ou au moins statistiques sur l'efficacité de l'algorithme. On peut dire seulement que l'efficacité depend de l'ordre des variables et des inéquations du problème (C).*)

BIBLIOGRAPHIE

1. Lawler E. L., Bell M. D. — *A Method for Solving Discrete Optimization Problems*, Op. Res., T. 14, 6, 1966 p. 1098—1112.

ASUPRA FUNCŢIILOR LEXICOGRAFIC MONOTON CRESCĂTOARE ŞI APLICAŢIILOR LOR LA REZOLVAREA PROGRAMELOR LINIARE CU VARIABILE BINARE

Rezumat

Se formulează un algoritm pentru rezolvarea programelor liniare cu variabile binare; algoritmul se bazează pe noţiunea de funcţie lexicografic monoton crescătoare şi foloseşte unele proprietăţi ale acestei clase de funcţii

*) Note présentée au XII-ème Colloque international organisé par Technische Hochschule Ilmenau D. D. R. (11—15 sept. 1967).

UNE MÉTHODE POUR LA RÉSOLUTION DES PROGRAMMES NON-LINÉAIRES

PAR

M. GHERMANOV (Sofia)

Soit K_n l'ensemble des fonctions convexes, définies sur l'espace euclidien E_n, et qui possèdent des dérivées partielles du premier ordre. Nous considérerons le problème (P): trouver le minimum de la fonction $f(x)$, sur l'ensemble D, convexe, borné et fermé, déterminé par les inéquations $f_k(x) \leqq 0$, $(k = 1, \dots, m)$, où $f(x) \in K_n$, $f_k(x) \in K_n$, $(k = 1, \dots, m)$. Par suite des hypothèses, il existe un point $x^+ \in D$, tel que $f(x^+) = \min_{x \in D} f(x)$.

Soit l'ensemble, déterminé par un point $x_0 \in D$, et défini par

$$F_0 = \{ x \mid x \in E_n,\ f(x) \leqq f(x_0) \}; \tag{1}$$

il est un ensemble convexe. L'ensemble $D_0 = D \cap F_0$ est aussi un ensemble convexe et fermé. Si d_0 est un nombre positif convenable, il déterminera l'ensemble convexe

$$F_1 = \{ x \mid x \in E_n,\ f(x) \leqq f(x_0) - d_0 \}; \tag{2}$$

nous avons $F_1 \subset F_0$, ce qui entraîne $D_1 \subset D_0$, où $D_1 = D \cap F_1$.

Supposons que nous avons construit la suite des vecteurs distincts $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}$, qui possède la propriété

$$f(x_0) > f(x_1) > \dots > f(x_{i-1}); \tag{3}$$

nous avons construit de même, à l'aide de certains nombres positifs convenables d_{k-1}, $(k = 1, \dots, i)$, la suite des ensembles

$$F_k = \{ x \mid x \in E_n,\ f(x) \leqq f(x_{k-1}) - d_{k-1} \},\ (k = 1, 2, \dots, i) \tag{4}$$

qui possède la propriété $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_i$; soient $D_k = D \cap F_k$ les ensembles, qui possèdent la propriété $D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_i$. Les vecteurs x_k ont été pris dans les ensembles D_k, mais il est bien clair que si $x_k \in D_k$ et $k < i$ nous aurons $x_k \in D_h$, $(k < h \leqq i)$.

Supposons que $D_i \neq \emptyset$: alors, soit $x_i \in D_i$ et un nombre positif d_i. Soit l'ensemble

$$F_{i+1} = \{ x \mid x \in E_n,\ f(x) \leqq f(x_i) - d_i \}; \tag{5}$$

évidemment, nous avons les implications

$$\begin{aligned} x_i \in F_i &\rightarrow f(x_i) < f(x_{i-1}), \\ x \in F_{i+1} &\rightarrow f(x) \leqq f(x_i) - d_i, \end{aligned} \tag{6}$$

qui donnent ensemble $x \in F_{i+1} \rightarrow x \in F_i$, car $d_i > 0$; c'est-à-dire $F_{i+1} \subset F_i$. Mais, $x_i \notin F_{i+1}$, donc $F_{i+1} \neq F_i$; il en résulte $D_{i+1} \subset D_i$, $D_{i+1} \neq D_i$, où $D_{i+1} = D \cap F_{i+1}$. Maintenant, si $D_{i+1} \neq \emptyset$, nous pourrons recommencer le procédé.

Par conséquent, on peut construire de cette manière une suite de vecteurs distincts, $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots$, et les ensembles non-vides $D_0 \supset D_1 \supset \dots \supset D_i \supset \dots$, avec $x_i \in D_i$; les suites construites peuvent être, en même temps, finies ou infinies. On montrera que dans les deux cas on peut choisir les nombres positifs d_i, tels que si x^+ appartient à tous les ensembles D_i, nous aurons $f(x^+) = \min\limits_{x \in D} f(x)$. On montrera de même qu'il existe la possibilité de choisir, pour chaque ensemble D_i, le point x_i correspondant.

Théorème 1: *Si, pendant l'application du procédé, nous avons choisi le vecteur $x_i \in D_i$ et, pour chaque nombre entier et positif s, le nombre $d_i = d_{i-1}/2^{s-1}$ détermine un ensemble F_{i+1} tel que $D_{i+1} = \emptyset$, nous aurons $f(x_i) = \min\limits_{x \in D} f(x)$.*

En effet, supposons que pour un certain $\bar{x} \in D$ nous avons $f(\bar{x}) < f(x_i)$ et posons $\delta = f(x_i) - f(\bar{x}) > 0$; alors, il existerait un nombre entier s tel que $\bar{d} = d_{i-1}/2^{s-1} < \delta$, ce qui entraînerait $f(x_i) - f(\bar{x}) > \bar{d}_i$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\bar{D}_{i+1} = \{ x \mid x \in D,\ f(x) \leqq f(x_i) - \bar{d}_i \}, \tag{9}$$

ne serait pas vide.

Donc, selon le théorème 1, ou bien on ne peut pas trouver le nombre d_i et le problème (P) est résolu, ou bien on peut trouver le nombre positif d_i tel que $D_{i+1} \neq \emptyset$ et on pourra continuer l'application du procédé. Dans le premier cas on prendra $D_{i+1} = \{x_i\}$ et le point $x^+ = x_i$ qui appartient aux ensembles $D_0, D_1, \dots, D_{i+1}$, possède la propriété $f(x^+) = \min\limits_{x \in D} f(x)$. Dans le second cas, on prendra le plus petit nombre entier et positif s_i

tel que l'ensemble D_{i+1} déterminé à l'aide du nombre $d_i = d_{i-1}/2^{s_i - 1}$ ne soit pas vide, et on continuera l'application du procédé.

Théorème 2: *Si x^+ est un point qui appartient à tous les ensembles D_i, construits avec les nombres d_i définis ci-dessus, nous aurons $f(x^+) = \min\limits_{x \in D} f(x)$.*

Dans le cas où la suite des ensembles D_i est finie, le théorème 2 est une conséquence du théorème 1. Dans le cas où la suite des ensembles D_i est infinie, si $x^+ \in D_i$ pour chaque i et $\tilde{x} \in D$, $\tilde{x} \notin D$, nous aurons $f(\tilde{x}) > f(x^+)$; en effet, nous avons les implications

$$\begin{aligned} x^+ \in D_i &\rightarrow f(x^+) \leqq f(x_{i-1}) - d_{i-1}, \\ \tilde{x} \notin D_i &\rightarrow f(\tilde{x}) > f(x_{i-1}) - d_{i-1}, \end{aligned} \tag{10}$$

qui donnent $f(x^+) - f(\tilde{x}) < 0$. D'autre part les ensembles D_i, selon le procédé employé pendant la construction, possèdent un point commun.

Par conséquent, pour trouver un point x^+, il faudra trouver le point initial $x_0 \in D$ et puis, en partant d'un point x_i, $(i \geqq 0)$, appartenant à l'ensemble D_i, il faudra trouver, pour chaque $i = 0, 1, \dots$, un point x_{i+1} appartenant à l'ensemble

$$D_{i+1} = \{ x \mid x \in E_n,\ f(x) \leqq f(x_i) - d_i,\ f_k(x) \leqq 0,\ k = 1, 2, \dots, m \}. \tag{11}$$

Donc, par cette voie, la résolution du problème (P) est ramenée à la résolution successive d'un nombre fini ou infini de systèmes d'inéquations déterminées par certaines fonctions convexes. Cette résolution pourra être réalisée à l'aide d'une méthode itérative qui généralise la méthode bien connue donnée dans le cas linéaire par Agmon ([1]).

La méthode proposée a été employée pour la résolution de plusieurs problèmes numériques, à l'aide d'une calculatrice, et les résultats obtenus sont satisfaisants.

BIBLIOGRAPHIE

1. Agmon S. — *The relaxation method for linear inequalities*, Can J. Math., T. 6, 1954, p. 382 — 392.

METODĂ PENTRU REZOLVAREA PROGRAMELOR NELINIARE

Rezumat

Se formulează o metodă de rezolvare a problemelor de programare neliniară; ideea centrală a metodei constă în reducerea rezolvării problemei de programare la rezolvarea succesivă a unui şir finit sau infinit de sisteme de inecuaţii liniare sau neliniare.