_1}=0,$$

$$A_{66}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right)+A_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{(A_{11}+A_{12})}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]-\beta\frac{\partial T}{\partial x_2}=0,$$

$$A_{44}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right)+A_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)-\beta'\frac{\partial T}{\partial x_3}=0.$$

Înmulţind ecuaţia a doua din sistemul (5) cu cantitatea imaginară $\pm i$ şi adunînd-o cu prima ecuaţie (5), vom putea scrie atunci sistemul (5) sub următoarea formă echivalentă

(6)
$$A_{66}\nabla^2(u_1\pm iu_2)+A_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}(u_1\pm iu_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\pm i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left[(A_{11}+A_{12})\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+2(A_{13}+A_{44})\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]-\beta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\pm i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)T=0,$$

$$A_{11}\nabla^2 u_3+A_{33}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)-\beta'\frac{\partial T}{\partial x_3}=0,$$

unde
$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

La sistemul de ecuaţii (6) trebuie să adăugăm ecuaţia propagării căldurii care, în cazul staţionar şi în absenţa surselor de căldură, se scrie sub forma

(7) $$\lambda\nabla^2 T+\lambda'\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}=0.$$

Trecînd de la coordonate carteziene la coordonate cilindrice prin formulele

(8) $$x_1=r\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\varphi,\quad x_3=x_3$$

şi luînd în locul funcţiilor necunoscute u_1, u_2, u_3 alte funcţii necunoscute w_1, w_2, w_3 legate de primele prin relaţiile

(9)
$$w_1=(u_1+iu_2)e^{-i\varphi},\quad w_2=(u_1-iu_2)e^{i\varphi},\quad w_3=u_3,$$

atunci sistemul de ecuaţii (6) împreună cu ecuaţia (7) se scrie sub forma

(10)
$$A_{66}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{2i}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\right)w_1+A_{44}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_3^2}+\frac{A_{11}+A_{12}}{4}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\right)w_1+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\right)w_2\right]+(A_{13}+A_{44})\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial w_3}{\partial x_3}-\beta\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)T=0,$$

$$A_{66}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{2i}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\right)w_2+A_{44}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_3^2}+\frac{A_{11}+A_{12}}{4}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\right)w_1+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\right)w_2\right]+(A_{13}+A_{44})\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial w_3}{\partial x_3}-\beta\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)T=0,$$

$$A_{11}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)w_3+A_{33}\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2}+\frac{A_{13}+A_{44}}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\right)w_1+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\right)w_2\right]-\beta'\frac{\partial T}{\partial x_3}=0,$$

$$\lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)T+\lambda'\frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}=0.$$

Vom căuta o soluţie particulară a sistemului (10) sub forma

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
w_1^* &= I_{k+1}(mr)\, e^{ik\varphi} X_1(x_3),\\
w_2^* &= I_{k-1}(mr)\, e^{ik\varphi} X_2(x_3),\\
w_3^* &= I_k(mr)\, e^{ik\varphi} X_3(x_3),\\
T^* &= I_k(mr)\, e^{ik\varphi} X_4(x_3),
\end{aligned}
$$

unde $I_{k+1}(mr)$, $I_k(mr)$, $I_{k-1}(mr)$ sînt funcţiile lui Bessel de prima speţă cu variabila complexă $z = mr$, aparţinînd planului cu tăietura $(-\infty, 0)$ şi k un parametru care poate lua orice valori întregi pozitive sau negative.

Introducînd funcţiile (11) în ecuaţiile (10) şi ţinînd seamă de relaţiile de recurenţă

$$
I_{k-1}(z) + I_{k+1}(z) = \frac{2k}{z} I_k(z),
$$

$$
I_{k-1}(z) - I_{k+1}(z) = 2I_k'(z),
$$

precum şi de ecuaţia diferenţială

$$
\frac{d^2 I_\nu(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dI_\nu(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) I_\nu(z) = 0,
$$

la care satisfac funcţiile $I_\nu(z)$, $\nu = k-1, k, k+1$, obţinem următorul sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare cu coeficienţi constanţi în funcţiile necunoscute $X_i(x_3)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
&A_{11} X_1'' - \left(A_{11} - \frac{A_{11} + A_{12}}{4}\right) m^2 X_1 + \frac{A_{11} + A_{12}}{4} m^2 X_2 -\\
&\quad - (A_{13} + A_{11}) m X_3' + m\beta X_4 = 0.\\
&A_{44} X_2'' - \left(A_{11} - \frac{A_{11} + A_{12}}{4}\right) m^2 X_2 + \frac{A_{11} + A_{12}}{4} m^2 X_1 +\\
&\quad + (A_{13} + A_{11}) m X_3' - m\beta X_4 = 0,\\
&A_{33} X_3'' - A_{44} m^2 X_3 + m\frac{A_{13} + A_{11}}{2}(X_1' - X_2') - \beta' X_4' = 0,\\
&X_4'' - \frac{m^2 \lambda}{\lambda'} X_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Integrînd sistemul (12), obţinem:

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
X_1(x_3) &= C_1 e^{ms_1 x_3} + C_2 e^{-ms_1 x_3} + C_3 e^{ms_2 x_3} + C_4 e^{-ms_2 x_3} +\\
&\quad + C_5 e^{ms_3 x_3} + C_6 e^{-ms_3 x_3} + aC_7 e^{ms_4 x_3} + aC_8 e^{-ms_4 x_3},\\
X_2(x_3) &= C_1 e^{ms_1 x_3} + C_2 e^{-ms_1 x_3} + C_3 e^{ms_2 x_3} - C_4 e^{-ms_2 x_3} -\\
&\quad - C_5 e^{ms_3 x_3} - C_6 e^{-ms_3 x_3} - aC_7 e^{ms_4 x_3} - aC_8 e^{-ms_4 x_3},\\
X_3(x_3) &= a_1 (C_3 e^{ms_2 x_3} - C_4 e^{-ms_2 x_3}) + a_2 (C_5 e^{ms_3 x_3} - C_6 e^{-ms_3 x_3}) +\\
&\quad + a_3 (C_7 e^{ms_4 x_3} - C_8 e^{-ms_4 x_3}),\\
X_4(x_3) &= C_7 e^{ms_4 x_3} + C_8 e^{-ms_4 x_3},
\end{aligned}
$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_8$ sînt constante arbitrare, iar

$$
s_1 = \sqrt{\frac{A_{44}}{A_{11}}}, \qquad s_4 = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}},
$$

$$
s_2 = \left\{\frac{1}{2A_{33}A_{44}}\left[A_{44}^2 + A_{11}A_{33} - (A_{13} + A_{11})^2 + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \sqrt{(A_{44}^2 + A_{11}A_{33} - (A_{13} + A_{11})^2)^2 - 4A_{11}A_{33}A_{44}^2}\right]\right\}^{1/2},
$$

$$
s_3 = \left\{\frac{1}{2A_{33}A_{44}}\left[A_{44}^2 + A_{11}A_{33} - (A_{13} + A_{11})^2 - \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \sqrt{(A_{44}^2 + A_{11}A_{33} - (A_{13} + A_{11})^2)^2 - 4A_{11}A_{33}A_{44}^2}\right]\right\}^{1/2},
$$

$$
a = \frac{1}{m\lambda'}\,\frac{\beta\lambda' A_{44} + \beta'\lambda A_{11} + \beta'\lambda A_{44} - \beta\lambda A_{33}}{A_{33}A_{44}s_4^4 - s_4^2[A_{44}^2 + A_{11}A_{33} - (A_{13} + A_{11})^2 + A_{11}A_{44}]},
$$

$$
a_1 = \frac{A_{11}s_2^2 - A_{11}}{s_2(A_{11} + A_{11})}, \quad a_2 = \frac{A_{11}s_3^2 - A_{11}}{s_3(A_{11} + A_{11})}, \quad a_3 = \frac{(A_{11}s_4^2 - A_{11})ma + \beta}{ms_4(A_{11} + A_{11})}.
$$

Cunoaşterea funcţiilor X_i ne conduce, în baza formulelor (11), la cunoaşterea funcţiilor w_i^* şi T^*.

Soluţia generală a sistemului (10) o vom putea scrie deci sub forma

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
w_1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_{k+1}(mr)\, X_1^{(k)}(x_3)\, dm,\\
w_2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_{k-1}(mr)\, X_2^{(k)}(x_3)\, dm,\\
w_3 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_k(mr)\, X_3^{(k)}(x_3)\, dm,\\
T &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_k(mr)\, X_4^{(k)}(x_3)\, dm,
\end{aligned}
$$

unde $X_i^{(k)}(x_3)$ sînt dați de (13).

Ținînd seamă de relațiile (1) și (9), componentele σ_{ij} ale tensorului tensiunilor se determină în funcție de w_i și T din următoarele combinații liniare:

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
(\sigma_{11}+i\sigma_{23})\, e^{-i\varphi} &= A_{11}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)w_3+\frac{\partial w_1}{\partial x_3}\right];\\
(\sigma_{13}+i\sigma_{23})\, e^{i\varphi} &= A_{11}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)w_3+\frac{\partial w_2}{\partial x_3}\right];\\
(\sigma_{33} &= \frac{A_{13}}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\right)w_1+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\right)w_2\right]+A_{33}\frac{\partial w_3}{\partial x_3}-\beta' T;\\
(\sigma_{11}-\sigma_{22}+2i\sigma_{12})\, e^{-2i\varphi} &= 2A_{66}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\right)w_1;\\
(\sigma_{11}-\sigma_{22}-2i\sigma_{12})\, e^{2i\varphi} &= 2A_{66}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\right)w_2;\\
(\sigma_{11}+\sigma_{22} &= \frac{A_{11}+A_{12}}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\right)w_1+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\right)w_2\right]+\\
&\quad+2A_{13}\frac{\partial w_3}{\partial x_3}-2\beta T.
\end{aligned}
$$

Structura soluțiilor găsite ne arată că ele sînt foarte convenabile în rezolvarea problemelor la limită pentru medii elastice transversal-izotrope din semispațiul $x_3 \geqslant 0$.

În adevăr, pentru asemenea medii elastice, e suficient să folosim numai soluția

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
w_1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_{k-1}(mr)\left[C_2^{(k)} e^{-ms_1x_3}+C_4^{(k)} e^{-ms_2x_3}+C_6^{(k)} e^{-ms_3x_3}+aC_8^{(k)} e^{-ms_4x_3}\right]dm;\\
w_2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_{k+1}(mr)\left[C_2^{(k)} e^{-ms_1x_3}-C_4^{(k)} e^{-ms_2x_3}-C_6^{(k)} e^{-ms_3x_3}-aC_8^{(k)} e^{-ms_4x_3}\right]dm;\\
w_3 &= -\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_k(mr)\left[a_1 C_4^{(k)} e^{-ms_2x_3}+a_2 C_6^{(k)} e^{-ms_3x_3}+\right.\\
&\qquad\left.+a_3 C_8^{(k)} e^{-ms_4x_3}\right]dm;\\
T &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_k(mr)\, C_8^{(k)} e^{-ms_1x_3}\, dm,
\end{aligned}
$$

dacă ținem seama că w_i și T (avînd în vedere semnificația lor fizică) sînt mărginite pe $x_3 \geqslant 0$, iar s_i și m sînt pozitivi. Pentru determinarea celor patru familii de constante $C_2^{(k)}$, $C_4^{(k)}$, $C_6^{(k)}$ și $C_8^{(k)}$ din (16), vom presupune că funcțiile la limită admit dezvoltarea în serii Fourier convergente după φ și transformarea Hankel după r adică

$$
(17)\quad
\begin{aligned}
w_1|_{x_3=0} &= f_1(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_{k+1}(mr)\, f_1^{(k)}(m)\, dm,\\
w_2|_{x_3=0} &= f_2(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_{k-1}(mr)\, f_2^{(k)}(m)\, dm,\\
w_3|_{x_3=0} &= f_3(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_k(mr)\, f_3^{(k)}(m)\, dm,\\
T|_{x_3=0} &= f_4(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \int_0^{\infty} I_k(mr)\, f_4^{(k)}(m)\, dm.
\end{aligned}
$$

Din egalitatea membrilor drepți ai relațiilor (16) (pentru $x_3=0$) și (17), obținem următorul sistem de patru ecuații pentru necunoscutele $C_2^{(k)}$, $C_4^{(k)}$, $C_6^{(k)}$ și $C_8^{(k)}$:

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
&C_2^{(k)} + C_4^{(k)} + C_6^{(k)} + aC_8^{(k)} = f_1^{(k)}(m),\\
&C_2^{(k)} - C_4^{(k)} - C_6^{(k)} - aC_8^{(k)} = f_2^{(k)}(m),\\
&a_1 C_4^{(k)} + a_2 C_6^{(k)} + a_3 C_8^{(k)} = -f_3^{(k)}(m),\\
&C_8^{(k)} = f_4^{(k)}(m).
\end{aligned}
$$

Înlocuirea lui $C_2^{(k)}$, $C_4^{(k)}$, $C_6^{(k)}$ și $C_8^{(k)}$ prin valorile lor ce rezultă din rezolvarea sistemului (18) și (16) ne dă rezolvarea problemei propuse.

Tensiunile se calculează cu ajutorul formulelor (15).

BIBLIOGRAFIE

1. Новацкий В. — *Вопросы термоупругости*. Изд. АН СССР, Москва, 1962, стр. 114.

SUR LES TENSIONS THERMIQUES DANS UN CORPS ÉLASTIQUE TRANSVERSALEMENT ISOTROPE

Résumé

On résout, par une nouvelle méthode, le problème de la distribution des tensions thermiques dans un corps élastique transversalement isotrope. Les tensions sont données par les formules (15).

TENSIONS THERMIQUES DANS DES BARRES ÉLASTIQUES NON-HOMOGÈNES

PAR

D. IEŞAN

Dans cette Note on étudie le problème des tensions thermiques dans des barres élastiques non-homogènes dans le cas où le champ thermique varie linéairement le long de la barre. On considère le cas des barres composées de différents matériaux orthotropes (§ 2, § 3) et de différents matériaux avec un plan de symétrie élastique (§ 4, § 5). Au § 6 on traite le cas d'une barre isotrope qui possède une non-homogénéité transversale continue.

§ 1. Considérons une barre cylindrique de longueur l, composée de plusieurs tiges cylindriques [7]. Nous supposons que les forces de masse sont nulles et la surface latérale n'est soumise à aucune tension. Nous considérons la barre fixée à une des extrémités et étant en équilibre sous l'action d'un champ thermique qui varie linéairement dans la direction de la génératrice, les forces extérieures qui actionnent sur l'extrémité libre étant statiquement équivalentes à zéro.

Nous choisissons le système de coordonnées cartésiennes orthogonales de manière que le plan x_1Ox_2 contienne l'extrémité libre et que l'axe Ox_3 soit parallèle aux génératrices de la surface latérale et dirigée vers l'extrémité fixé. La section transversale Σ, de la barre est formée par les domaines $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_m$ — sections des tiges — et le domaine Σ_0 environnant. Les domaines $\Sigma_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ ont pour frontières les courbes Γ_j, simples, fermées, rectifiables et sans points communs. La frontière du domaine Σ_0 est formée par les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ extérieures les unes aux autres et par la courbe Γ_{m+1} qui contient en son intérieur toutes les autres.

Nous allons noter par $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ respectivement les composantes du vecteur déplacement, du tenseur déformation et du tenseur tension et par T, la variation de la température absolue par rapport à la température de l'état non-déformé.