SUR LES FONCTIONS LEXICOGRAPHIQUES MONOTONES CROISSANTES ET LEURS APPLICATIONS À LA RÉSOLUTION DES PROGRAMMES LINÉAIRES EN VARIABLES BINAIRES

PAR

IRINEL DRAGAN

Soit B_n l'ensemble des vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$, dans lesquels $x_i \in \{0,1\}$, $(i = 1, \ldots, n)$; soit le sous-ensemble $V = \{x \mid x \in B_n, f_h(x) \geq b_h, (h = 1, \ldots, p)\}$, déterminé par les fonctions linéaires homogènes à coefficients entiers $f_h(x)$ et les nombres entiers $b_h, (h = 1, \ldots, p)$. Nous développerons un algorithme pour la résolution du **problème (A)**: trouver $\tilde{x} \in B_n$, tel que $f_0(\tilde{x}) = \inf_{x \in V} f_0(x)$, où $f_0(x)$ est une fonction linéaire homogène à coefficients entiers.

§1. Quelques définitions et propriétés préliminaires

Soit la fonction $n(x) = 2^{n-1} x_1 + 2^{n-2} x_2 + \ldots + 2^0 x_n$, définie sur l'ensemble B_n. Supposons que l'ensemble B_n est ordonné à l'aide de la fonction $n(x)$ de la manière suivante: $x < y \leftrightarrows n(x) \leq n(y)$. Cette relation d'ordre sera appelée l'ordre lexicographique de l'ensemble B_n. La dénomination est justifiée par la proposition suivante: x précédera y, si et seulement si, on peut trouver un indice i, tel que $x_1 = y_1, \ldots, x_{i-1} = y_{i-1}, x_i \neq y_i$ entraînent $x_i < y_i, (x_i = 0, y_i = 1)$.

La fonction $f(x)$ définie sur l'ensemble B_n, sera appelée lexicographique monotone croissante (brièvement l.m.n.), si $x < y \rightarrow f(x) \leq f(y)$. On établit facilement les propositions suivantes:

(a) Soit $f_k(x)$ des fonctions l.m.n., définies sur l'ensemble B_n et h_k des nombres réels non-négatifs, $(k \in K)$; alors, la fonction $h(x) = \sum_k h_k f_k(x)$ sera une fonction l.m.n.

(b) Soit $f(x)$ une fonction l.m.n., définie sur l'ensemble B_n et m le premier élément de l'ensemble V; alors, on a: $\inf_{x \in V} f(x) = f(m)$.

(c) Soit $f(x)$ et $g(x)$ des fonctions l.m.n., définies sur l'ensemble B_n; alors, $y < z < \bar{y} \to f(z) - g(z) \leq f(y) - g(y)$.

Arrêtons nous à certaines propriétés des fonctions linéaires homogènes. On peut établir les propositions suivantes:

(d) Soit $f(x) = \sum_i a_i x_i$, une fonction linéaire homogène, et les nombres $v_j = a_j - \sum_{k>j} a_k$, $v_n = a_n$, $(j = 1, \ldots, n-1)$; alors, la fonction $f(x)$ sera une fonction l.m.n., si et seulement si, les nombres v_i $(i = 1, \ldots, n)$ sont des nombres non-négatifs.

(e) Soit $f(x) = \sum_i a_i x_i$, une fonction linéaire homogène, puis les nombres $v_j = a_j - \sum_{k>j} a_k$, $v_n = a_n$, $(j = 1, \ldots, n-1)$, et les fonctions $F_1(x) = x_1$, $F_2(x) = 2^0 x_1 + x_2, \ldots, F_n(x) = 2^{n-2} x_1 + 2^{n-3} x_2 + \ldots + 2^0 x_{n-1} + x_n$; alors, la fonction $f(x)$ peut être représentée sous la forme $f(x) = L(x) - M(x)$, où $L(x) = \sum_{i: v_i \geq 0} v_i F_i(x)$, $M(x) = -\sum_{i: v_i < 0} v_i F_i(x)$; les fonctions $L(x)$ et $M(x)$ sont des fonctions lineaires homogènes l.m.n.

La proposition (d) offre un moyen pour établir si une fonction linéaire homogène donnée possède ou non la propriété de monotonie lexicographique croissante; la proposition (e) offre un moyen pour trouver deux fonctions linéaires homogènes l.m.n., dont la différence soit égale à une fonction linéaire homogène donnée.

Les propositions (a) — (e) permettront la construction d'un algorithme pour la résolution du problème (A); à l'aide des propositions (d) et (e) seront justifiées certaines opérations préliminaires sur le problème (A); après ces opérations le problème (A) sera ramené à un problème plus simple. Les propositions (a), (b) et (c) justifieront les opérations demandées par l'algorithme pendant la résolution du nouveau problème.

§2. Certaines opérations préliminaires de l'algorithme

Considérons le problème (A) enoncé dans le paragraphe précédent; soit $\tilde{x} \in B_n$ la solution inconnue du problème (A).

Théorème 1: *Si $f_0(x)$ est une fonction l.m.n. et m est le premier élément de l'ensemble V, la solution du problème* (A) *sera $\tilde{x} = m$.*

Evidemment, c'est une conséquence de la proposition (b).

Soit le **problème** (B): *trouver le premier élément de l'ensemble V.* Le théorème 1 justifie l'opération préliminaire (α): calculer les nombres v_i^0, $(i = 1, \ldots, n)$, correspondants à la fonction $f_0(x)$ et établir si ces nombres sont non-négatifs. Dans le cas $v_i^0 \geq 0$, $(i = 1, \ldots, n)$, selon la proposition (d), la fonction $f_0(x)$ sera une fonction l.m.n.; alors, d'après le théorème 1, il faudra résoudre le problème (B). On passera à l'opération préliminaire (γ). Dans le cas où il existe un indice i tel que $v_i^0 < 0$, il faudra passer à l'opération préliminaire (β).

Théorème 2: Soit $\xi = \inf_{x \in B_n} f_0(x)$, $\eta = \sup_{x \in B_n} f_0(x)$, *puis r le nombre entier déterminé par l'inégalité $2^r \leq \eta < 2^{r+1}$, et la fonction $F(z) = 2^r z_1 + 2^{r-1} z_2 + \ldots + 2 z_r + 2^0 z_{r+1}$,* où z_k *sont des nouvelles variables binaires, $k = 1, \ldots, r+1$; alors, si $\xi = 0$ et (z', x') est le premier élément de l'ensemble $V' = \{(z, x) \mid x \in V, F(z) - f_0(x) \geq 0, f_0(x) - F(z) \geq 0, z_k \in \{0, 1\}, (k = 1, \ldots, r+1)\}$ la solution du problème* (A) *sera $\tilde{x} = x'$.*

Soit le **problème** (B'): *trouver le premier élément de l'ensemble V'.* Le théorème 2 justifie l'opération préliminaire (β): calculer les nombres ξ, η, r. Dans le cas où $\xi = 0$, selon le théorème 2, il faudra passer à la résolution du problème (B'). Dans le cas où $\xi < 0$, il faudra appliquer également l'opération (β) mais après le changement préalable de la fonction $f_0(x)$ en $f_0(x) - \xi$; puis on passera de même à la résolution du problème (B') correspondant.

Il est bien claire que les ensembles V et V' sont des ensembles déterminés par des systèmes d'inéquations linéaires en variables binaires. Donc, les problèmes (B) et (B') sont des problèmes de la même forme. Par conséquent, en ce qui suit il suffit à donner seulement l'algorithme formulé pour la résolution du problème (B). Supposons donc, qu'il faudra résoudre le problème (B); alors, avant l'application de l'algorithme, on applique l'opération préliminaire (γ): calculer, pour chaque fonction $f_h(x)$, $(h = 1, \ldots, p)$, les nombres v_i^h, $(i = 1, \ldots, n)$, et les fonctions $L_h(x)$ et $M_h(x)$ correspondantes, définies par la proposition (e).

Maintenant, la résolution du problème (A) est ramenée à la résolution du **problème (C)**: *trouver le premier élément de l'ensemble $W = \{x \mid x \in B_n, L_h(x) - M_h(x) \geq b_h, (h = 1, \ldots, p)\}$,* où $L_h(x)$ et $M_h(x)$ sont des fonctions linéaires homogènes l.m.n. à coefficients entiers et b_h sont des nombres entiers.

§3. La résolution d'un problème auxiliaire

Soit l'ensemble $W_h = \{x \mid x \in B_n, L_h(x) - M_h(x) < b_h\}$, déterminé par une certaine inéquation du système qui détermine l'ensemble W. Soit $y \in B_n$ un élément de l'ensemble W_h et l'ensemble $W_h(y) = \{x \mid x \in B_n, L_h(x) < b_h + M_h(y)\}$, déterminé par cet élément. L'ensemble $W_h(y)$ n'est pas vide, car $x < y, y \in W_h \to x \in W_h(y)$; il possède aussi un dernier élément $\bar{y}$, $(y < \bar{y})$, car l'ensemble B_n est fini. Arrêtons nous à la résolution du **problème $P_h(y)$**: trouver le dernier élément de l'ensemble $W_h(y)$.

Le procédé qui permet la résolution du problème $P_h(y)$ détermine successivement les composantes $y_1, \ldots, y_n$, du vecteur y. Supposons que, pour un certain indice i, $(0 \leq i < n)$, il faut déterminer la composante y_{i+1},

en connaissant, dans le cas $i > 0$, les composantes $\bar{y}_1, \dots \bar{y}_i$. Posons: $x^{(i+1)} = (x_{i+1}, \dots, x_n)$, $B_n^{i+1} = \{x^{(i+1)} | (x_k), x_k \in \{0,1\}, (k = i+1, \dots, n)\}$, $b_h^1 = b_h + M_h(y)$ $b_h^{i+1} = b_h^1 - a_{h1} y_1 - \dots - a_{hi} y_i$, $(i > 0)$, $L_h^1(x^{(1)}) = L_h(x)$, $L_h^{i+1}(x^{(i+1)}) = a_{h,i+1} x_{i+1} + \dots + a_{h,n} x_n$, $(i > 0)$. Le procédé annoncé est fondé sur les théorèmes suivants:

Théorème 3: *Si* $(\bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n)$, $(0 < i < n)$, *est le dernier élément de l'ensemble* $W_h^{i+1}(y) = \{x^{(i+1)} | x^{(i+1)} \in B_n^{i+1}, L_h^{i+1}(x^{(i+1)}) < b_h^{i+1}\}$, *alors, le vecteur* $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n)$ *sera le dernier élément de l'ensemble* $W_h(y)$.

Théorème 4. *Si* $(\bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n)$, $(0 \leq i < n)$, *est le dernier élément de l'ensemble* $W_h^{i+1}(y)$, *alors, seront vraies les implications:* $b_h^{i+1} \leqq a_{h,i+1} \to \bar{x}_{i+1} = 0$ et $b_h^{i+1} > a_{h,i+1} \to \bar{x}_{i+1} = 1$.

Donc, pour déterminer la composante $\bar{y}_{i+1}$, il faudra établir l'une des inégalités $b_h^{i+1} \leqq a_{h,i+1}$ ou $b_h^{i+1} \leq a_{h,i+1}$; le théorème 4 indiquera la valeur correspondante du nombre $\bar{y}_{i+1}$. Après cette opération, si $i+1 < n$, on déterminera le nombre positif $b_h^{i+2} = b_h^{i+1} - a_{h,i+1} \bar{y}_{i+1}$, qui sera utilisé pour trouver la composante suivante, et ainsi de suite. Le théorème 3 montre que le vecteur déterminé par cette voie représentera la solution du problème $P_h(y)$.

La solution du problème $P_h(y)$ possède la propriété exprimée par le théorème suivant:

Théorème 5: *Si* $\bar{y}$ *est le dernier élément de l'ensemble* $W_h(y)$, *alors,* $y < z < \bar{y}$ *entraînera* $z \notin W$.

C'est une conséquence de la proposition (c). Evidemment, dans le cas où $\bar{y} \neq (1, \dots, 1)$, le théorème 5 ne donne aucune indication sur l'appartenance à l'ensemble W des successeurs du vecteur $\bar{y}$.

§ 4. L'itération de l'algorithme

Le vecteur $y \in B_n$ sera appelé un vecteur de départ pour une itération de l'algorithme, si, ou bien $y = (0, \dots, 0)$, ou bien $x < y$, $x \neq y \to x \notin W$.

L'idée centrale de l'algorithme, dans une certaine mesure pareille à l'idée centrale de l'algorithme de Lawler-Bell, (voir [1]), peut être décrite de la manière suivante: une itération k de l'algorithme possède un vecteur de départ connu x^k; si $x^k \in W$ la solution du problème (C) sera $\tilde{x} = x^k$, mais, si $x^k \notin W$, par la résolution d'un problème auxiliaire $P_h(x^k)$, avec un certain h, ou bien on obtiendra la conclusion $W = \emptyset$, ou bien on obtiendra un nouveau vecteur de départ x^{k+1}, $(x^{k+1} > x^k$, $x^{k+1} \neq x^k)$, utilisé dans l'itération suivante.

Soit le vecteur de départ x^k et le nombre entier h, $(1 \leqslant h \leqslant p)$, alors, l'itération k contient les opérations suivantes;

(α_k) établir l'une des alternatives (α_k^1) $x^k \in W_h$, ou (α_k^2) $x^k \notin W_h$; dans le premier cas on passe à l'opération (β_k), dans le second cas on passe à l'opération (δ_k);

(β_k) déterminer le dernier élément $\bar{x}^k$ de l'ensemble $W_h(x^k)$ et passer à l'opération suivante;

(γ_k) établir l'une des alternatives (γ_k^1) $\bar{x}^k = (1, \dots, 1)$, ou (γ_k^2) $\bar{x}^k \neq (1, \dots, 1)$; dans le premier cas le problème (C) est résolu, car $W = \emptyset$, dans le second cas le vecteur $x^{k+1} = x^k + e_n$ sera un nouveau vecteur de départ et on passera à l'itération $k+1$, avec le vecteur de départ x^{k+1}, en prenant le même h;

(δ_k) établir l'une des alternatives: (δ_k^1) il n'y a pas encore p itérations successives commencées avec le vecteur de départ x^k, ou: (δ_k^2) les vecteurs de départ des $p-1$ itérations précédentes coïncident avec x^k; dans le premier cas on passera à l'itération $k+1$, avec le vecteur de départ $x^{k+1} = x^k$, en prenant au lieu de h, soit le nombre $h+1$, si $h < p$, soit le nombre 1, si $h = p$; dans le second cas le problème (C) est résolu, car $\tilde{x} = x^k$.

Donc, pendant l'itération k on peut rencontrer l'une des alternatives: (1) (α_k^1), (γ_k^1); (2) (α_k^1), (γ_k^2); (3) (α_k^2), (δ_k^1); (4) (α_k^2), (δ_k^2). Les décisions prises dans les cas (1) et (2) sont justifiées par le théorème 5; tous les vecteurs $z < \bar{x}^k$ n'appartiennent pas à l'ensemble W. En ce qui concerne l'alternative (4), il est bien claire que si $x^k \notin W_h$ et les $p-1$ itérations précédentes ont eu le vecteur de départ x^k, le vecteur x^k appartiendra à l'ensemble W. En effet, pendant ces $p-1$ itérations nous n'avons pas pu rencontrer la situation $x^k \in W_{h'}$, pour un certain h', car dans ce cas nous aurions étés conduits, soit à la conclusion $W = \emptyset$, soit à l'obtention d'un nouveau vecteur de départ. Donc, dans le cas (4) on a $x^k \notin W_h$, $(h = 1, \dots, p)$ c'est-à-dire $x^k \in W$. L'alternative (3) montre que le vecteur de départ x^k satisfait à toutes les inéquations considérées pendant les itérations commencées avec le vecteur de départ x^k; mais, le nombre de ces itérations est plus petit que p, donc il faudra continuer les itérations, avec des itérations relatives aux autres inéquations du système qui détermine l'ensemble W.

Théorème 6: *L'algorithme conduit, après un nombre fini d'itérations, ou bien à la solution du problème* (C), *ou bien à la conclusion qu'elle n'existe pas.*

En effet, l'alternative (3) sera rencontrée au plus pendant $p-1$ itérations successives; donc, si le problème (C) n'est pas résolu, après au plus $p-1$ itérations successives commencées avec le même vecteur de départ on rencontrera la situation (2). Alors, après au plus p itérations successives, ou bien le problème (C) est résolu, ou bien on obtiendra un vecteur de départ plus éloigné que le vecteur de départ avec lequel on a commencé ce groupe de p itérations. Mais, le nombre des vecteurs de départ distincts est fini, car l'ensemble B_n est fini; donc, après un nombre fini d'itérations, le problème (C) sera résolu.

Quoique nous avons résolu plusieurs exemples numériques, à l'aide de l'algorithme proposé, nous n'avons pas obtenu des résultats théoriques

ou au moins statistiques sur l'efficacité de l'algorithme. On peut dire seulement que l'efficacité depend de l'ordre des variables et des inéquations du problème (C).*)

BIBLIOGRAPHIE

1. Lawler E. L., Bell M. D. — *A Method for Solving Discrete Optimization Problems*, Op. Res., T. 14, 6, 1966 p. 1098—1112.

ASUPRA FUNCŢIILOR LEXICOGRAFIC MONOTON CRESCĂTOARE ŞI APLICAŢIILOR LOR LA REZOLVAREA PROGRAMELOR LINIARE CU VARIABILE BINARE

Rezumat

Se formulează un algoritm pentru rezolvarea programelor liniare cu variabile binare; algoritmul se bazează pe noţiunea de funcţie lexicografic monoton crescătoare şi foloseşte unele proprietăţi ale acestei clase de funcţii

*) Note présentée au XII-ème Colloque international organisé par Technische Hochschule Ilmenau D. D. R. (11—15 sept. 1967).

UNE MÉTHODE POUR LA RÉSOLUTION DES PROGRAMMES NON-LINÉAIRES

PAR

M. GHERMANOV (Sofia)

Soit K_n l'ensemble des fonctions convexes, définies sur l'espace euclidien E_n, et qui possèdent des dérivées partielles du premier ordre. Nous considérerons le problème (P): trouver le minimum de la fonction $f(x)$, sur l'ensemble D, convexe, borné et fermé, déterminé par les inéquations $f_k(x) \leqq 0$, $(k = 1, \dots, m)$, où $f(x) \in K_n$, $f_k(x) \in K_n$, $(k = 1, \dots, m)$. Par suite des hypothèses, il existe un point $x^+ \in D$, tel que $f(x^+) = \min\limits_{x \in D} f(x)$.

Soit l'ensemble, déterminé par un point $x_0 \in D$, et défini par

$$F_0 = \{ x \mid x \in E_n,\ f(x) \leqq f(x_0) \}; \tag{1}$$

il est un ensemble convexe. L'ensemble $D_0 = D \cap F_0$ est aussi un ensemble convexe et fermé. Si d_0 est un nombre positif convenable, il déterminera l'ensemble convexe

$$F_1 = \{ x \mid x \in E_n,\ f(x) \leqq f(x_0) - d_0 \}; \tag{2}$$

nous avons $F_1 \subset F_0$, ce qui entraîne $D_1 \subset D_0$, où $D_1 = D \cap F_1$.

Supposons que nous avons construit la suite des vecteurs distincts $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}$, qui possède la propriété

$$f(x_0) > f(x_1) > \dots > f(x_{i-1}); \tag{3}$$

nous avons construit de même, à l'aide de certains nombres positifs convenables d_{k-1}, $(k = 1, \dots, i)$, la suite des ensembles

$$F_k = \{ x \mid x \in E_n,\ f(x) \leqq f(x_{k-1}) - d_{k-1} \},\ (k = 1, 2, \dots, i) \tag{4}$$