$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
&C_2^{(k)} + C_4^{(k)} + C_6^{(k)} + aC_8^{(k)} = f_1^{(k)}(m),\\
&C_2^{(k)} - C_4^{(k)} - C_6^{(k)} - aC_8^{(k)} = f_2^{(k)}(m),\\
&a_1 C_4^{(k)} + a_2 C_6^{(k)} + a_3 C_8^{(k)} = -f_3^{(k)}(m),\\
&C_8^{(k)} = f_4^{(k)}(m).
\end{aligned}
$$

Înlocuirea lui $C_2^{(k)}$, $C_4^{(k)}$, $C_6^{(k)}$ și $C_8^{(k)}$ prin valorile lor ce rezultă din rezolvarea sistemului (18) și (16) ne dă rezolvarea problemei propuse.

Tensiunile se calculează cu ajutorul formulelor (15).

BIBLIOGRAFIE

1. Новацкий В. — *Вопросы термоупругости*. Изд. АН СССР, Москва, 1962, стр. 114.

SUR LES TENSIONS THERMIQUES DANS UN CORPS ÉLASTIQUE TRANSVERSALEMENT ISOTROPE

Résumé

On résout, par une nouvelle méthode, le problème de la distribution des tensions thermiques dans un corps élastique transversalement isotrope. Les tensions sont données par les formules (15).

TENSIONS THERMIQUES DANS DES BARRES ÉLASTIQUES NON-HOMOGÈNES

PAR

D. IEŞAN

Dans cette Note on étudie le problème des tensions thermiques dans des barres élastiques non-homogènes dans le cas où le champ thermique varie linéairement le long de la barre. On considère le cas des barres composées de différents matériaux orthotropes (§ 2, § 3) et de différents matériaux avec un plan de symétrie élastique (§ 4, § 5). Au § 6 on traite le cas d'une barre isotrope qui possède une non-homogénéité transversale continue.

§ 1. Considérons une barre cylindrique de longueur l, composée de plusieurs tiges cylindriques [7]. Nous supposons que les forces de masse sont nulles et la surface latérale n'est soumise à aucune tension. Nous considérons la barre fixée à une des extrémités et étant en équilibre sous l'action d'un champ thermique qui varie linéairement dans la direction de la génératrice, les forces extérieures qui actionnent sur l'extrémité libre étant statiquement équivalentes à zéro.

Nous choisissons le système de coordonnées cartésiennes orthogonales de manière que le plan x_1Ox_2 contienne l'extrémité libre et que l'axe Ox_3 soit parallèle aux génératrices de la surface latérale et dirigée vers l'extrémité fixé. La section transversale Σ, de la barre est formée par les domaines $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_m$ — sections des tiges — et le domaine Σ_0 environnant. Les domaines $\Sigma_j (j = 1, 2, \ldots, m)$ ont pour frontières les courbes Γ_j, simples, fermées, rectifiables et sans points communs. La frontière du domaine Σ_0 est formée par les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ extérieures les unes aux autres et par la courbe Γ_{m+1} qui contient en son intérieur toutes les autres.

Nous allons noter par $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ respectivement les composantes du vecteur déplacement, du tenseur déformation et du tenseur tension et par T, la variation de la température absolue par rapport à la température de l'état non-déformé.

Les équations d'équilibre s'écrivent

$$\sigma_{ij,i} = 0. \tag{1.1}$$

Les relations entre les déformations et les déplacements sont

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}. \tag{1.2}$$

Les équations de compatibilité s'écrivent

$$\begin{cases} \varepsilon_{ii,jj} + \varepsilon_{jj,ii} = 2\varepsilon_{ij,ij}, & (i \neq j), \\ \varepsilon_{kk,ij} + \varepsilon_{ij,kk} = \varepsilon_{jk,ik} + \varepsilon_{ik,jk} & (i \neq j \neq k \neq i). \end{cases} \tag{1.3}$$

Les conditions sur la surface latérale sont

$$\sigma_{i\alpha} n_\alpha = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \ \alpha = 1, 2), \tag{1.4}$$

où n_1, n_2 sont les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour Γ_{m+1} de la section transversale.

Nous avons supposé que

$$T(x_1, x_2, x_3) = T_0(x_1, x_2) + x_3 T_1(x_1, x_2). \tag{1.5}$$

Les conditions sur le bout libre conduisent à

$$\int_\Sigma \sigma_{23}\, d\sigma = \int_\Sigma \sigma_{31}\, d\sigma = 0, \tag{1.6}$$

$$\int_\Sigma \sigma_{33}\, d\sigma = 0, \tag{1.7}$$

$$\int_\Sigma x_2 \sigma_{33}\, d\sigma = \int_\Sigma x_1 \sigma_{33}\, d\sigma = 0, \tag{1.7}$$

$$\int_\Sigma (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{31})\, d\sigma = 0. \tag{1.9}$$

Compte tenu du fait que la portion de la barre entre les plans $x_3 = 0$ et $x_3 = h (0 < h \leqslant l)$ est en équilibre [5], il suit que pour $x_3 = h$ nous avons

$$\int_\Sigma \sigma_{33}\, d\sigma = 0, \tag{1.10}$$

$$\int_\Sigma x_2 \sigma_{33}\, d\sigma = \int_\Sigma x_1 \sigma_{33}\, d\sigma = 0. \tag{1.11}$$

Les composantes du déplacement doivent être continues quand on passe par les surfaces de séparation et les composantes de la tension doivent satisfaire aux conditions

$$[\sigma_{k\alpha} n_\alpha]_0 = [\sigma_{k\alpha} n_\alpha]_i \ \text{sur} \ \Gamma_i \ (k = 1, 2, 3; \ i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1.12}$$

étant entendu que la valeur de l'expression entre parenthèses est prise pour le matériel à section transversale Σ_0, respectivement Σ_i. Nous désignons par S_i l'aire du domaine Σ_i et nous associons l'indice i aux constantes qui caractérisent les propriétés élastiques et thermiques du matériel à section transversale Σ_i.

§ 2. Nous supposons que les parties qui forment la barre sont composées de matériaux homogènes et orthotropes.

Les équation constitutives dans le cas des milieux orthotropes sont

$$\begin{cases} \sigma_{11} = A\varepsilon_{11} + H\varepsilon_{22} + G\varepsilon_{33} - \beta_1 T, \\ \sigma_{22} = H\varepsilon_{11} + B\varepsilon_{22} + F\varepsilon_{33} - \beta_2 T, \\ \sigma_{33} = G\varepsilon_{11} + F\varepsilon_{22} + C\varepsilon_{33} - \beta_3 T, \\ \sigma_{23} = 2L\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2M\varepsilon_{31}, \quad \sigma_{12} = 2N\varepsilon_{12}, \end{cases} \tag{2.1}$$

ou

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}(\nu_{11}\sigma_{11} + \nu_{12}\sigma_{22} - \nu_1\sigma_{33}) + \alpha_1 T, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}(\nu_{12}\sigma_{11} + \nu_{22}\sigma_{22} - \nu_2\sigma_{33}) + \alpha_2 T, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu_1\sigma_{11} - \nu_2\sigma_{22}) + \alpha_3 T, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2L}\sigma_{23}, \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2M}\sigma_{31}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2N}\sigma_{12}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Les relations entre les coefficients sont

$$\begin{aligned} &\frac{1}{E} = \frac{AB - H^2}{\Delta}, \quad \nu_{11} = \frac{BC - F^2}{AB - H^2}, \quad \nu_{12} = \frac{FG - CH}{AB - H^2}, \\ &\nu_{22} = \frac{AC - G^2}{AB - H^2}, \quad \nu_1 = \frac{BG - FH}{AB - H^2}, \quad \nu_2 = \frac{AF - GH}{AB - H^2}, \\ &\Delta = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{E}(\nu_{11}\beta_1 + \nu_{12}\beta_2 - \nu_1\beta_3), \quad \alpha_2 = \frac{1}{E}(\nu_{12}\beta_1 + \nu_{22}\beta_2 - \nu_2\beta_3),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{E}(\beta_3 - \nu_1\beta_1 - \nu_2\beta_2).$$

Nous notons

$$S_E = \int_\Sigma E d\sigma = \sum_{i=0}^{m} E_i S_i,$$

$$(2.4) \qquad I_E^{(11)} = \int_\Sigma E x_2^2 d\sigma = \sum_{i=0}^{m} E_i I_i^{(11)}, \qquad I_E^{(22)} = \int_\Sigma E x_1^2 d\sigma = \sum_{i=0}^{m} E_i I_i^{(22)},$$

$$I_E^{(12)} = \int_\Sigma E x_1 x_2 d\sigma = \sum_{i=0}^{m} E_i I_i^{(12)},$$

où $I_E^{(\alpha\beta)}$ sont les moments d'inertie réduits [7] et $I_i^{(\alpha\beta)}$ sont les moments d'inertie de la surface S_i. Nous considérons l'origine des axes de coordonnées au centre d'inertie réduit [7] et pour les axes Ox_1, Ox_2 nous prenons les axes principales d'inertie. Nous avons donc

$$(2.5) \qquad \int_\Sigma E x_1 d\sigma = \int_\Sigma E x_2 d\sigma = \int_\Sigma E x_1 x_2 d\sigma = 0.$$

Moyennant les résultats de [4], nous cherchons à satisfaire aux conditions du problème de la manière suivante :

Nous supposons que les tensions $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2)$ sont données par

$$(2.6) \qquad \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_1^2},$$

et satisfont aux conditions

$$(2.7) \qquad [\sigma_{\alpha\beta} n_\beta]_0 = [\sigma_{\alpha\beta} n_\beta]_i \text{ sur } \Gamma_i (i = 1, 2, \ldots, m), \ [\sigma_{\alpha\beta} n_\beta]_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_{m+1}.$$

La fonction $\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3) = \mathfrak{A}_0(x_1, x_2) + x_3 \mathfrak{A}_1(x_1, x_2)$ vérifie, dans chacun des domaines Σ_i, l'équation

$$(2.8) \qquad \left[b_{22}^{(i)} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2(b_{12}^{(i)} + b_{66}^{(i)}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + b_{11}^{(i)} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right] \mathfrak{A} = -\gamma_2^{(i)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \gamma_1^{(i)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2},$$

où

$$(2.9) \qquad b_{\alpha\beta} = \frac{1}{E}(\nu_{\alpha\beta} - \nu_\alpha \nu_\beta), \quad b_{66} = \frac{1}{2N}, \quad \gamma_\beta = \alpha_\beta + \alpha_3 \nu_\beta, \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Nous notons par $\bar{u}_\alpha$ et $\bar{\bar{u}}_\alpha (\alpha = 1, 2)$ les déplacements dans les problèmes de déformation plane thermoélastique caractérisés par les fonctions d'Airy $\mathfrak{A}_0$ respectivement $\mathfrak{A}_1$.

Nous allons commencer par le cas où les coefficients de Poisson ν_1 et ν_2 sont les mêmes pour tous les matériaux qui composent la barre, les autres constantes élastiques et thermiques étant différentes.

Supposons que les déplacements $u_i(x_1, x_2, x_3)$ ont la forme

$$(2.10) \qquad \begin{aligned} u_1 &= A_1 \left[-\frac{x_3^3}{6} - \frac{x_3}{2}(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) \right] + A_2 \left[-\frac{x_3^2}{2} - \frac{1}{2}(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) \right] - \\ &\quad - B_1 \nu_1 x_1 x_2 x_3 - B_2 \nu_1 x_1 x_2 - C_1 \nu_1 x_1 x_3 - C_2 \nu_1 x_1 - \tau x_2 x_3 + \bar{u}_1 + x_3 \bar{\bar{u}}_1, \\ u_2 &= -A_1 \nu_2 x_1 x_2 x_3 - A_2 \nu_2 x_1 x_2 + B_1 \left[-\frac{x_3^3}{6} + \frac{x_3}{2}(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) \right] + \\ &\quad + B_2 \left[-\frac{x_3^2}{2} + \frac{1}{2}(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) \right] - C_1 \nu_2 x_2 x_3 - C_2 \nu_2 x_2 + \tau x_1 x_3 + \bar{u}_2 + x_3 \bar{\bar{u}}_2, \\ u_3 &= \frac{1}{2} A_1 x_1 x_3^2 + A_2 x_1 x_3 + \frac{1}{2} B_1 x_2 x_3^2 + B_2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} C_1 x_3^2 + C_2 x_3 + \Phi(x_1, x_2), \end{aligned}$$

où il reste à determiner la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ et les constantes $A_\rho, B_\rho, C_\rho (\rho = 1, 2)$ et τ.

De (1.2) et (2.10) nous obtenons

$$(2.11) \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -\nu_1 [x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2] + \varepsilon_{11}^*, \\ \varepsilon_{22} &= -\nu_2 [x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_2) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2] + \varepsilon_{22}^*, \\ \varepsilon_{33} &= x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2, \\ 2\varepsilon_{23} &= -A_1 \nu_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} B_1(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) - C_1 \nu_2 x_2 + \tau x_1 + \bar{\bar{u}}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\ 2\varepsilon_{31} &= -\frac{1}{2} A_1(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) - B_1 \nu_1 x_1 x_2 - C_1 \nu_1 x_1 + \tau x_2 + \bar{\bar{u}}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12}^*, \end{aligned}$$

où

$$(2.12) \qquad 2\varepsilon_{\alpha\beta}^* = \bar{u}_{\alpha,\beta} + \bar{u}_{\beta,\alpha} + x_3(\bar{\bar{u}}_{\alpha,\beta} + \bar{\bar{u}}_{\beta,\alpha}).$$

De (2.1), (2.3) et (2.14) nous obtenons pour les tensions les expresions (2.6) et

$$\sigma_{33} = E_i[x_3(A_1x_1 + B_1x_2 + C_1) + A_2x_1 + B_2x_2 + C_2] +$$
$$+ \nu_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_2^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_1^2} - E_i \alpha_3^{(i)} T,$$

(2.13)
$$\sigma_{23} = L_i\left[-A_1\nu_2x_1x_2 + \frac{1}{2}B_1(\nu_1x_1^2 - \nu_2x_2^2) - C_1\nu_2x_2 + \tau x_1 + \bar{\bar{u}}_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right],$$
$$\sigma_{31} = M_i\left[-B_1\nu_1x_1x_2 - \frac{1}{2}A_1(\nu_1x_1^2 - \nu_2x_2^2) - C_1\nu_1x_1 - \tau x_2 + \bar{\bar{u}}_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right],$$

dans le domaine Σ_i.

Compte tenu de (2.8), les conditions de compatibilité sont satisfaites.

En imposant aux tensions (2.13) de vérifier les conditions (1.7), (1.8), (1.10) et (1.11) nous trouvons pour les constantes $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$, les expressions

(2.14)
$$A_\alpha = \frac{1}{I_E^{(22)}}\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i} x_1 \mathfrak{F}_{2-\alpha}^{(i)} d\sigma, \quad B_\alpha = \frac{1}{I_E^{(11)}}\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i} x_2 \mathfrak{F}_{2-\alpha}^{(i)} d\sigma,$$
$$C_\alpha = \frac{1}{S_E}\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i} \mathfrak{F}_{2-\alpha}^{(i)} d\sigma, \qquad (\alpha = 1, 2),$$

où

(2.15)
$$\mathfrak{F}_\rho^{(i)} = E_i\alpha_3^{(i)}T_\rho - \nu_1\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\rho}{\partial x_2^2} - \nu_2\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\rho}{\partial x_1^2}, \quad (\rho = 0, 1)$$

dans le domaine Σ_i.

Introduisant les expressions des tensions dans les équations d'équilibre on déduit que la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ vérifie l'équation

(2.16)
$$M_i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + L_i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} = (\nu_1M_i + \nu_2L_i - E_i)(A_1x_1 + B_1x_2 + C_1) +$$
$$+ \mathfrak{F}_1^{(i)} - M_i\bar{\bar{u}}_{1,1} - L_i\bar{\bar{u}}_{2,2},$$

dans chacun des domaines Σ_i.

Compte tenu de la continuité des déplacements il résulte la continuité de la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ dans le domaine de la section transversale. Moyennant (2.7), de (1.4) et (1.12) il résulte que la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ vérifie les conditions

$$\left[M_0\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}n_1 + L_0\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}n_2\right]_0 - \left[M_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}n_1 + L_i\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}n_2\right]_i = (M_0 - M_i)\Big|B_1\nu_1x_1x_2 +$$

(2.17)
$$+ \frac{1}{2}A_1(\nu_1x_1^2 - \nu_2x_2^2) + C_1\nu_1x_1 + \tau x_2 - \bar{\bar{u}}_1\Big|n_1 + (L_0 - L_i)\Big|A_1\nu_2x_1x_2 -$$
$$- \frac{1}{2}B_1(\nu_1x_1^2 - \nu_2x_2^2) + C_1\nu_2x_2 - \tau x_1 - \bar{\bar{u}}_2\Big|n_2,$$
$$\text{sur } \Gamma_i, (i = 1, 2, \ldots m, m+1;\ L_{m+1} = M_{m+1} = 0).$$

Examinons l'existence de la fonction $\Phi(x_1, x_2)$. Soit $g(x_1, x_2)$ une solution particulière de l'équation (2.16). En faisant la substitution

(2.18)
$$\Phi(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2),$$

il résulte que la fonction $\varphi(x_1, x_2)$ vérifie l'équation

(2.19)
$$M_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + L_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = 0,$$

dans le domaine Σ_i et les conditions aux limites

(2.20)
$$[D\varphi]_0 - [D\varphi]_i = f_i \text{ sur } \Gamma_i,$$
$$D = Mn_1\frac{\partial}{\partial x_1} + Ln_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$

(2.21)
$$f_i = [Dg]_i - [Dg]_0 + (M_0 - M_i)\Big|B_1\nu_1x_1x_2 + \frac{1}{2}A_1(\nu_1x_1^2 - \nu_2x_2^2) +$$
$$+ C_1\nu_1x_1 + \tau x_2 - \bar{\bar{u}}_1\Big|n_1 + (L_0 - L_i)\Big|A_1\nu_2x_1x_2 -$$
$$- \frac{1}{2}B_1(\nu_1x_1^2 - \nu_2x_2^2) + C_1\nu_2x_2 - \tau x_1 - \bar{\bar{u}}_2\Big|n_2,$$
$$(i = 1, 2, \ldots m, m+1;\ L_{m+1} = M_{m+1} = 0).$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la fonction $\varphi(x_1, x_2)$ est [2]

(2.22)
$$\sum_{i=1}^{m+1}\int_{\Gamma_i} f_i\, ds = 0.$$

Dans notre cas, nous avons

$$\sum_{i=1}^{m+1}\int_{\Gamma_i} f_i\,ds = \sum_{i=1}^{m}\int_{\Gamma_i}[Dg]_i\,ds - \sum_{i=1}^{m+1}\int_{\Gamma_i}[Dg]_0\,ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}\int_{\Gamma_i}\Big\{(M_0-M_i)\Big[B_1\nu_1x_1x_2+\frac{1}{2}A_1(\nu_1x_1^2-\nu_2x_2^2)+\tau x_2-\bar{\bar{u}}_1\Big]n_1+$$

$$+(L_0-L_i)\Big[A_1\nu_2x_1x_2-\frac{1}{2}B_1(\nu_1x_1^2-\nu_2x_2^2)-\tau x_1-\bar{\bar{u}}_2\Big]n_2\Big\}\,ds.$$

Si nous transformons les intégrales ci-dessus en intégrales doubles, et compte tenu du fait que la normale à Γ_i est extérieure au domaine constant Σ_0, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{m+1}\int_{\Gamma_i} f_i\,ds = -\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}\left(M_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+L_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right)d\sigma+\int_{\Sigma_0}\{M_0[\nu_1(A_1x_1+B_1x_2+C_1)-$$

$$-\bar{\bar{u}}_{1,1}]+L_0[\nu_2(A_1x_1+B_1x_2+C_1)-\bar{\bar{u}}_{2,2}]\}d\sigma+\sum_{i=1}^{m}\int_{\Sigma_i}\{M_i[\nu_1(A_1x_1+$$

$$+B_1x_2+C_1)-\bar{\bar{u}}_{1,1}]+L_i[\nu_2(A_1x_1+B_1x_2+C_1)-\bar{\bar{u}}_{2,2}]\}\,d\sigma=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}E_i(A_1x_1+B_1x_2+C_1)d\sigma-\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}\mathfrak{F}_1^{(i)}d\sigma=0,$$

moyennant (2.5) et (2.14).

En supposant que la fonction $\Phi(x_1,x_2)$ est connue on détermine τ à l'aide de la condition (1.9). Ainsi, nous obtenons

$$\tau I=\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}\Big\{x_1x_2\Big[A_1\Big(L_i\nu_2-\frac{1}{2}M_i\nu_1\Big)x_1+B_1\Big(\frac{1}{2}L_i\nu_2-M_i\nu_1\Big)x_2+$$

$$+C_1(L_i\nu_2-M_i\nu_1)\Big]+\frac{1}{2}(M_iA_1\nu_2x_2^3-L_iB_1\nu_1x_1^3)+$$

$$+M_ix_2\Big(\bar{\bar{u}}_1+\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\Big)-L_ix_1\Big(\bar{\bar{u}}_2+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\Big)\Big\}\,d\sigma,$$

où

$$I=\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}(L_ix_1^2+M_ix_2^2)d\sigma.$$

En vertu des relations (1.1), (1.4), (2.5), (2.13) et (2.14) les conditions (1.6) sont identiquement satisfaites. En effet pour la première nous avons

$$\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}\sigma_{31}d\sigma=\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}\Big\{\sigma_{31}+x_1\Big(\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}\Big)+x_1E_i(A_1x_1+B_1x_2+C_1)+$$

$$+\Big(\nu_1\frac{\partial^2\mathfrak{A}_1}{\partial x_2^2}+\nu_2\frac{\partial^2\mathfrak{A}_1}{\partial x_1^2}-E_i\alpha_3^{(i)}T_1\Big)x_1\Big\}d\sigma=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}\Big[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1\sigma_{31})+\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1\sigma_{23})\Big]d\sigma+A_1I_E^{(22)}-\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}x_1\mathfrak{F}_1^{(i)}d\sigma=0;$$

la deuxième résulte d'une manière analogue.

§ 3. Passons maintenant au problème général où les coefficients de Poisson des matériaux qui composent la barre sont différents.

Le système x_1Ox_2 est choisi arbitrairement dans le plan de l'extremité libre de la barre.

Considérons trois problèmes de déformation élastique ($T=0$) plane dans lesquels les déplacements et les tensions, $u_\alpha^{(k)}$ et $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(\alpha,\beta=1,2;\ k=1,2,3)$ vérifient les conditions [2]

$$(3.1)\quad\begin{cases}[\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}n_\beta]_0=0, \text{ sur } \Gamma_{m+1},\\ [\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}n_\beta]_i=[\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}n_\beta]_0,\\ [u_\alpha^{(k)}]_i-[u_\alpha^{(k)}]_0=g_{i\alpha}^{(k)} \text{ sur } \Gamma_i\ (i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,3;\ \alpha=1,2).\end{cases}$$

où

$$(3.2)\quad\begin{cases}g_{i1}^{(1)}=\frac{1}{2}[(\nu_1^{(i)}-\nu_1^{(0)})x_1^2-(\nu_2^{(i)}-\nu_2^{(0)})x_2^2],\ g_{i2}^{(1)}=(\nu_2^{(i)}-\nu_2^{(0)})x_1x_2,\\ g_{i1}^{(2)}=(\nu_1^{(i)}-\nu_1^{(0)})x_1x_2,\ g_{i2}^{(2)}=-\frac{1}{2}[(\nu_1^{(i)}-\nu_1^{(0)})x_1^2-(\nu_2^{(i)}-\nu_2^{(0)})x_2^2],\\ g_{i1}^{(3)}=(\nu_1^{(i)}-\nu_1^{(0)})x_1,\ g_{i2}^{(3)}=(\nu_2^{(i)}-\nu_2^{(0)})x_2.\end{cases}$$

Supposons ces problèmes résolus.

Soient les fonctions

$$
\begin{aligned}
u_1^{(i)} &= a_1\left[-\frac{x_3^3}{6}-\frac{x_3}{2}\left(\nu_1^{(i)}x_1^2-\nu_2^{(i)}x_2^2\right)\right]+a_2\left[-\frac{x_3^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\nu_1^{(i)}x_1^2-\nu_2^{(i)}x_2^2\right)\right]-\\
&-b_1\nu_1^{(i)}x_1x_2x_3-b_2\nu_1^{(i)}x_1x_2-c_1\nu_1^{(i)}x_1x_3-c_2\nu_1x_1-\tau x_2x_3+\bar{u}_1+x_3\bar{\bar{u}}_1,\\
u_2^{(i)} &= -a_1\nu_2^{(i)}x_1x_2x_3-a_2\nu_2^{(i)}x_1x_2+b_1\left[-\frac{x_3^3}{6}+\frac{x_3}{2}\left(\nu_1^{(i)}x_1^2-\nu_2^{(i)}x_2^2\right)\right]+\\
&+b_2\left[-\frac{x_3^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\nu_1^{(i)}x_1^2-\nu_2^{(i)}x_2^2\right)\right]-c_1\nu_1^{(i)}x_2x_3-c_2\nu_2^{(i)}x_2+\tau x_1x_3+\bar{u}_2+x_3\bar{\bar{u}}_2,\\
u_3^{(i)} &= \frac{1}{2}a_1x_1x_3^2+a_2x_1x_3+\frac{1}{2}b_1x_2x_3^2+b_2x_2x_3+\frac{1}{2}c_1x_3^2+c_2x_3+\Phi(x_1,x_2),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

définies dans le domaine Σ_i, où la fonction $\Phi(x_1,x_2)$ et les constantes a_α, b_α, c_α $(\alpha=1,2)$ et τ vont être déterminées. Nous cherchons à satisfaire aux conditions du problème en supposant que les déplacements ont les expressions

$$
\begin{cases}
u_\alpha = u_\alpha^{(i)}+x_3\left[a_1u_\alpha^{(1)}+b_1u_\alpha^{(2)}+c_1u_\alpha^{(3)}\right]+a_2u_\alpha^{(1)}+b_2u_\alpha^{(2)}+c_2u_\alpha^{(3)},\\
u_3 = u_3^{(i)}.
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

En tenant compte de (3.1) et (3.2), les déplacements (3.4) sont continus au passage par les surfaces de séparation.

Les déformations qui correspondent aux déplacements (3.4) sont

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta} &= -\nu_\alpha^{(i)}\left[x_3(a_1x_1+b_1x_2+c_1)+a_2x_1+b_2x_2+c_2\right]\delta_{\alpha\beta}+\\
&+x_3\left[a_1\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}+b_1\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}+c_1\varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)}\right]+a_2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}+b_2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(2)}+c_2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)},\quad(\alpha,\beta=1,2),\\
\varepsilon_{33} &= x_3(a_1x_1+b_1x_2+c_1)+a_2x_1+b_2x_2+c_2,\\
2\varepsilon_{23} &= -a_1\nu_2^{(i)}x_1x_2+\frac{1}{2}b_1\left(\nu_1^{(i)}x_1^2-\nu_2^{(i)}x_2^2\right)-c_1\nu_2^{(i)}x_2+\tau x_1+\bar{\bar{u}}_2+\\
&+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+a_1u_2^{(1)}+b_1u_2^{(2)}+c_1u_2^{(3)},\\
2\varepsilon_{31} &= -\frac{1}{2}a_1\left(\nu_1^{(i)}x_1^2-\nu_2^{(i)}x_2^2\right)-b_1\nu_1^{(i)}x_1x_2-c_1\nu_1^{(i)}x_1-\tau x_2+\bar{\bar{u}}_1+\\
&+\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+a_1u_1^{(1)}+b_1u_1^{(2)}+c_1u_1^{(3)}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

De (2.1), (2.3) et (3.5) nous obtenons les tensions

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta} &= \sigma_{\alpha\beta}^*+x_3\left[a_1\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}+b_1\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}+c_1\sigma_{\alpha\beta}^{(3)}\right]+a_2\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}+b_2\sigma_{\alpha\beta}^{(2)}+\\
&+c_2\sigma_{\alpha\beta}^{(3)},\quad(\alpha,\beta=1,2),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

où $\sigma_{\alpha\beta}^*$ ont les expressions (2.6), et

$$
\begin{aligned}
\sigma_{33} &= E_i\left[x_3(a_1x_1+b_1x_2+c_1)+a_2x_1+b_2x_2+c_2\right]+\\
&+(a_1x_3+a_2)\left(\nu_1^{(i)}\sigma_{11}^{(1)}+\nu_2^{(i)}\sigma_{22}^{(1)}\right)+(b_1x_3+b_2)\left(\nu_1^{(i)}\sigma_{11}^{(2)}+\nu_2^{(i)}\sigma_{22}^{(2)}\right)+\\
&+(c_1x_3+c_2)\left(\nu_1^{(i)}\sigma_{11}^{(3)}+\nu_2^{(i)}\sigma_{22}^{(3)}\right)+\nu_1^{(i)}\sigma_{11}^*+\nu_2^{(i)}\sigma_{22}^*-E_i\alpha_3^{(i)}T,\\
\sigma_{23} &= L_i\Big[-a_1\nu_2^{(i)}x_1x_2+\frac{1}{2}b_1\left(\nu_1^{(i)}x_1^2-\nu_2^{(i)}x_2^2\right)-c_1\nu_2^{(i)}x_2+\tau x_1+\bar{\bar{u}}_2+\\
&+\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+a_1u_2^{(1)}+b_1u_2^{(2)}+c_1u_2^{(3)}\Big]\\
\sigma_{31} &= M_i\Big[-b_1\nu_1^{(i)}x_1x_2-\frac{1}{2}a_1\left(\nu_1^{(i)}x_1^2-\nu_2^{(i)}x_2^2\right)-c_1\nu_1^{(i)}x_1-\tau x_2+\bar{\bar{u}}_1+\\
&+\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+a_1u_1^{(1)}+b_1u_1^{(2)}+c_1u_1^{(3)}\Big].
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Si nous imposons les conditions (1.7) et (1.10) nous obtenons

$$
c_\alpha = -a_\alpha d_1-b_\alpha d_2+\tau_{2-\alpha},\quad(\alpha=1,2),
\tag{3.8}
$$

où

$$
\begin{aligned}
d_\alpha &= \frac{\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}\left(E_ix_\alpha+\nu_1^{(i)}\sigma_{11}^{(\alpha)}+\nu_2^{(i)}\sigma_{22}^{(\alpha)}\right)d\sigma}{\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}\left(E_i+\nu_1^{(i)}\sigma_{11}^{(3)}+\nu_2^{(i)}\sigma_{22}^{(3)}\right)d\sigma},\quad(\alpha=1,2)\\
\tau_\beta &= \frac{\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}\left(E_i\alpha_3^{(i)}T_\beta-\nu_1^{(i)}\frac{\partial^2\mathfrak{A}_\beta}{\partial x_2^2}-\nu_2^{(i)}\frac{\partial^2\mathfrak{A}_\beta}{\partial x_1^2}\right)d\sigma}{\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i}\left(E_i+\nu_1^{(i)}\sigma_{11}^{(3)}+\nu_2^{(i)}\sigma_{22}^{(3)}\right)d\sigma},\quad(\beta=0,1).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Compte tenu de (3.8), de (3.7) nous obtenons

$$\sigma_{33} = x_3 (a_1 \mathcal{H}_1^{(i)} + b_1 \mathcal{H}_2^{(i)}) + a_2 \mathcal{H}_1^{(i)} + b_2 \mathcal{H}_2^{(i)} + x_3 \tau_1 \mathcal{H}_3^{(i)} + \tau_0 \mathcal{H}_3^{(i)} +$$

$$+ \nu_1^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_2^2} + \nu_2^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_1^2} - E_i \alpha_3^{(i)} T, \tag{3.10}$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{H}_\alpha^{(i)} = E_i x_\alpha + \nu_1^{(i)} \sigma_{11}^{(\alpha)} + \nu_2^{(i)} \sigma_{22}^{(\alpha)} - d_\alpha \mathcal{H}_3^{(i)}, \\ \mathcal{H}_3^{(i)} = E_i + \nu_1^{(i)} \sigma_{11}^{(3)} + \nu_2^{(i)} \sigma_{22}^{(3)}. \end{cases} \tag{3.11}$$

De (1.8), (1.11) et (3.10), nous obtenons pour les constantes a_α, b_α $(\alpha = 1, 2)$ les systèmes

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{11} a_\alpha + \mathcal{J}_{21} b_\alpha = m_1^{(2-\alpha)}, \\ \mathcal{J}_{12} a_\alpha + \mathcal{J}_{21} b_\alpha = m_2^{(2-\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2), \end{cases} \tag{3.12}$$

où

$$\mathcal{J}_{\alpha\beta} = \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \mathcal{H}_\alpha^{(i)} x_\beta \, d\sigma,$$

$$m_\beta^{(\rho)} = - \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \left(\tau_\rho \mathcal{H}_3^{(i)} + \nu_1^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\rho}{\partial x_2^2} + \nu_2^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\rho}{\partial x_1^2} - E_i \alpha_3^{(i)} T_\rho \right) x_\beta \, d\sigma, \tag{3.13}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2 \,;\ \rho = 0, 1)$$

Moyennant les résultats de [2], il suit $\mathcal{J}_{12} = \mathcal{J}_{21}$ et $\mathcal{J}_{11} \mathcal{J}_{22} - \mathcal{J}_{12}^2 \neq 0$ ainsi que

$$\begin{aligned} a_\alpha &= \frac{1}{\mathcal{J}_{11} \mathcal{J}_{22} - \mathcal{J}_{12}^2} (\mathcal{J}_{22} m_1^{(2-\alpha)} - \mathcal{J}_{21} m_2^{(2-\alpha)}), \\ b_\alpha &= \frac{1}{\mathcal{J}_{11} \mathcal{J}_{22} - \mathcal{J}_{12}^2} (\mathcal{J}_{11} m_2^{(2-\alpha)} - \mathcal{J}_{12} m_1^{(2-\alpha)}), \quad (\alpha = 1, 2), \end{aligned} \tag{3.14}$$

En introduisant les tensions (3.7) dans la troisième équation d'équilibre, il résulte que la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ vérifie l'équation

$$\begin{aligned} M_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + L_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} &= - a_1 \mathcal{H}_1^{(i)} - b_1 \mathcal{H}_2^{(i)} - \tau_1 \mathcal{H}_3^{(i)} - \nu_1^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_1}{\partial x_2^2} - \nu_2^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_1}{\partial x_1^2} + \\ &+ E_i \alpha_3^{(i)} T_1 + (L_i \nu_2^{(i)} + M_i \nu_1^{(i)})(a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1) - L_i \bar{\bar{u}}_{2,2} - \\ &- M_i \bar{\bar{u}}_{1,1} - a_1 (L_i u_{2,2}^{(1)} + M_i u_{1,1}^{(1)}) - b_1 (L_i u_{2,2}^{(2)} + M_i u_{1,1}^{(2)}) - \\ &- c_1 (L_i u_{2,2}^{(3)} + M_i u_{1,1}^{(3)}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Soit $g(x_1, x_2)$ une solution particulière de l'équation (3.15). En faisant la substitution (2.18), de (1.4), (1.12) et (3.15) il résulte que la fonction $\varphi(x_1, x_2)$ vérifie l'equation (2.19) et les conditions suivantes

$$[D\varphi]_0 - [D\varphi]_i = h_i \text{ sur } \Gamma_i, \tag{3.16}$$

où

$$\begin{aligned} h_i = [Dg]_i - [Dg]_0 + \Big\{ & \frac{1}{2} a_1 [(M_0 \nu_1^{(0)} - M_i \nu_1^{(i)}) x_1^2 - (M_0 \nu_1^{(0)} - M_i \nu_1^{(i)}) x_2^2] + \\ & + b_1 (M_0 \nu_1^{(0)} - M_i \nu_1^{(i)}) x_1 x_2 + c_1 (M_0 \nu_1^{(0)} - M_i \nu_1^{(i)}) x_1 + \\ & + (M_0 - M_i)(\tau x_2 - \bar{\bar{u}}_1 - a_1 u_1^{(1)} - b_1 u_1^{(2)} - c_1 u_1^{(3)}) \Big\} n_1 + \Big\{ a_1 (L_0 \nu_2^{(0)} - \\ & - L_i \nu_2^{(i)}) x_1 x_2 - \frac{1}{2} b_1 [(L_0 \nu_1^{(0)} - L_i \nu_1^{(i)}) x_1^2 - (L_0 \nu_2^{(0)} - L_i \nu_2^{(i)}) x_2^2] + \\ & + c_1 (L_0 \nu_2^{(0)} - L_i \nu_2^{(i)}) x_2 - (L_0 - L_i)(\tau x_1 + \bar{\bar{u}}_2 + a_1 u_2^{(1)} + b_1 u_2^{(2)} + c_1 u_2^{(3)}) \Big\} n_2, \\ & (i = 1, 2, \ldots, m, m+1 \,;\ L_{m+1} = M_{m+1} = 0). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Nous devons démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la solution du problème (3.15), (3.16) est vérifiée. De (2.21) et (3.17) nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+1} \int_{\Gamma_i} h_i \, ds &= - \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \left(M_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + L_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) d\sigma + \\ &+ \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} [(L_i \nu_2^{(i)} + M_i \nu_1^{(i)})(a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1) - L_i (\bar{\bar{u}}_{2,2} + a_1 u_{2,2}^{(1)} + b_1 u_{2,2}^{(2)} + \\ &+ c_1 u_{2,2}^{(3)}) - M_i (\bar{\bar{u}}_{1,1} + a_1 u_{1,1}^{(1)} + b_1 u_{1,1}^{(2)} + c_1 u_{1,1}^{(3)})] \, d\sigma = \\ &= \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \left(a_1 \mathcal{H}_1^{(i)} + b_1 \mathcal{H}_2^{(i)} + \tau_1 \mathcal{H}_3^{(i)} + \nu_1^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_1}{\partial x_2^2} + \nu_2^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_1}{\partial x_1^2} - E_i \alpha_2^{(i)} T_1 \right) d\sigma = 0, \end{aligned}$$

compte tenu de (3.9). On détermine la constante τ en employant (1.9). En vertu des relations (1.1), (1.4), (3.10) et (3.12), les conditions (1.6) sont vérifiées.

§ 4. Supposons maintenant que les milieux qui composent la barre ont un seul plan de symétrie élastique.

Les équations constitutives sont

$$
(4.1)\quad \begin{cases}
\sigma_{11} = A\varepsilon_{11} + H\varepsilon_{22} + G\varepsilon_{33} + Q\varepsilon_{12} + \beta_1 T,\\
\sigma_{22} = H\varepsilon_{11} + B\varepsilon_{22} + F\varepsilon_{33} + R\varepsilon_{12} + \beta_2 T,\\
\sigma_{33} = G\varepsilon_{11} + F\varepsilon_{22} + C\varepsilon_{33} + S\varepsilon_{12} + \beta_3 T,\\
\sigma_{12} = Q\varepsilon_{11} + R\varepsilon_{22} + S\varepsilon_{33} + D\varepsilon_{12} + \beta_4 T,\\
\sigma_{23} = 2(L\varepsilon_{23} + N\varepsilon_{31}),\\
\sigma_{31} = 2(N\varepsilon_{23} + M\varepsilon_{31}),
\end{cases}
$$

où

$$
(4.2)\quad \begin{cases}
\varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}(\nu_{11}\sigma_{11} + \nu_{12}\sigma_{22} + \nu_{13}\sigma_{12} - \nu_1\sigma_{33}) + \alpha_1 T,\\
\varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}(\nu_{12}\sigma_{11} + \nu_{22}\sigma_{22} + \nu_{23}\sigma_{12} - \nu_2\sigma_{33}) + \alpha_2 T,\\
\varepsilon_{33} = \dfrac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu_1\sigma_{11} - \nu_2\sigma_{22} - \nu_3\sigma_{12}) + \alpha_3 T,\\
\varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2E}(\nu_{13}\sigma_{11} + \nu_{23}\sigma_{22} + \nu_{33}\sigma_{12} - \nu_3\sigma_{33}) + \alpha_4 T,\\
\varepsilon_{23} = \dfrac{1}{2(LM - N^2)}(M\sigma_{23} - N\sigma_{31}),\\
\varepsilon_{31} = -\dfrac{1}{2(LM - N^2)}(N\sigma_{23} - L\sigma_{31}).
\end{cases}
$$

Entre les coefficients intervenant dans (4.2) et (4.3) il y a des relations analogues aux relations (2.3) [3].

Dans cette section nous supposerons que les coefficients de Poisson ν_1, ν_2 et ν_3 sont les mêmes pour tous les matériaux qui composent la barre. Dans la section suivante nous allons étudier le cas où les coefficients de Poisson sont différents.

Nous choisissons le système de coordonnées cartésiennes de manière à avoir (2.5). Nous supposons que les tensions $\sigma_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ sont données par (2.6) et vérifient (2.7). Dans ce cas la fonction Φ vérifie l'équation

$$
(4.3)\quad \begin{aligned}
b_{22}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^4} - 2b_{23}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^3 \partial x_2} - 2b_{13}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2^3} + (2b_{12} + b_{33})\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + b_{11}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} =\\
= -\rho_2\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \rho_4\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} - \rho_1\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}.
\end{aligned}
$$

où

$$
(4.4)\quad b_{\varkappa\gamma} = \nu_{\varkappa\gamma} - \nu_\varkappa\nu_\gamma,\quad \rho_\varkappa = (\alpha_\varkappa + \nu_\varkappa\alpha_3)E,\quad \rho_4 = (2\alpha_4 + \nu_3\alpha_3)E,\quad (\varkappa, \gamma = 1, 2)
$$

Notons par $\bar{u}_\alpha$ et $\bar{\bar{u}}_\alpha$ les déplacements dans les problèmes de déformation plane thermoélastique caractérisés par les fonctions d'Airy Φ_0 respectivement Φ_1. Nous supposons que les déplacements ont la forme

$$
(4.5)\quad \begin{aligned}
u_1 = {} & A_1\left[-\frac{x_3^3}{6} - \frac{x_3}{2}(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2)\right] + A_2\left[-\frac{x_3^2}{2} - \frac{1}{2}(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2)\right] -\\
& - B_1\left(\nu_1 x_1 + \frac{1}{2}\nu_3 x_2\right)x_2 x_3 - B_2\left(\nu_1 x_1 + \frac{1}{2}\nu_3 x_2\right)x_2 -\\
& - C_1\left(\nu_1 x_1 + \frac{1}{2}\nu_3 x_2\right)x_3 - C_2\left(\nu_1 x_1 + \frac{1}{2}\nu_3 x_2\right) -\\
& - \tau x_2 x_3 + \bar{u}_1 + x_3\bar{\bar{u}}_1,\\
u_2 = {} & - A_1\left(\nu_2 x_2 + \frac{1}{2}\nu_3 x_1\right)x_1 x_3 - A_2\left(\nu_2 x_2 + \frac{1}{2}\nu_3 x_1\right)x_1 +\\
& + B_1\left[-\frac{x_3^3}{6} + \frac{x_3}{2}(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2)\right] + B_2\left[-\frac{x_3^2}{2} + \frac{1}{2}(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2)\right] -\\
& - C_1\left(\nu_2 x_2 + \frac{1}{2}\nu_3 x_1\right)x_3 - C_2\left(\nu_2 x_2 + \frac{1}{2}\nu_3 x_1\right) +\\
& + \tau x_1 x_3 + \bar{u}_2 + x_3\bar{\bar{u}}_2,\\
u_3 = {} & \frac{1}{2}A_1 x_1 x_3^2 + A_2 x_1 x_3 + \frac{1}{2}B_1 x_2 x_3^2 + B_2 x_2 x_3 + \frac{1}{2}C_1 x_3^2 +\\
& + C_2 x_3 + \Phi(x_1, x_2),
\end{aligned}
$$

où la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ et les constantes A_α, B_α, C_α $(\alpha = 1, 2)$ et τ vont être déterminées.

Les déformations sont

$$
(4.6)\quad \begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= -\nu_1[x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2] + \varepsilon_{11}^*,\\
\varepsilon_{22} &= -\nu_2[x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2] + \varepsilon_{22}^*,\\
\varepsilon_{12} &= -\frac{\nu_3}{2}[x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2] + \varepsilon_{12}^*,\\
\varepsilon_{33} &= x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2,
\end{aligned}
$$

$$2\varepsilon_{23} = -A_1(\nu_2 x_2 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_1)x_1 + \tfrac{1}{2}B_1(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) - $$
$$- C_1(\nu_2 x_2 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_1) + \tau x_1 + u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2},$$

$$2\varepsilon_{31} = -\tfrac{1}{2}A_1(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) - B_1(\nu_1 x_1 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_2)x_2 -$$
$$- C_1(\nu_1 x_1 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_2) - \tau x_2 + \bar{u}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}.$$

De (4.1) et (4.6) nous obtenons

$$(4.7)\quad \left|\begin{aligned}
\sigma_{33} &= E_i[x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2] + \nu_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_2^2} + \\
&+ \nu_2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_1^2} - \nu_3 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_1 \partial x_2} - E_i \alpha_3^{(i)} T, \\
\sigma_{23} &= L_i\Big[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + u_2 + \tau x_1 - A_1(\nu_2 x_2 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_1)x_1 + \tfrac{1}{2}B(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) - \\
&- C_1(\nu_2 x_2 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_1)\Big] + N_i\Big[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \bar{u}_1 - \tau x_2 - \\
&- \tfrac{1}{2}A_1(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) - B_1(\nu_1 x_1 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_2)x_2 - C_1(\nu_1 x_1 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_2)\Big], \\
\sigma_{31} &= N_i\Big[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \bar{u}_2 + \tau x_1 - A_1(\nu_2 x_2 + \nu_3 x_1)x_1 + \\
&+ \tfrac{1}{2}B_1(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) - C_1(\nu_2 x_2 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_1)\Big] + M_i\Big[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \bar{u}_1 - \\
&- \tau x_2 - \tfrac{1}{2}A_1(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) - B_1(\nu_1 x_1 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_2)x_2 - \\
&- C_1(\nu_1 x_1 + \tfrac{1}{2}\nu_3 x_2)\Big],
\end{aligned}\right.$$

dans le domaine Σ_i.

En imposant les conditions (1.7), (1.8), (1.10) et (1.11) nous obtenons

$$(4.8)\quad \begin{aligned}
A_\alpha &= \frac{1}{I_E^{(22)}}\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i} x_1 \mathfrak{F}_{2-\alpha}^{(i)} d\sigma, \quad B_\alpha = \frac{1}{I_E^{(11)}}\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i} x_2 \mathfrak{F}_{2-\alpha}^{(i)} d\sigma, \\
C_\alpha &= \frac{1}{S_E}\sum_{i=0}^{m}\int_{\Sigma_i} \mathfrak{F}_{2-\alpha}^{(i)} d\sigma, \quad (\alpha = 1,2),
\end{aligned}$$

où

$$(4.9)\quad \mathfrak{F}_\beta^{(i)} = E_i \alpha_\beta^{(i)} T_\beta - \nu_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\beta}{\partial x_2^2} - \nu_2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\beta}{\partial x_1^2} + \nu_3 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\beta}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (\beta = 0,1).$$

Moyennant la relation (4.7) et la troisième équation d'équilibre il résulte que la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ vérifie l'équation

$$(4.10)\quad \begin{aligned}
&M_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + 2N_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + L_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \\
&= (\nu_2 L_i + \nu_1 M_i + \nu_3 N_i - E_i)(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) - \\
&- M_i \bar{u}_{1,1} - N_i(\bar{u}_{1,2} + \bar{u}_{2,1}) - L_i \bar{u}_{2,2} + \mathfrak{F}_1^{(i)}.
\end{aligned}$$

Compte tenut des relations (1.4), (1.12), (2.7) et (4.7) il résulte que la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ vérifie les conditions

$$(4.11)\quad [\mathfrak{D}\Phi]_0 - [\mathfrak{D}\Phi]_i = p_i \text{ sur } \Gamma_i,$$

où

$$(4.12)\quad \begin{aligned}
\mathfrak{D} &= M n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + N\left(n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + L n_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\
p_i &= \Big\{(N_0 - N_i)\Big[A_1\Big(\nu_2 x_2 + \frac{\nu_3}{2}x_1\Big)x_1 - \tfrac{1}{2}B_1(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) + \\
&+ C_1\Big(\nu_2 x_2 + \frac{\nu_3}{2}x_1\Big) - \bar{u}_2 - \tau x_1\Big] + (M_0 - M_i)\Big[\tfrac{1}{2}A_1(\nu_1 x_1^2 - \\
&- \nu_2 x_2^2) + B_1\Big(\nu_1 x_1 + \frac{\nu_3}{2}x_2\Big)x_2 + C_1\Big(\nu_1 x_1 + \frac{\nu_3}{2}x_2\Big) - \bar{u}_1 + \tau x_2\Big]\Big\} n_1 + \\
&+ \Big\{(L_0 - L_i)\Big[A_1\Big(\nu_2 x_2 + \frac{\nu_3}{2}x_1\Big)x_1 - \tfrac{1}{2}B_1(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) + \\
&+ C_1\Big(\nu_2 x_2 + \frac{\nu_3}{2}x_1\Big) - \bar{u}_2 - \tau x_1\Big] + (N_0 - N_i)\Big[\tfrac{1}{2}A_1(\nu_1 x_1^2 - \nu_2 x_2^2) + \\
&+ B_1\Big(\nu_1 x_1 + \frac{\nu_3}{2}x_2\Big)x_2 + C_1\Big(\nu_1 x_1 + \frac{\nu_3}{2}x_2\Big) + \tau x_2 - \bar{u}_1\Big\} n_2, \\
&(i = 1,2,\ldots,m+1; \quad L_{m+1} = M_{m+1} = N_{m+1} = 0).
\end{aligned}$$

Soit $g(x_1, x_2)$ une solution particulière de l'équation (4.10). En faisant la substitution (2.18) il résulte que la fonction $\varphi(x_1, x_2)$ vérifie dans chaque domaine Σ_i l'équation

$$M_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2 N_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + L_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0, \tag{4.13}$$

et les conditions suivantes

$$[\mathfrak{D} \varphi]_0 - [\mathfrak{D} \varphi]_i = g_i \text{ sur } \Gamma_i, \tag{4.14}$$

où

$$g_i = [\mathfrak{D} g]_i - [\mathfrak{D} g]_0 + p_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1). \tag{4.15}$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la solution du problème (4.13), (4.14) est [3]

$$\sum_{i=1}^{m+1} \int_{\Gamma_i} g_i \, ds = 0. \tag{4.16}$$

Compte tenu de (4.8), (4.10), (4.12), (4.14) nous avons

$$\sum_{i=1}^{m+1} \int_{\Gamma_i} g_i \, ds = - \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \left(M_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2 N_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + L_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) d\sigma +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \{ L_i [\nu_2 (A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) - \bar{u}_{2,2}] + N_i [\nu_3 (A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) -$$

$$- \bar{u}_{1,2} - \bar{u}_{2,1}] + M_i [\nu_1 (A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) - \bar{u}_{1,1}] \} \, d\sigma = C_1 S_E - \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \mathfrak{F}_1^{(i)} d\sigma = 0.$$

Si on connaît la fonction $\Phi(x_1, x_2)$, on détermine la constante τ à l'aide de la relation (1.9). En vertu des équations (1.1), (1.4), (2.5) et (2.6), les conditions (1.6) sont satisfaites.

§ 5. Dans ce qui suit nous supposerons que toutes les constantes qui caractérisent les propriétés élastiques et thermiques des milieux qui composent la barre sont différentes.

Nous considérons trois problèmes de déformation élastique ($T = 0$) plane dont les déplacements et les tensions, $u_\alpha^{(k)}$ et $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$) vérifient les conditions

$$\begin{cases} [\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} n_\beta]_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_{m+1}, \\ [\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} n_\beta]_i = [\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} n_\beta]_0, \\ [u_\alpha^{(k)}]_i - [u_\alpha^{(k)}]_0 = g_{i\alpha}^{(k)} \text{ sur } \Gamma_i, \quad (i = 1, 2, \ldots m;\ k = 1, 2, 3;\ \alpha, \beta = 1, 2). \end{cases} \tag{5.1}$$

$$g_{i1}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[(\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(0)}) x_1^2 - (\nu_2^{(i)} - \nu_2^{(0)}) x_2^2 \right], \; g_{i2}^{(1)} = (\nu_2^{(i)} - \nu_2^{(0)}) x_1 x_2 + \frac{1}{2} (\nu_3^{(i)} - \nu_3^{(0)}) x_1^2,$$

$$g_{i1}^{(2)} = (\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(0)}) x_1 x_2 + \frac{1}{2} (\nu_3^{(i)} - \nu_3^{(0)}) x_2^2, \; g_{i2}^{(2)} = -\frac{1}{2} [(\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(0)}) x_1^2 - (\nu_2^{(i)} - \nu_2^{(0)}) x_2^2], \tag{5.2}$$

$$g_{i1}^{(3)} = (\nu_1^{(i)} - \nu_1^{(0)}) x_1 + \frac{1}{2} (\nu_3^{(i)} - \nu_3^{(0)}) x_2, \; g_{i2}^{(3)} = (\nu_2^{(i)} - \nu_2^{(0)}) x_2 + \frac{1}{2} (\nu_3^{(i)} - \nu_3^{(0)}) x_1.$$

Considérons les fonctions

$$u_1^{(0)} = a_1 \left[-\frac{x_3^3}{6} - \frac{x_3}{2} (\nu_1^{(i)} x_1^2 - \nu_2^{(i)} x_2^2) \right] + a_2 \left[-\frac{x_3^2}{2} - \frac{1}{2} (\nu_1^{(i)} x_1^2 - \nu_2^{(i)} x_2^2) \right] -$$

$$- b_1 \left(\nu_1^{(i)} x_1 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_2 \right) x_2 x_3 - b_2 \left(\nu_1^{(i)} x_1 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_2 \right) x_2 - c_1 \left(\nu_1^{(i)} x_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_2 \right) x_3 - c_2 \left(\nu_1^{(i)} x_1 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_2 \right) - \tau x_2 x_3 + \bar{u}_1 + x_3 \bar{u}_1,$$

$$u_2^{(0)} = -a_1 \left(\nu_2^{(i)} x_2 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_1 \right) x_1 x_3 - a_2 \left(\nu_2^{(i)} x_2 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_1 \right) x_1 + \tag{5.3}$$

$$+ b_1 \left[-\frac{x_3^3}{6} + \frac{x_3}{2} (\nu_1^{(i)} x_1^2 - \nu_2^{(i)} x_2^2) \right] + b_2 \left[-\frac{x_3^2}{2} + \frac{1}{2} (\nu_1^{(i)} x_1^2 - \nu_2^{(i)} x_2^2) \right] -$$

$$- c_1 \left(\nu_2^{(i)} x_2 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_1 \right) x_3 - c_2 \left(\nu_2^{(i)} x_2 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_1 \right) + \tau x_1 x_3 + \bar{u}_2 + x_3 \bar{u}_2,$$

$$u_3^{(0)} = \frac{1}{2} a_1 x_1 x_3^2 + a_2 x_1 x_3 + \frac{1}{2} b_1 x_2 x_3^2 + b_2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} c_1 x_3^2 + c_2 x_3 + \Phi(x_1, x_2)$$

définies sur le domaine Σ_i, où la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ et les constantes $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) et τ vont être déterminées.

Nous supposons que les déplacements ont la forme

$$\begin{cases} u_\alpha = u_\alpha^{(0)} + x_3 (a_1 u_\alpha^{(1)} + b_1 u_\alpha^{(2)} + c_1 u_\alpha^{(3)}) + a_2 u_\alpha^{(1)} + b_2 u_\alpha^{(2)} + c_2 u_\alpha^{(3)}, \; (\alpha = 1, 2), \\ u_3 = u_3^{(0)}, \end{cases} \tag{5.4}$$

Les déplacements (5.4) sont continus en passant par les lignes Γ_i ($i = 1, \ldots, m$). Les déformations qui correspondent aux déplacements (5.4) sont

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = -\nu_\alpha^{(i)} [x_3 (a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1) + a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2] + \varepsilon_{\alpha\alpha}^* +$$

$$+ x_3 (a_1 \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(1)} + b_1 \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(2)} + c_1 \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(3)}) + a_2 \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(1)} + b_2 \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(2)} + c_2 \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(3)}, \; (\alpha = 1, 2)$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{1}{2} \nu_3^{(i)} [x_3 (a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1) + a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2] + \varepsilon_{12}^* + \tag{5.5}$$

$$+ x_3 (a_1 \varepsilon_{12}^{(1)} + b_1 \varepsilon_{12}^{(2)} + c_1 \varepsilon_{12}^{(3)}) + a_2 \varepsilon_{12}^{(1)} + b_2 \varepsilon_{12}^{(2)} + c_2 \varepsilon_{12}^{(3)},$$

$$\varepsilon_{33} = x_3 (a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1) + a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 ,$$

$$2\varepsilon_{23} = - a_1 \left(\nu_2^{(i)} x_2 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_1 \right) x_1 + \frac{1}{2} b_1 (\nu_1^{(i)} x_1^2 - \nu_2^{(i)} x_2^2) -$$

$$- c_1 \left(\nu_2^{(i)} x_2 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_1 \right) + \tau x_1 + u_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + a_1 u_2^{(1)} + b_1 u_2^{(2)} + c_1 u_2^{(3)} , \tag{5.5}$$

$$2\varepsilon_{31} = - \frac{1}{2} a_1 (\nu_1^{(i)} x_1^2 - \nu_2^{(i)} x_2^2) - b_1 \left(\nu_1^{(i)} x_1 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_2 \right) x_2 -$$

$$- c_1 \left(\nu_1^{(i)} x_1 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_2 \right) - \tau x_2 + u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + a_1 u_1^{(1)} + b_1 u_1^{(2)} + c_1 u_1^{(3)} .$$

Les tensions sont

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^*_{\alpha\beta} + x_3 (a_1 \sigma^{(1)}_{\alpha\beta} + b_1 \sigma^{(2)}_{\alpha\beta} + c_1 \sigma^{(3)}_{\alpha\beta}) + a_2 \sigma^{(1)}_{\alpha\beta} + b_2 \sigma^{(2)}_{\alpha\beta} + c_2 \sigma^{(3)}_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{5.6}$$

où $\sigma^*_{\alpha\beta}$ ont les expressions (2.6), la fonction $\mathfrak{A}$ vérifiant l'équation (4.3), et

$$\sigma_{33} = E_i [x_3 (a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1) + a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2] + (a_1 x_3 + a_2) (\nu_1^{(i)} \sigma_{11}^{(1)} +$$

$$+ \nu_2^{(i)} \sigma_{22}^{(1)} + \nu_3^{(i)} \sigma_{12}^{(1)}) + (b_1 x_3 + b_2) (\nu_1^{(i)} \sigma_{11}^{(2)} + \nu_2^{(2)} \sigma_2^{(2)} + \nu_3^{(i)} \sigma_{12}^{(2)}) +$$

$$+ (c_1 x_3 + c_2) (\nu_1^{(i)} \sigma_{11}^{(3)} + \nu_2^{(i)} \sigma_{22}^{(3)} + \nu_3^{(i)} \sigma_{12}^{(3)}) + \nu_1^{(i)} \sigma^*_{11} + \nu_2^{(i)} \sigma^*_{22} + \nu_3^{(i)} \sigma^*_{12} - E_i \alpha_3^{(i)} T,$$

$$\sigma_{23} = L_i \Big[- a_1 \left(\nu_2^{(i)} x_2 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_1 \right) x_1 + \frac{1}{2} b_1 (\nu_1^{(i)} x_1^2 - \nu_2^{(i)} x_2^2) -$$

$$- c_1 \left(\nu_2^{(i)} x_2 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_1 \right) + \tau x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \bar{\bar{u}}_2 + a_1 u_1^{(1)} + b_1 u_1^{(2)} + c_1 u_1^{(3)} \Big] +$$

$$+ N_i \Big[- \frac{1}{2} a_1 (\nu_1^{(i)} x_1^2 - \nu_2^{(i)} x_2^2) - b_1 \left(\nu_1^{(i)} x_1 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_2 \right) x_2 - \tag{5.7}$$

$$- c_1 \left(\nu_1^{(i)} x_1 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_2 \right) - \tau x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \bar{\bar{u}}_1 + a_1 u_1^{(1)} + b_1 u_1^{(2)} + c_1 u_1^{(3)} \Big],$$

$$\sigma_{31} = N_i \Big[- a_1 \left(\nu_2^{(i)} x_2 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_1 \right) x_1 + \frac{1}{2} b_1 (\nu_1^{(i)} x_1^2 - \nu_2^{(i)} x_2^2) -$$

$$- c_1 \left(\nu_2^{(i)} x_2 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_1 \right) + \tau x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \bar{\bar{u}}_2 + a_1 u_2^{(1)} + b_1 u_2^{(2)} +$$

$$+ c_1 u_2^{(3)} \Big] + M_i \Big[- \frac{1}{2} a_1 (\nu_1^{(i)} x_1^2 - \nu_2^{(i)} x_2^2) - b_1 \left(\nu_1^{(i)} x_1 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_2 \right) x_2 -$$

$$- c_1 \left(\nu_1^{(i)} x_1 + \frac{1}{2} \nu_3^{(i)} x_2 \right) - \tau x_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \bar{\bar{u}}_1 + a_1 u_1^{(1)} + b_1 u_1^{(2)} + c_1 u_1^{(3)} \Big],$$

dans le domaine Σ_i.

En imposant les conditions (1.7) et (1.10) nous obtenons

$$c_\alpha = - a_\alpha d_1 - b_\alpha d_2 + \tau_{2-\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2) \tag{5.8}$$

où

$$d_\alpha = \frac{\sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} (E_i x_\alpha + \nu_1^{(i)} \sigma_{11}^{(\alpha)} + \nu_2^{(i)} \sigma_{22}^{(\alpha)} + \nu_3^{(i)} \sigma_{12}^{(\alpha)}) \, d\sigma}{\sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} (E_i + \nu_1^{(i)} \sigma_{11}^{(3)} + \nu_2^{(i)} \sigma_{22}^{(3)} + \nu_3^{(i)} \sigma_{12}^{(3)}) \, d\sigma}, \quad (\alpha = 1, 2)$$

$$\tau_\beta = \frac{\sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \left(E_i \alpha_3^{(i)} T_\beta - \nu_1^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\beta}{\partial x_2^2} - \nu_2^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\beta}{\partial x_1^2} + \nu_3^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\beta}{\partial x_1 \partial x_2} \right) d\sigma}{\sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} (E_i + \nu_1^{(i)} \sigma_{11}^{(3)} + \nu_2^{(i)} \sigma_{22}^{(3)} + \nu_3^{(i)} \sigma_{12}^{(3)}) \, d\sigma}, \quad (\beta = 0, 1). \tag{5.9}$$

Compte tenu de (5.8) nous avons

$$\sigma_{33} = x_3 (a_1 \mathfrak{K}_1^{(i)} + b_1 \mathfrak{K}_2^{(i)}) + a_2 \mathfrak{K}_1^{(i)} + b_2 \mathfrak{K}_2^{(i)} + x_3 \tau_1 \mathfrak{K}_3^{(i)} +$$

$$+ \tau_0 \mathfrak{K}_3^{(i)} + \nu_1^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_2^2} + \nu_2^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_1^2} - \nu_3^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x_1 \partial x_2} - E_i \alpha_3^{(i)} T, \tag{5.10}$$

où

$$\mathfrak{K}_\alpha^{(i)} = E_i x_\alpha + \nu_1^{(i)} \sigma_{11}^{(\alpha)} + \nu_2^{(i)} \sigma_{22}^{(\alpha)} + \nu_3^{(i)} \sigma_{12}^{(\alpha)} - d_\alpha \mathfrak{K}_3^{(i)}, \quad (\alpha = 1, 2)$$

$$\mathfrak{K}_3^{(i)} = E_i + \nu_1^{(i)} \sigma_{11}^{(3)} + \nu_2^{(i)} \sigma_{22}^{(3)} + \nu_3^{(i)} \sigma_{12}^{(3)}. \tag{5.11}$$

De (1.8), (1.11) et (5.10) nous obtenons

$$\begin{cases} \mathcal{J}^*_{12} a_\alpha + \mathcal{J}^*_{21} b_\alpha = m_1^{*(2-\alpha)} \\ \mathcal{J}^*_{12} a_\alpha + \mathcal{J}^*_{22} b_\alpha = m_2^{*(2-\alpha)}, \quad (\alpha = 1, 2), \end{cases} \tag{5.12}$$

où

$$\mathcal{J}^*_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Sigma_i} \mathfrak{K}_\alpha^{(i)} x_\beta \, d\sigma,$$

$$m_\beta^{*(\rho)} = - \sum_{i=1}^{m} \int_{\Sigma_i} x_\beta \left(\tau_\rho \mathfrak{K}_3^{(i)} + \nu_1^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\rho}{\partial x_2^2} + \nu_2^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\rho}{\partial x_1^2} - \nu_3^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\rho}{\partial x_1 \partial x_2} - E_i \alpha_3^{(i)} T \right) d\sigma, \tag{5.13}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2; \quad \rho = 0, 1).$$

Compte tenu de résultats établis en [2], [3], nous avons $\mathcal{J}^*_{12} = \mathcal{J}^*_{21}$ et $\mathcal{J}^*_{11} \mathcal{J}^*_{22} - \mathcal{J}^{*2}_{12} \neq 0$, de sorte qu'à l'aide de la relation (5.12) on peut déterminer les constantes $a_\alpha, b_\alpha (\alpha = 1, 2)$.

Moyennant la troisième équation d'équilibre, nous déduisons que la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ vérifie l'equation

$$M_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + 2N_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + L_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = - a_1 \mathfrak{K}_1^{(i)} - b_1 \mathfrak{K}_2^{(i)} - \tau_1 \mathfrak{K}_3^{(i)} -$$

$$(5.14) \quad - \nu_1^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_1}{\partial x_2^2} - \nu_2^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_1}{\partial x_1^2} + \nu_3^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_1}{\partial x_1 \partial x_2} + E_i \alpha_3^{(i)} T_1 + (L_i \nu_2^{(i)} + M_i \nu_1^{(i)} +$$

$$+ N_i \nu_3^{(i)})(a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1) - L_i (\bar{\bar{u}}_{2,2} + a_1 u_{2,2}^{(1)} + b_1 u_{2,2}^{(2)} + c_1 u_{2,2}^{(3)}) -$$

$$- N [\bar{\bar{u}}_{1,2} + \bar{\bar{u}}_{2,1} + a_1 (u_{1,2}^{(1)} + u_{2,1}^{(1)}) + b_1 (u_{1,2}^{(2)} + u_{2,1}^{(2)}) + c_1 (u_{1,2}^{(3)} + u_{2,1}^{(3)})] -$$

$$- M_i (\bar{\bar{u}}_{1,1} + a_1 u_{1,1}^{(1)} + b_1 u_{1,1}^{(2)} + c_1 u_{1,1}^{(3)}).$$

Soit $g(x_1, x_2)$ une solution particulière de l'équation (5.14). En faisant la substitution (2.18), de (1.4), (1.12) et (5.14) il résulte que la fonction $\varphi(x_1, x_2)$ verifie l'équation (4.13) et les conditions

$$(5.15) \qquad [\mathfrak{D}\varphi]_e - [\mathfrak{D}\varphi]_i = q_i \quad \text{sur } \Gamma_i,$$

où

$$q_i = [\mathfrak{D}g]_i - [\mathfrak{D}g]_e + \Big\{ \frac{1}{2} a_1 [(M_0 \nu_1^{(0)} - M_i \nu_1^{(i)}) x_1^2 -$$

$$- (M_0 \nu_2^{(0)} - M_i \nu_2^{(i)}) x_2^2] + b_1 [(M_0 \nu_1^{(0)} - M_i \nu_1^{(i)}) x_1 x_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (M_0 \nu_3^{(0)} - M_i \nu_3^{(i)}) x_2^2] + c_1 \Big[(M_0 \nu_1^{(0)} - M_i \nu_1^{(i)}) x_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} (M_0 \nu_3^{(0)} - M_i \nu_3^{(i)}) x_2 \Big] + (M_0 - M_i)(\tau x_2 - \bar{\bar{u}}_1 - a_1 u_1^{(1)} - b_1 u_1^{(2)} - c_1 u_1^{(3)}) +$$

$$(5.16) \quad + a_1 \Big[(N_0 \nu_2^{(0)} - N_i \nu_1^{(i)}) x_2 x_1 + \frac{1}{2} (N_0 \nu_3^{(0)} - N_i \nu_3^{(i)}) x_1^2 \Big] -$$

$$- \frac{1}{2} b_1 [(N_0 \nu_1^{(0)} - N_i \nu_1^{(i)}) x_1^2 - (N_0 \nu_2^{(0)} - N_i \nu_2^{(i)}) x_2^2] + c_1 [(N_0 \nu_2^{(0)} - N_i \nu_2^{(i)}) x_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (N_0 \nu_3^{(0)} - N_i \nu_3^{(i)}) x_1] - (N_0 - N_i)(\bar{\bar{u}}_2 + \tau x_1 + a_1 u_2^{(1)} + b_1 u_2^{(2)} + c_2 u_2^{(3)}) \Big\} n_1 +$$

$$+ \Big\{ a_1 \Big[(L_0 \nu_2^{(0)} - L_i \nu_2^{(i)}) x_1 x_2 + \frac{1}{2} (L_0 \nu_3^{(0)} - L_i \nu_3^{(i)}) x_1^2 \Big] - \frac{b_1}{2} [(L_0 \nu_1^{(0)} - L_i \nu_1^{(i)}) x_1^2 -$$

$$- (L_0 \nu_2^{(0)} - L_i \nu_2^{(i)}) x_2^2] + c_1 \Big[(L_0 \nu_2^{(0)} - L_i \nu_2^{(i)}) + \frac{1}{2} (L_0 \nu_3^{(0)} - L_i \nu_3^{(i)}) x_1 \Big] -$$

$$- (L_0 - L_i)(\bar{\bar{u}}_2 + \tau x_1 + a_1 u_2^{(1)} + b_1 u_2^{(2)} + c_1 u_2^{(3)}) + \frac{1}{2} a_1 [(N_0 \nu_1^{(0)} - N_i \nu_1^{(i)}) x_1^2 -$$

$$- (N_0 \nu_2^{(0)} - N_i \nu_2^{(i)}) x_2^2] + b_1 \Big[(N_0 \nu_1^{(0)} - N_i \nu_1^{(i)}) x_1 x_2 + \frac{1}{2} (N_0 \nu_3^{(0)} -$$

$$- N_i \nu_3^{(i)}) x_2^2 \Big] + c_1 \Big[(N_0 \nu_1^{(0)} - N_i \nu_1^{(i)}) x_1 + \frac{1}{2} (N_0 \nu_3^{(0)} - N_i \nu_3^{(i)}) x_2 \Big] +$$

$$+ (N_0 - N_i)(\tau x_2 - \bar{\bar{u}}_1 - a_1 u_1^{(1)} - b_1 u_1^{(2)} - c_1 u_1^{(3)}) \Big\} n_2,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m+1; \quad L_{m+1} = M_{m+1} = N_{m+1} = 0).$$

Dans ce cas, en tenant compte des relations (5.9), (5.11), (5.14) et (5.16), nous avons

$$\sum_{i=1}^{m+1} \int_{\Gamma_i} q_i \, ds = - \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \Big\{ M_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2N_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + L_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \Big) d\sigma +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \{ (L_i \nu_2^{(i)} + M_i \nu_1^{(i)} + N_i \nu_3^{(i)})(a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1) - L_i (\bar{\bar{u}}_{2,2} + a_1 u_{2,2}^{(1)} +$$

$$+ b_1 u_{2,2}^{(2)} + c_1 u_{2,2}^{(3)}) - M_i (\bar{\bar{u}}_{1,1} + a_1 u_{1,1}^{(1)} + b_1 u_{1,1}^{(2)} + c_1 u_{1,1}^{(3)}) - N_i [\bar{\bar{u}}_{1,2} + \bar{\bar{u}}_{2,1} +$$

$$+ a_1 (u_{1,2}^{(1)} + u_{2,1}^{(1)}) + b_1 (u_{1,2}^{(2)} + u_{2,1}^{(2)}) + c_1 (u_{1,2}^{(3)} + u_{2,1}^{(3)})] \} d\sigma =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \int_{\Sigma_i} \Big(a_1 \mathfrak{K}_1^{(i)} + b_1 \mathfrak{K}_2^{(i)} + \tau_1 \mathfrak{K}_3^{(i)} + \nu_1^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_1}{\partial x_2^2} + \nu_2^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_1}{\partial x_1^2} - \nu_3^{(i)} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_1}{\partial x_1 \partial x_2} -$$

$$- E_i \alpha_3^{(i)} T \Big) d\sigma = 0,$$

de sorte que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la solution est satisfaite. En connaissant la fonction $\Phi(x_1, x_2)$ on détermine la constante τ à l'aide de la relation (1.9). En vertu des relations (1.1), (1.4), (5.10), (5.12), les conditions (1.6) sont satisfaites.

§ 6. Dans ce qui suit nous allons étudier le cas où la barre est isotrope avec une non-homogénéité transversale continue. Nous supposons que le domaine Σ est simplement connexe. Nous supposons encore que le module de Young $E(x_1, x_2)$, et le coefficient de dilatation thermique linéaire, $\alpha(x_1, x_2)$, sont des fonctions de classe $C^1(\Sigma)$, le coefficient de Poisson ν, étant constant.

Nous choisissons le système de coordonnées $x_1 O x_2$ de manière à avoir (2.5). Soient $u_\beta^{(0)}$ et $u_\beta^{(1)}$ les déplacements des déformations planes thermoelastiques dues respectivement aux variations de témperature T_0 et T_1 [6]. Les tensions correspondantes, $\sigma_{\beta\gamma}^{(0)}$ et $\sigma_{\beta\gamma}^{(1)}$ vérifient donc (2.7).

Supposons que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_2^2}, \tag{6.1}$$

où

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_0(x_1, x_2) + x_3 \vartheta_1(x_1, x_2), \\ \sigma_{11}^{(\beta)} = \dfrac{\partial^2 \vartheta_\beta}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12}^{(\beta)} = -\dfrac{\partial^2 \vartheta_\beta}{x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22}^{(\beta)} = \dfrac{\partial^2 \vartheta_\beta}{\partial x_2^2}, \quad (\beta = 0, 1). \end{cases} \tag{6.2}$$

Nous cherchons à satisfaire les conditions du problème en considérant les déplacements sous la forme

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \left[-\frac{x_3^3}{6} - \frac{\nu x_3}{2}(x_1^2 - x_2^2) \right] + A_2 \left[-\frac{x_3^2}{2} - \frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2) \right] - \\ &\quad - B_1 \nu x_1 x_2 x_3 - B_2 \nu x_1 x_2 - C_1 \nu x_1 x_3 - C_2 \nu x_1 - \tau x_2 x_3 + u_1^{(0)} + x_3 u_1^{(1)}, \\ u_1 &= -A_1 \nu x_1 x_2 x_3 - A_2 \nu x_1 x_2 + B_1 \left[-\frac{x_3^3}{6} + \frac{x_3 \nu}{2}(x_1^2 - x_2^2) \right] + \\ &\quad + B_2 \left[-\frac{x_3^2}{2} + \frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2) \right] - C_1 \nu x_2 x_3 - C_2 \nu x_2 + \tau x_1 x_3 + u_2^{(0)} + x_3 u_2^{(1)}, \\ u_3 &= \frac{1}{2} A_1 x_1 x_3^2 + A_2 x_1 x_3 + \frac{1}{2} B_1 x_2 x_3^2 + B_2 x_2 x_3 + \frac{1}{2} C_1 x_3^2 + \\ &\quad + C_2 x_3 + \Phi(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{6.3}$$

La fonction $\Phi(x_1, x_2)$ et les constantes A_ρ, B_ρ, C_ρ $(\rho = 1, 2)$ et τ vont être déterminées.

Les déformations correspondantes sont

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\gamma\rho} &= -\nu [x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2] \delta_{\gamma\rho} + \varepsilon_{\gamma\rho}^*, \\ &\qquad (\gamma, \rho = 1, 2), \\ \varepsilon_{33} &= x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2, \\ 2\varepsilon_{23} &= -A_1 \nu x_1 x_3 + \frac{1}{2} B_1 \nu (x_1^2 - x_2^2) - C_1 \nu x_2 - \tau x_1 + u_2^{(1)} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\ 2\varepsilon_{31} &= -\frac{1}{2} A_1 \nu (x_1^2 - x_2^2) - B_1 \nu x_1 x_2 - C_1 \nu x_1 - \tau x_2 + u_1^{(1)} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Moyennant les équations constitutives, compte tenu de (6.4) nous obtenons

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= E[x_3(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) + A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2] + \nu \Delta \vartheta - E \alpha T, \\ \sigma_{23} &= \frac{E}{1+\nu} \left| -A_1 \nu x_1 x_2 + \frac{\nu}{2} B_1 (x_1^2 - x_2^2) - C_1 \nu x_2 + \tau x_1 + u_2^{(1)} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right|, \\ \sigma_{31} &= \frac{E}{1+\nu} \left| -B_1 \nu x_1 x_2 - \frac{\nu}{2} A_1 (x_1^2 - x_2^2) - C_1 \nu x_1 - \tau x_2 + u_1^{(1)} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right|, \end{aligned} \tag{6.5}$$

Si nous imposons les conditions (1.7), (1.8), (1.10) et (1.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} A_\rho &= \frac{1}{I_E^{(22)}} \int_\Sigma x_1 (E \alpha T_{2-\rho} - \nu \Delta \vartheta_{2-\rho}) \, d\sigma, \\ B_\rho &= \frac{1}{I_E^{(11)}} \int_\Sigma x_2 (E \alpha T_{2-\rho} - \nu \Delta \vartheta_{2-\rho}) \, d\sigma, \\ C_\rho &= \frac{1}{S_E} \int_\Sigma (E \alpha T_{2-\rho} - \nu \Delta \vartheta_{2-\rho}) \, d\sigma, \quad (\rho = 1, 2). \end{aligned} \tag{6.6}$$

De (1.1), nous avons

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = -E(A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1) - \nu \Delta \vartheta_1 + E \alpha T_1. \tag{6.7}$$

En introduisant les notations

$$\sigma^* = \sigma_{23} + i \sigma_{31}, \quad a = A_1 + i B_2, \quad 2\Omega = u_{1,2}^{(1)} - u_{2,1}^{(1)}, \quad z = x_1 + i x_2, \tag{6.8}$$

de (6.5) et (6.7), nous trouvons que la dérivée aréolaire de la fonction σ^* a l'expression

$$\sigma_{\bar z}^* = (\ln \sqrt{E})_{\bar z} \sigma^* + (\ln \sqrt{E})_z \bar\sigma^* + f(z), \tag{6.9}$$

où

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{i}{2} \left[E \alpha T_1 - 4\nu (\vartheta_1)_{z\bar z} + \frac{2iE}{1+\nu} \Omega \right] - \\ &\quad - \frac{iE}{4} \left(\frac{1+3\nu}{1+\nu} a \bar z + \frac{1-\nu}{1+\nu} \bar a z \right) + E \left(\frac{\tau}{1+\nu} - \frac{i}{2} C_1 \right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

En notant $\sigma^* = \sqrt{E} w$, $f = \sqrt{E} F$, l'équation (6.9) se réduit à la forme normale [9]

$$w_z = (\ln \sqrt{E})_z \bar{w} + F(z), \tag{6.11}$$

De (1.4) il résulte que la fonction w vérifie la condition à la frontière

$$\Re_e [t'(s) w(t)] = 0, \qquad t \in \Gamma. \tag{6.12}$$

Nous avons obtenu pour la fonction $w(z)$, un problème de Riemann-Hilbert généralisé, comme dans [8].

Pour étudier ce problème aux limites nous allons employer la méthode de I. N. Vekua [9]. Moyennant la relation (6.11) nous obtenons l'équation intégrale

$$w(z) + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \frac{(\ln \sqrt{E})_t w(t)}{t - z} d\sigma = \Phi^*(z) - \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \frac{F(t) d\sigma}{t - z}, \tag{6.13}$$

où $\Phi^*(z)$ est une fonction holomorphe sur Σ et continue en $\bar{\Sigma}$, déterminée par l'intégrale de type Cauchy

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - z} dt. \tag{6.14}$$

En employant la méthode des approximations succesives et les notations de [9], nous obtenons

$$w(z) = \Phi^*(z) + \int_{\Sigma} \Gamma_1(z, t) \Phi^*(t) d\sigma + \int_{\Sigma} \Gamma_2(z, t) \Phi^*(t) d\sigma - \tag{6.15}$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \Omega_1(z, t) F(t) d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} \Omega_2(z, t) \bar{F}(z) d\sigma,$$

où $\Gamma_\rho(z, t)$ sont les résolvantes de l'équation (6.13) et $\Omega_\rho(z, t)$ sont les noyaux de l'équation (6.11) qui correspondent au domaine Σ.

La fonction $\Phi^*(z)$ peut être mise sous la forme

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu(t) dt}{t - z} + iC, \tag{6.16}$$

où $\mu(t)$ est une fonction réelle du point $t \in \Gamma$ et C une constante réelle, uniquement déterminée, le domaine Σ étant simplement connexe.

De (6.16), (6.15) et (6.12) nous obtenons [9] [10] l'équation intégrale singulière suivante

$$- n_2(t_0) \mu(t_0) + \int_{\Gamma} K(t_0, t) \mu(t) ds = C h_1(t_0) + h_2(t_0). \tag{6.17}$$

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (6.11), (6.12) est identiquement satisfaite, vu que (6.12) est homogène et que Σ est simplement connexe.

Il en résulte l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale singulière (6.17).

BIBLIOGRAPHIE

1. Башелейшвили М. О. *Об основных плоских граничных задачах для неоднородных анизотропных упругих тел.*, Труды Тбилисского университета. т. 117, (1966), p. 279.
2. Borş C. I. — *Torsiunea, întinderea şi încovoierea barelor ortotrope alcătuite din mai multe materiale.* St. şi cerc (Matematică) Acad. R.P.R. Filiala Iaşi, T. VII (1956), p. 33.
3. Borş C. I. — *Torsiunea, întinderea şi încovoierea barelor cilindrice alcătuite din mai multe materiale anizotrope.* St. şi cerc. Şt. (Matematică) Acad. R.P.R. Filiala Iaşi, T. (1957), p. 163.
4. Ieşan D. — *Tensiuni termice în bare ortotrope.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I a t. XII, 1967, f. 2 p.
5. Milne-Thomson L, M. — *Antiplane elastic systems*, Berlin-Göttingen-Heidelberg. 1962.
6. Мишику М., Теодосиу Кр. — *Решение при помощи теорий функций комплексного переменного статической плоской задачи теорий упругости для неоднородных изотропных тел.* ПММ т. 30, (1964), p. 379.
7. Мусхелишвили Н. И. — *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Москва, 1966.
8. Radu A. — *Problema lui Saint-Venant pentru bare neomogene*, An şt. Univ. Iaşi, s. I a T. XII, (1966), p. 4'5.
9. Векуа И. Н. — *Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек.* Математический сборник, т. 31 (73), (1952), p. 217.
10. Vekua I. N. — *Generalized analytic functions*, Oxford, 1962.

TENSIUNI TERMICE ÎN BARE ELASTICE NEOMOGENE

Rezumat

Se studiază problema tensiunilor termice în bare elastice neomogene în cazul cînd temperatura variază liniar în lungul barei. Se consideră cazul barelor compuse din diferite materiale ortotrope (§ 2, § 3) şi din diferite materiale cu un plan de simetrie elastică (§ 4, § 5). In § 6 este tratat cazul unei bare izotrope cu neomogenitate continuă transversală.