$F_\gamma[f|x]$ suma termenilor din acest polinom care conţin numai valorile derivatelor pe noduri pînă la ordinul γ inclusiv. Teoremele 1, 2 exprimă cazuri cînd operatorul $F_\gamma[f|x]$ nu conservă neconcavitatea de ordinul n pe nici un interval. Teorema 3 se referă la cazul nodurilor toate confundate. Atunci $F_\gamma[f|x]$ revin la polinoamele lui Taylor relative la funcţia f. Teorema 4 enunţă cîteva proprietăţi de conservare a alurii de convexitate în cazul cînd avem numai două noduri distincte, unul fiind simplu. Lucrarea mai conţine cîteva rezultate referitoare la conservarea alurii de convexitate în cazul general a două noduri distincte.

CARACTÉRISATION DES HOMÉOMORPHISMES QUASI-CONFORMES DE R^n PAR LA DÉFORMATION DES ANGLES

PAR

PETRU CARAMAN et MONICA CORDUNEANU

Dans la Note présente, nous allons démontrer que la définition des homéomorphismes K-quasi-conformes à n dimensions par la déformation des angles (Caraman [5] et, lorsque $n = 2$, Agard et Gehring [1]) est équivalente à la définition métrique de Gehring (Caraman [5] et, lorsque $n = 3$, Gehring [9]) et à celle de Markouchévitch-Pesin (Caraman [5]). L'équivalence de cette définition des homéomorphismes K-quasi-conformes avec les autres a été démontrée dans le cas $n = 2$ par Agard et Gehring [1] par des méthodes spécifiques à la théorie des fonctions d'une variable complexe. Notre démonstration est plus simple et utilise une inégalité relative aux 0-homéomorphismes, qui sont au fond des homéomorphismes quasi-conformes (Caraman [5] et, lorsque $n = 3$, Gehring [10]).

Nous savons que les homéomorphismes, quasi-conformes d'un domaine D de R^n (espace euclidien à n dimensions) sont différentiables seulement presque partout dans D (Markouchévitch [13], Caraman [2-4], Väisälä [16] et Gehring [9]) de sorte que la définition classique de l'angle au point $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ entre deux arcs γ_1, γ_2 qui ont une extrémité commune x_0 était insuffisante pour une définition des homéomorphismes quasi-conformes $f(x)$ à l'aide de la déformation des angles, car les images de deux segments γ_1, γ_2 ayant une extrémité commune en un point $x_0 \in D$, qui n'est pas un point de différentiabilité pour $f(x)$, sont en général deux arcs de Jordan qui peuvent ne pas admettre de tangente au point $f(x_0)$. Cet incovénient a été éliminé par Agard et Gehring [1] par leur définition dans le cas $n = 2$ (définition qui continue à rester valable aussi pour n quelconque) de la mesure intérieure d'un angle topologique. De l'équivalence établie dans le cours de cette Note, il résulte comme un cas particulier, pour $K = 1$, que la conservation de la mesure

intérieure des angles topologiques par un homéomorphisme $f(x)$ est équivalente au fait que $f(x)$ est une représentation conforme dans D, c'est-à-dire la restriction de la trasformation de Moebius dans D. Ce résultat représente une généralisation du résultat correspondant de Kopylov [12], qui impose la condition supplémentaire que l'image par l'homéomorphisme $f(x)$ de toute paire de segments γ_1, γ_2 ayant une extrémité comune x_0 soit formée par deux arcs de Jordan $f(\gamma_1)$, $f(\gamma_2)$ admettant des tangentes en $f(x_0)$. Dans la dernière partie de la Note présente, nous élargissons encore plus les hypothèses de notre théorème en prouvant que, pour qu'un homéomorphisme $f(x)$ soit conforme, il suffit qu'il conserve presque partout dans D les angles parallèles aux angles faits par les arêtes d'un simplex fixe non-dégénéré τ de dimension n et que partout dans D, à l'exception d'un ensemble d'aire Σ-finie, la mesure intérieure de l'angle topologique de l'image de toute paire de segments formant un angle parallèle à un angle de τ soit strictement positif.

1. Homéomorphismes K-quasi-conformes

Commençons par rappeler les définitions d'un angle topologique, de la mesure intérieure d'un angle topologique et des homéomorphismes K-quasi-conformes caractérisés par la déformation des angles (Agard et Gehring [1], Caraman [5]) et d'établir quelques résultats préliminaires.

Soit $x_0 \in R^n$, $x_0 = x_0^i e_i$, où e_i sont les verseurs des axes x^i $(i = 1, \ldots, n)$ et i est un indice muet. Nous disons (d'après Agard et Gehring) que deux arcs γ_1, γ_2 *forment un angle topologique au point* x_0 si γ_1, γ_2 ont une extrémité commune en x_0 et $\gamma_1 \cap \gamma_2 = x_0$. La quantité

$$A(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{x_1, x_2 \to x_0} 2 \arcsin \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_0| + |x_2 - x_0|}, \quad x_k \in \gamma_k \quad (k = 1, 2),$$

s'appelle *la mesure intérieure* $A(\gamma_1, \gamma_2)$ de l'angle topologique formé par les arcs γ_1, γ_2.

On observe que $0 \leqslant A(\gamma_1, \gamma_2) \leqslant \pi$, et que $A(\gamma_1, \gamma_2)$ ne dépend pas du comportement de γ_1, γ_2 en dehors d'un voisinage de x_0. Évidemment

$$A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] = A(\gamma_1, \gamma_2)$$

lorsque $f(x)$ est une similitude ou une symétrie.

Rappelons enfin (Agard et Gehring [1]) la liaison qu'il y a entre la mesure intérieure et la mesure habituelle d'un angle. Soient γ_1, γ_2 deux arcs formant un angle topologique en x_0, soient $x_1 \in \gamma_1$, $x_2 \in \gamma_2$, $x_1, x_2 \neq x_0$ et soit $\theta = \theta(x_1, x_2, x_0)$ la mesure en radiants de l'angle ayant le sommet en x_0 et appartenant au triangle de sommets x_1, x_2, x_0. Alors

$$\varliminf_{x_1, x_2 \to x_0} \theta \leqslant A(\gamma_1, \gamma_2) \leqslant \varlimsup_{\substack{x_1, x_2 \to x_0 \\ |x_1 - x_0| = |x_2 - x_0|}} \theta,$$

ce qui implique

$$A(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{x_1, x_2 \to x_0} \theta(x_1, x_2, x_0),$$

lorsque γ_1 ou bien γ_2 admet une tangente en x_0. En particulier, si les deux arcs γ_1 et γ_2 ont respectivement les tangentes λ_1, λ_2, alors $A(\gamma_1, \gamma_2)$ est égale à la mesure en radiants du plus petit des deux angles déterminés par les tangentes λ_1, λ_2.

Un homéomorphisme $f(x)$ s'appelle *K-quasi-conforme* $(1 \leqslant K < \infty)$ en D s'il vérifie les condition suivantes:

(i) $f(x)$ est différentiable presque partout (p. p.) dans D;

(ii) pour tout $x \in D$ et pour toute paire de segments $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ qui forment un angle ayant le sommet en x,

$$A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] > 0;$$

(iii) pour presque tous les points $x_0 \in D$ et toutes les paires de segments $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ ayant un sommet en x_0.

$$A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] \geqslant \frac{A(\gamma_1, \gamma_2)}{K}. \tag{1}$$

Nous allons nous occuper tout d'abord (Agard et Gehring [1]) de la déformation de la mesure intérieure d'un angle topologique à la suite d'un homéomorphisme différentiable.

Lemme 1. *Si $f(y)$ est un homéomorphisme d'un voisinage U de l'origine tel que*

$$f(x) = x + \varepsilon(0, |x|)|x|, \tag{2}$$

où $\varepsilon(0, |x) \to 0$ lorsque $|x| \to 0$, et si γ_1, γ_2 sont deux arcs de U qui forment un angle topologique à l'origine, alors $f(\gamma_1)$ et $f(\gamma_2)$ forment aussi un angle topologique à l'origine et

$$A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] = A(\gamma_1 \cdot \gamma_2).$$

En effet, si $|x|$ est suffisamment petit, $\varepsilon(0, |x|) < \eta$, de sorte que nous aurons

$$|f(x_1)| + |f(x_2)| \geqslant (1 - \eta)(|x_1| + |x_2|),$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2| + \eta(|x_1| + |x_2|) \leqslant |x_1 - x_2|(1 - \eta) + 2\eta(|x_1| + |x_2|),$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|f(x_1)|+|f(x_2)|} \leqslant \frac{|x_1-x_2|}{|x_1|+|x_2|} + \frac{2\eta}{1-\eta},$$

ce qui implique

$$\sin\frac{1}{2}A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] \leqslant \sin\frac{1}{2}A(\gamma_1, \gamma_2) + \frac{2\eta}{1-\eta},$$

et comme η est arbitraire, nous obtenons

$$A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] \geqslant A(\gamma_1, \gamma_2),$$

ce qui, tenant compte de l'inégalité inverse qui résulte par symétrie, impl que (2).

Lemme 2. *Soit*

(3) $$g(x) = a_i x^i e_i, \quad a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n = 1.$$

Si $a_1 \leqslant K$, *alors*

(4) $$A[g(\gamma_1), g(\gamma_2)] \geqslant \frac{1}{K}A(\gamma_1, \gamma_2)$$

pour toute paire d'arcs γ_1, γ_2 *qui forment un angle topologique à l'origine. Réciproquement, si* (4) *a lieu pour toute paire de segments* γ_1, γ_1 *qui forment un angle topologique à l'origine, alors* $a_1 \leqslant K$.

Soient $x_1 \in \gamma_1$, $x_2 \in \gamma_2$, $x_1, x_2 \neq 0$ et soient

$$\varphi = \arcsin\frac{|x_1|-|x_2|}{|x_1|+|x_2|}, \quad \varphi^* = \arcsin\frac{|g(x_1)-g(x_2)|}{|g(x_1)|+|g(x_2)|};$$

alors

$$\operatorname{tg}^2\varphi^* = \frac{1}{\cos^2\arcsin\dfrac{|g(x_1)-g(x_2)|}{|g(x_1)|+|g(x_2)|}} - 1 = \frac{a_i(x_1^i-x_2^i)^2}{2\sqrt{a_i^2(x_1^i)^2 a_j^2(x_2^j)^2} + 2a_i^2 x_1^i x_2^i} \geqslant$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_1^i - x_2^i)^2}{2a_1\left[\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_1^i)^2 \sum_{i=1}^n (x_2^i)^2} + \sum_{i=1}^n x_1^i x_2^i\right]} =$$

$$= \frac{1}{a_1}\frac{|x_1-x_2|^2}{(|x_1|+|x_2|)^2 - |x_1-x_2|^2} = \frac{1}{a_1}\operatorname{tg}^2\varphi,$$

ce qui implique

$$\varphi^* \geqslant \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a_1}\operatorname{tg}\varphi\right) \geqslant \frac{1}{a_1}\varphi$$

et donc

$$A[g(\gamma_1), g(\gamma_2)] = \lim_{x_1, x_2 \to 0} 2\varphi^* \geqslant \frac{1}{a_1}\lim_{x_1, x_2 \to 0} 2\varphi = \frac{1}{a_1}A(\gamma_1\ \gamma_2),$$

et, tenant compte que $a_1 \leqslant K$, nous obtenons l'inégalité (4).

Et maintenant, pour établir la réciproque, choisissons deux points sur la sphère unité de R^n ayant le centre à l'origine, situés dans le plan $x^1 O x^n$, symétrique par rapport à l'axe Ox^n et dont les segments γ_1, γ_2 qui les unissent à l'origine font une angle θ. Alors, tenant compte de l'expression de $A[g(\gamma_1), g(\gamma_2)]$, nous aurons

$$A[g(\gamma_1), g(\gamma_2)] = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a_1}\operatorname{tg}\theta\right) \sim \frac{1}{a_1}A(\gamma_1, \gamma_2)$$

pour $\theta \to 0$, de sorte que, en vertu de l'inégalité (4), nous avons $a_1 \leqslant K$.

Au voisinage d'un point de différentiabilité d'un homéomorphisme $f(x)$ celui-ci peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|),$$

où $f'(x)$ est l'opérateur de dérivation de $f(x)$. La transformation affine

$$f_1(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

s'appelle la partie principale de $f(x)$.

Rappelons aussi qu'un homéomorphisme $f(x)$ s'appelle *K-quasi-conforme* $(1 \leqslant K < \infty)$ dans $D \subset R^n$ d'après la définition analytique de Väisälä [16] s'il est ACL (absolument continu linéairement) dans D, différentiable p. p. dans D, et vérifie p. p. dans D l'inégalité

$$\frac{\max|f'(x)|^n}{K} \leqslant |J(x)| \leqslant K\min|f'(x)|^n,$$

où $\max|f'(x)| = \max_{|\Delta x|=1}|f'(x)\Delta x|$, $\min|f'(x)| = \min_{|\Delta x|=1}|f'(x)\Delta x|$. Une application $f(x)$ s'appelle ACL dans un domaine D si pour tout intervalle $I = \{x; \alpha^i < x^i < \beta^i\}$, $I \subset D$, $f(x)$ est absolument continu (AC) sur presque tous les segments de I parallèles à l'un des verseurs e_i $(i = 1, \ldots, n)$, c'est-à-dire à l'exception d'un ensemble de dimension $n-1$ de tels segments.

Lemme 3. *Si* x_0 *est un point de différentiabilité de l'homéomorphisme* $f(x)$, *si l'inégalité* (1) *est vérifiée pour toute paire de segments* γ_1, γ_2 *qui forment un angle en* $x_0 \in D$ *et si*

(5) $$\max|f'(x_0)| > 0,$$

alors

$$\max |f'(x_0)|^n \leqslant K^{n-1} |\mathcal{J}(x_0)|. \tag{6}$$

Supposons, pour simplifier, $x_0 = f(x_0) = 0$ et

$$f(x) = g(x) + o(|x|), \tag{7}$$

où $g(x)$ est donné par (3). Ceci peut être obtenu par une similitude et une symétrie, ce qui conserve la mesure d'un angle topologique.

Supposons ensuite que $\mathcal{J}(0) \neq 0$. Alors, l'inégalité (1), en tenant compte aussi du lemme l'implique,

$$A[g(\gamma_1), g(\gamma_2)] = A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] \geqslant \frac{1}{K} A(\gamma_1, \gamma_2)$$

pour toute paire de segments γ_1, γ_2 qui forment un angle à l'origine. Mais alors, en vertu du lemme 2, $a_1 \leqslant K$, et, en tenant compte de la relation (1.13) de la Note [16] de Väisälä, nous obtenons

$$\frac{\max |f'(x_0)|^n}{|\mathcal{J}(x_0)|} = \frac{a_1^n}{a_1 \dots a_{n-1}} \leqslant a_1^{n-1} \leqslant K^{n-1},$$

ce qui implique (6).

Il ne nous reste qu'à exclure la possibilité du cas $\mathcal{J}(0) = 0$. En effet, dans ce cas (7) devient de la forme

$$f(x) = a_p x^p + o(|x|) \quad (p = 1, \dots, q < n).$$

Soient γ_1, γ_2 (comme dans le lemme précédent) deux segments ayant une extrémité commune à l'origine situés dans le plan $x^1 O x^n$, symétriques par rapport à l'axe Ox^n et faisant avec cet axe un angle θ. Mais alors, en raisonnant de la même manière que dans le cas correspondant du lemme précédent, nous obtenons $A[(f(\gamma_1), f(\gamma_2)] = 0$, $A(\gamma_1 \gamma_2) = 2\theta$, ce qui contredit l'inégalité (1), et exclut, par cela même, l'hypothèse $\mathcal{J}(0) = 0$.

Lemme 4. *Soit $F \subset O x^n$ un ensemble compact. Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitraire, on peut trouver $\rho > 0$ tel que, pour tout $r (0 < r < \rho)$, il existe des points $x_1, \dots, x_N \in F$, tels que*

$$F \subset \bigcup_{m=1}^{N} B(x_m, r), \quad |x_i - x_k| \geqslant |i - k| r \quad (i, k = 1, \dots, N),$$

$$Nr < m_1 F + \varepsilon, \tag{8}$$

où $m_1 F$ est la mesure Lebesgue linéaire et $B(x_m, r)$ est la boule de centre x_m et de rayon r.

(La même démonstration que chez Gehring [8]).

Soit

$$\Lambda(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Lambda^\varepsilon(E), \quad \Lambda^\varepsilon(E) = \inf_{\substack{\{U_i\} \\ d(U_i) < \varepsilon}} \sum_i d(U_i)$$

la longueur de l'ensemble $E \subset R^n$, où la marge inférieure est prise par rapport à tous les recouvrements $\{U_i\}$ de E et $d(U_i)$ signifie le diamètre de l'ensemble U_i. Un ensemble E s'appele de longueur Σ-finie si $E \bigcup_i E_i$ et $\Lambda(E_i) < \infty (i = 1, 2, \dots)$.

Soit I un intervalle, $\bar{I} \subset D$ et I_n sa base. A chaque ensemble Borel mesurable $E_0 \subset I_n$ associons l'ensemble $Z_{E_0} = \{x; x = y + \xi e_n, \ y \in E_0, \ 0 < \xi < \beta^n - \alpha^n\}$. La fonction $\varphi(E_0) = mf(Z_{E_0})$ est une fonction d'ensemble non-négative et complètement additive, de sorte que, en vertu du théorème de Lebesgue (Saks [14] p. 49) p.p. dans I_n nous avons la dérivée symétrique $D_{\text{sym}} \varphi(y) = \lim \{\varphi[(B_0(x, r)]/\omega_n r^n)\} < \infty$, où ω_n est le volume de la boule unité à n dimensions.

Nous notons enfin $d(E_1, E_2) = \inf_{\substack{x_1 \in E_1 \\ x_2 \in E_2}} |x_1 - x_2|$.

En nous servant de ces notations, démontrons le

Lemme 5. *Un homéomorphisme K-quasi-conforme d'après la définition de Agard et de Gehring est* ACL *dans D.*

Soit $y_0 \in I_n$ un point tel que $D_{\text{sym}} \varphi(y_0) < \infty$. Supposons que l'intervalle I est de la forme $I = \{x; 0 < x^i c < 1, (i = 1, \dots, n)\}$ (ce que l'on peut obtenir par une similitude préalable). Démontrons que dans les hypothèses du lemme, $f(x)$ est AC sur le segment $\mathcal{J}_0 \subset Z_{y_0}$.

Soit $0 < r < 1/2\, d(\mathcal{J}_0, \partial D)$. Et maintenant, introduisons dans le plan (à deux dimensions) $\xi O x^n$ la variable complexe $z = x^n + i\xi$ où ξ parcourt une droite quelconque du plan à $n - 1$ dimensions $x^n = 0$) et pour tout $x_0 \in \mathcal{J}_0$, soient $\gamma_m = \gamma_m(x_0)$ $(m = 1, 2, 3, 4)$ les segments de droite qui unissent x_0 aux points $x_0 + \zeta_m$ $(m = 1, 2, 3, 4)$, où $\zeta_1 = r$, $\zeta_2 = ir$ $\zeta_3 = -r$, $\zeta_4 = -r + ir$. En vertu de la condition (ii), nous aurons $A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] > 0$, $A[f(\gamma_3), f(\gamma_4)] > 0$, ce qui implique

$$\begin{gathered} \lim_{x_1, x_2 \to x_0} \frac{|f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - (f(x_0)|}{|f(x_1) - f(x_2)|}, \\ \lim_{x_3, x_4 \to x_0} \frac{|f(x_3) - f(x_0)| + |f(x_4) - f(x_0)|}{|f(x_3) - f(x_4)|}, \quad x_m \in \gamma_m(x_0) \ (m = 1, 2, 3, 4). \end{gathered} \tag{9}$$

Et maintenant, pour chaque paire d'entiers p, q, $(p > 0, \ 0 < 1/q < r)$, soit $E(p, q)$, l'ensemble des points $x \in I$ ayant la propriété suivante

$$(10)\qquad \begin{aligned} &|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_0)|\leqslant p\,|f(x_1)-f(x_2)|,\\ &|f(x_3)-f(x_0)|+|f(x_4)-f(x_0)|\leqslant p\,|f(x_3)-f(x_4)|, \end{aligned}$$

lorsque $|x_m-x_0|\leqslant 1/q$ et $x_m\in\gamma_m(x_0)$ $(m=1,2,3,4)$. Alors, $E(p,q)$ est compacte, et, en vertu des relations (9),

$$(11)\qquad I=\bigcup_{p,q}E(p,q),$$

où la réunion s'étend à toutes les paires p, q, telles que $E(p,q)\neq\emptyset$.

Nous allons démontrer d'abord que pour tout ensemble compact $F\subset\mathcal{J}_0\cap E(p,q)$,

$$(12)\qquad \Lambda[f(F)]^n\leqslant 2^{n-2}\,npD_{\mathrm{sym}}\,\varphi(y)\,(m_1F)^{n-1},$$

où $\Lambda(E)$ est la longueur de l'ensemble E.

En effet, soit $\mathcal{J}\subset\mathcal{J}_0$ un segment fermé ayant les extrémités $a,b\in F$, où $b-a>0$ et

$$(13)\qquad b-a<\min\left(\frac{1}{q},\,|y_0|,\,c-|y_0|\right),$$

et soit C le cône circulaire ayant l'axe $\mathcal{J}$, le sommet b et la base $B_a=B^{n-1}(y_0+ae_n,\,b-a)$, où $B^{n-1}(x,r)$ représente la boule à $n-1$ dimensions ayant le centre x et le rayon r. Le cône C sera appelé *le cône associé au segment* $\mathcal{J}$. Évidemment, $C\subset I$ en vertu de l'inégalité précédente. Supposons (pour simplifier et sans restreindre la généralité) $f(a)=0$, $f(b)=l^*e_n$ $(l^*>0)$ (ce qui peut s'obtenir par un mouvement préalable dans l'espace de la variable x^*). Pour chaque u_0^*, $0<u_0^*<l^*$, sur chaque demi-droite ayant une extrémité en $x_1^*\in f(\mathcal{J})$ et située dans le plan $x^{*n}=u_0^*$, il existe un second point $x_2^*\in f(\partial C)$ tel que $(x_1^*,x_2^*)\in f(C)$. Si $x_2^*\in f(B_a)$ et $x_1=f^{-1}(x_1^*)$, $x_2=f^{-1}(x_2^*)$, alors $x_1\in\gamma_1(a)$, $x_2\in\gamma_2(a)$ (pour un ξ convenable) et, en vertu de l'inégalité (13), $|x_1-a|$, $|x_2-a|<1/q$, de sorte que, en tenent compte de l'inégalité (10),

$$2u_0^*\leqslant|x_1^*|+|x_2^*|\leqslant p\,|x_1^*-x_2^*|.$$

Si $x_2^*\in f(\sigma_0)$, où $\sigma_0=\partial C-B_a$ (la surface latérale du cône), alors, par le même raisonnement, nous obtenons

$$2(l^*-u_0^*)\leqslant|x_1^*-l^*|+|x_2^*-l^*|\leqslant p\,|x_1^*-x_2^*|.$$

Donc, si $0<u_0^*<l^*$, toute demi-droite ayant une extrémité en x_1^* et située dans le plan $x^{*n}=u_0^*$ contient un segment ouvert $(x_1^*,x_2^*)\subset f(C)$ dont la longueur $|x_1^*-x_2^*|\geqslant 2/p\,\min(u_0^*,l^*-u_0^*)$. Mais alors, en vertu du théorème de Fubini, nous aurons

$$mf(C)\geqslant\frac{2}{p}\int_0^{l^*}\omega_{n-1}\min(u^*,l^*-u^*)^{n-1}\,du^*=\frac{\omega_{n-1}\,l^{*n}}{2^{n-2}\,np},$$

ce qui implique

$$(14)\qquad |f(a)-f(b)|^n=l^{*n}\leqslant\frac{2^{n-2}np}{\omega_{n-1}}\,mf(C).$$

D'autre part, F étant fermé, $F=F_1\cup F_2$, où F_1 est dénombrable et F_2 est parfait ou vide. Évidemment, $m_1F=m_1F_2$, $\Lambda[f(F)]=\Lambda[f(F_2)]$, de sorte que pour établir l'inégalité (12) il suffit de supposer que F est parfait.

Et maintenant, soit $\varepsilon>0$, ρ du lemme précédent et $r\in(0,\rho)$ tel que

$$(15)\qquad r\leqslant\min\left(\frac{1}{q},\,|y_0|,\,c-|y_0|\right),$$

et soit $B(x_1,r),\dots,B(x_N,r)$ le recouvrement de F décrit dans le lemme précédent et C_m le cône associé au segment $\mathcal{J}_0\cap B(x_m,r)$. Alors, toute paire de points $a,b\in F\cap B(x_m,r)$, $(b-a>0)$, délimite un segment fermé $\mathcal{J}$ dont le cône associé $C\subset C_m$. En tenant compte que $b-a<r$, l'inégalité (15) implique (13), de sorte que, en vertu de l'inégalité (14),

$$|f(a)-f(b)|^n\leqslant\frac{2^{n-2}np}{\omega_{n-1}}\,mf(C)\leqslant\frac{2^{n-2}np}{\omega_{n-1}}\,mf(C_m),$$

d'où l'on déduit

$$(16)\qquad d[f(E_m)]^n=d_m^n\leqslant\frac{2^{n-2}np}{\omega_{n-1}}\,mf(C_m),$$

où $E_m=F\cap B(x_m,r)$. Soit $d=\max(d_1,\dots,d_N)$. Alors, les ensembles $f(E_m)$ forment un recouvrement de $f(F)$ qui vérifie la condition $d[f(E_m)]\leqslant d$, de sorte que, en vertu des inégalités (16) et (8), et appliquant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\Lambda[f(F)]^n\leqslant\left\{\sum_{m=1}^{N}d[f(E_m)]\right\}^n\leqslant\frac{2^{n-2}np\,N^{n-1}}{\omega_{n-1}}\sum_{m=1}^{N}mf(C_m)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{n-2}np\,(Nr)^{n-1}\frac{\varphi(|y|\leqslant r)}{\omega_{n-1}\,r^{n-1}}\leqslant 2^{n-2}np\,\frac{\varphi(|y|<r)}{\omega_{n-1}\,r^{n-1}}\,(m_1F+\varepsilon)^{n-1}.$$

Et maintenant, $r\to 0$ implique $d\to 0$ (en vertu de la continuité de f), de sorte que l'inégalité précédente devient

$$\Lambda[f(F)]^n\leqslant 2^{n-2}\,npD_{\mathrm{sym}}\,\varphi(y_0)\,(m_1F+\varepsilon)^{n-1},$$

et, comme ε était arbitraire, elle implique l'inégalité (12).

Ensuite, en raisonnant comme dans le lemme 9 de la Note [1] d'Agard et Gehring, on déduit que si $E \subset \mathcal{J}_0$, alors $m_1 E = 0$ implique $\Lambda[f(E)] = 0$.

La continuité absolue de $f(x)$ sur $\mathcal{J}_0$ va résulter comme une conséquence de l'inégalité (12) et du résultat précédent. En effet, pour tout entier $p > 0$, soit

$$E(p) = \bigcup_q E(p, q),$$

où la réunion s'étend à tous les indices q tels que $E(p, q) \neq \emptyset$. De la condition (iii), et tenant compte que $\gamma_3(x_0)$ et $\gamma_4(x_0)$ font un angle égal à $\pi/4$ il résulte

$$\frac{|f(x_3) - f(x_4)|}{|f(x_3) - f(x_0)| + |f(x_4) - f(x_0)|} \geqslant \sin \frac{\pi}{8K},$$

de sorte que, en vertu des inégalités (10), $m[I - E(p)] = 0$ pour $p > \operatorname{cosec} \pi/8K$. En nous fixant un tel p, en vertu du théorème de Fubini, nous aurons

$$m_1[Z_{y_0} - E(p)] = 0 \tag{17}$$

pour presque tous les y_0 de I_n. Fixons-nous un tel y_0 où $D_{\text{sym}}\, \varphi(y_0) < \infty$ et soit E un sous-ensemble compacte arbitraire de $\mathcal{J}_0$. Alors, $E = [E \cap E(p)] \cup [E - E(p)]$, où, en vertu de la relation (17), $m_1[E - E(p)] = 0$. Mais alors, en vertu de l'inégalité (12) et du fait que $m_1 E = 0$ implique $\Lambda[f(E)] = 0$, il résulte

$$\begin{aligned} \Lambda[f(E)]^n = \Lambda\{f[E \cap E(p)]\}^n &= \lim_{q \to \infty} \Lambda\{f[E \cap E(p, q)]\}^n \leqslant \\ &\leqslant 2^{n-2} n p D_{\text{sym}}\, \varphi(y_0) \lim_{q \to \infty} m_1[E \cap E(p, q)]^{n-1} = \\ &= 2^{n-2} n p D_{\text{sym}}\, \varphi(y_0) (m_1 E)^{n-1}, \end{aligned} \tag{18}$$

ce qui implique la continuité absolue de $f(x)$ sur Z_{y_0}. Mais l'inégalité précédente est vérifiée p.p. dans I_n, de sorte que $f(x)$ est ACL dans I, et, tenant compte de l'arbitrariété de I, $\bar{I} \subset D$, $f(x)$ est ACL dans D.

Théorème 1. *Un homéomorphisme $f(x)$, quasi-conforme dans D, vérifie la condition* (ii).

Évidemment, $f^{-1}(x^*)$ est aussi un homéomorphisme quasi-conforme et ceci quelle que soit la définition adoptée, car toutes sont équivalentes si l'on fait abstraction de la constante K qui y intervient (Caraman [5]). Mais tout homéomorphisme quasi-conforme est un θ-homéomorphisme et, en vertu du théorème 11 de la Note [10] de Gehring (lorsque $n=3$) (Caraman [5], théorème 15, pour n quelconque), il vérifie l'inégalité

$$\frac{|f^{-1}(y^*) - f^{-1}(x^*)|}{d[f^{-1}(x^*), \partial\Delta]} \leqslant \theta\left(\frac{|y^* - x^*|}{d(x^*, \partial\Delta^*)}\right),$$

où $\Delta \subset D$, $\theta(t)$ est continue et strictement croissante dans $[0, 1)$ et $\theta(0) = 0$. Mais ceci implique

$$\frac{|y^* - x^*|}{d(x^*, \partial\Delta^*)} \geqslant \theta^{-1}\left\{\frac{|f^{-1}(y^*) - f^{-1}(x^*)|}{d[f^{-1}(x^*), \partial\Delta]}\right\},$$

où θ^{-1} représente l'inverse de $\theta(t)$ et est aussi strictement croissante dans $[0, 1)$ et $\theta^{-1}(0) = 0$. Mais si nous notons $\Delta = D - \{x_0\}$, $y = x_1$, $x = x_2$, nous obtenons

$$\frac{|f(x_1) - f(x_0)|}{|f(x_2) - f(x_0)|} \geqslant \theta^{-1}\left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_2 - x_0|}\right) \geqslant \theta^{-1}\left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_0| + |x_2 - x_0|}\right) > 0,$$

tandis que si nous notons $\Delta = D - \{x_0\}$, $x = x_1$, $y = x_2$,

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|f(x_1) - f(x_0)|} \geqslant \theta^{-1}\left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_0| + |x_2 - x_0|}\right) > 0,$$

et combinant ces inégalités,

$$\begin{aligned} &\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_0)|} \geqslant \\ &\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{2 \max[|f(x_1) - f(x_0)|, |f(x_2) - f(x_0)|]} \geqslant \\ &\frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_0| + |x_2 - x_0|}\right) > 0, \end{aligned}$$

ce qui implique (ii).

Et maintenant, en vue du résultat principal de notre Note, rappelons la définition métrique de Gehring des homémorphismes K-quasi-conformes (Caraman [5], et, lorsque $n = 3$, Gehring [9]) :

Un homéomorphisme $x^* = f(x)$ d'un domaine $D \subset R^n$ s'appelle *K-quasi-conforme* $(1 \leqslant K < \infty)$ dans D si la dilatation linéaire locale

$$\delta_L = -\lim_{r \to 0} \frac{\max\limits_{|x' - x| = r} |f(x') - f(x)|}{\min\limits_{|x' - x| = r} |f(x') - f(x)|}$$

est bornée dans D et

$$\delta_L(x) \leqslant K$$

p.p. dans D.

Un point x_0 s'appelle *point d'affinité* ou *A-point* d'une application $f(x)$, si celle-ci est homéomorphe au voisinage de x_0, elle est différentiable en x_0 et $J(x_0) \neq 0$. Au voisinage d'un A-point x_0, la partie principale $f_1(x, x_0)$ de l'homéomorphisme $f(x)$ transforme la sphère unité $S(x_0, 1)$ en un ellipsoïde ayant les demi-axes $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$.

Théorème 2. *La définition des homéomorphismes K-quasi-conformes d'Agard et Gehring est équivalente à la définition métrique de Gehring.*

Supposons d'abord que $f(x)$ est K-quasi-conforme d'après la définition métrique de Gehring dans D. Alors en vertu de l'équivalence de toutes les définitions des homéomorphismes quasi-conformes, il résulte que $f(x)$ est différentiable p.p. dans D (voir par exemple Caraman [5]) et par ceci $f(x)$ vérifie la condition (i), tandis que (ii) est une conséquence du théorème précédent. Mais $J \neq 0$ p.p. dans D (Caraman [4]) et en un A-point x_0, nous avons

$$\delta_L(x_0) = \frac{a_1(x_0)}{a_n(x_0)} = p_1(x_0), \tag{19}$$

(Väisälä [16]), ce qui implique, en tenant compte de la K-quasi-conformité de $f(x)$ d'après la définition métrique de Gehring,

$$p_1(x) = \delta_L(x) \leqslant K \tag{20}$$

p.p. dans D. Évidemment, par une rotation et une homothétie convenable (qui conserve la mesure d'un angle), on peut mettre la partie principale $f_1(x, x_0)$ sous la forme (3), de sorte que (20), qui, dans ce cas se réduit à l'inégalité $a_1 \leqslant K$, implique en vertu du lemme 2, l'inégalité (4), autrement dit, la condition (iii) est aussi vérifiée.

Et maintenant, réciproquement, supposons que $f(x)$ est K-quasi-conforme dans D d'après la définition d'Agard et de Gehring, c'est-à-dire qu'il vérifie les conditions (i), (ii), (iii). Alors, en vertu du lemme précédent, $f(x)$ est (ACL) dans D. D'autre part, $f(x)$ est différentiable p.p. dans D en vertu de la condition (i), et dans les points de différentiabilité où a lieu l'inégalité (5), a lieu aussi l'inégalité (6) en vertu du lemme 3, cette inégalité continuant à être vérifiée aussi dans les points où (5) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire où $\max |f'(x)| = 0$; tout ceci implique la quasi-conformité de $f(x)$ d'après les définitions de Väisälä ([16], théorème 6.11) lorsque $n = 3$, et Caraman ([5] pour n quelconque), et, en vertu de l'équivalence des définitions, $f(x)$ est quasi-conforme aussi d'après la définition métrique de Gehring. D'autre part, en vertu du lemme 2, $p_1(x) \leqslant K$ en presque tous les points de différentiabilité (c'est-à-dire p.p. dans D). Mais comme $J \neq 0$ p.p. dans D, (Caraman [4]), en vertu des relations (19) il résulte que $\delta_L(x) = p_1(x) \leqslant K$ en presque tous les A-points de $f(x)$, c'est-à-dire p.p. dans D, ce qui, en tenant compte de la quasi-conformité de $f(x)$ d'après la définition métrique de Gehring dans D, implique aussi

la K-quasi-conformité de $f(x)$ d'après la définition métrique de Gehring et l'équivalence des deux définitions est complètement établie.

Corollaire 1. *La définition des homéomorphismes K-quasi-conformes d'Agard et Gehring est équivalente à la définition de Markouchévitch-Pesin.*

C'est une conséquence du théorème précédent et de l'équivalence de la définition de Markouchévitch-Pesin avec la définition métrique de Gehring, (Caraman [4]).

Corollaire 2. *Pour qu'un homéomorphisme $f(x)$ soit K-quasi-conforme dans D d'après la définition métrique de Gehring, il faut et il suffit qu'il vérifie les condition* (i), (ii) *et*

(iii') *pour presque tout $x_0 \in D$ et toutes les paires de segments γ_1, γ_2 qui forment un angle de sommet x_0*

$$A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] \leqslant KA(\gamma_1, \gamma_2).$$

C'est une conséquence du fait que l'inégalité précédente est équivalente à l'inégalité (1) pour l'homéomorphisme inverse et que l'homéomorphisme inverse d'un homéomorphisme K-quasi-conforme d'après la définition métrique de Gehring est aussi K-quasi-conforme d'après cette même définition.

Corollaire 3. *Pour qu'un homéomorphisme $f(x)$ soit K-quasi-conforme dans D d'après la définition métrique de Gehring, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions* (i), (ii) *et*

(iii'') *pour presque tout $x_0 \in D$ et toutes les paires de segments $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ qui forment un angle de sommet x_0,*

$$\frac{A(\gamma_1, \gamma_2)}{K} \leqslant [f(\gamma_1), f(\gamma_2)] \leqslant KA(\gamma_1, \gamma_2).$$

2. Représentations conformes

Corollaire 4. *Pour qu'un homéomorphisme $f(x)$ soit conforme dans D, il faut et il suffit qu'il vérifie les condition* (i), (ii) *et* (iii) *ou* (iii') *avec $K = 1$.*

Corollaire 5. *Pour qu'un homéomorphisme $f(x)$ soit conforme dans D, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions* (i), (ii) *et conserve les angles presque partout dans D.*

Maintenant, nous allons donner une nouvelle extension des deux corollaires précédents, comme aussi du théorème correspondant de Kopylov [12]. Nous allons commencer par donner une extension au cas de n quelconque d'un résultat établi par W. Gross [11] pour $n = 2$.

Théorème de Gross. *Soit Π un plan quelconque à $n-1$ dimensions donné. Si la mesure de Gross $\Gamma^{n-1}E < \infty$, alors la mesure Lebesgue des points de Π sur lesquelles se projettent au moins N points de E est au plus égale à $(\Gamma^{n-1}E)/N$.*

Rappelons tout d'abord la définition de la mesure de Gross. Soit $E \subset R^n$ et supposons donnée une division de R^n en cubes W_k^i à n dimensions ayant les arêtes parallèles aux axes de coordonnées et de longueur $(1/2k)$. Soit $E_k^i = E \cap W_k^i$ et $\Pi(E_k^i)$ la projection maximale de E_k^i, c'est-à-dire la marge supérieure de la projection de E_k^i sur un plan à $n-1$ dimensions arbitraire. La mesure de Gross de l'ensemble E est la quantité

$$\Gamma^{n-1} E = \lim_{k \to \infty} \Gamma_k^{n-1} E, \text{ où } \Gamma_k^{n-1} E = \Sigma_i \Pi(E_k^i).$$

Passons maintenant à la démonstration. Notons par E'_N l'ensemble des points du plan Π dans lesquels se projettent au moins N points de E et supposons pour le moment que E est contenu dans l'intérieur d'un cube unité ayant deux faces parallèles au plan Π. Considérons maintenant un point $x \in E'_N$ et l'ensemble E_x des points de E qui se projette en x. Soit λ le plus grand nombre avec la propriété qu'il y a N points de $E_x : x_1, \ldots, x_N$ avec $d(x_p, x_q) \geqq \lambda$ $(p \neq q; p, q = 1, \ldots, N)$. À chaque point $x \in E'_N$ on associe de cette manière un $\lambda > 0$ bien déterminé. L'ensemble des points de E'_N où $\lambda > 1/k$ sera noté par E'_k. Mais du fait que $E'_N = \bigcup_k E'_k$ et $E'_k \subset E'_{k+1}$, il résulte que $\lim_{k \to \infty} m^*_{n-1} E'_k = m^*_{n-1} E'_N$, où par $m^*_{n-1} E$ nous avons noté la mesure Lebesgue extérieure à $n-1$ dimensions de E. Nous pouvons choisir donc un k suffisamment grand pour que

$$m^*_{n-1} E'_k > m^*_{n-1} E'_N - \varepsilon. \tag{20}$$

Et maintenant décomposons le cube unité par des plans parallèles à Π en k couches congruentes $Q_1, \ldots, Q_k$, où aux points intérieures de Q_k on ajoute aussi les points frontières qui appartiennent au plan supérieur parallèle à Π. Les points de E qui correspondent à un point de E'_k sont répartis dans au moins N couches Q_p différentes. Notons par E'_{kp} les points de E'_k qui ont la propriété que parmi les points correspondants de E il y a au moins un, contenu dans Q_p $(1 \leqq p \leqq k)$; alors

$$N m^*_{n-1} E_k \leqq \Sigma_p m^*_{n-1} E'_{kp}. \tag{21}$$

Avant d'établir l'inégalité précédente, nous allons montrer d'abord que

$$m^*_{n-1}(E_1 \cup E_2) + m^*_{n-1}(E_1 \cap E_2) \leqq m^*_{n-1} E_1 + m^*_{n-1} E_2. \tag{22}$$

En effet, soient G_i des ensembles mesurables avec la propriété que $G_i \supset E_i$ et $m^*_{n-1} E_i = m_{n-1} G_i (i = 1, 2)$. Mais $E_1 \cup E_2 \subset G_1 \cup G_2$, de sorte que $m^*_{n-1}(E_1 \cup E_2) \leqslant m_{n-1}(G_1 \cup G_2)$. Mais nous pouvons choisir G_1, G_2 de manière que, dans la relation, précédente nous ayons égalité ; il suffit pour cela de considérer un ensemble mesurable G ayant la propriété que $m^*_{n-1}(E_1 \cup E_2) = m_{n-1} G$ et remplaçons G_1, G_2 par $G \cap G_1$, $G \cap G_2$. Pour simplifier la notation,

nous n'avons qu'à supposer que G_1, G_2 ont été choisis du commencement tels que, dans l'inégalité précédente, nous ayons égalité. Dans ce cas, nous avons évidemment la relation

$$m_{n-1}(G_1 \cup G_2) + m_{n-1}(G_1 \cap G_2) = m_{n-1} G_1 + m_{n-1} G_2,$$

qui, en tenant compte de l'inegalité :

$$m_{n-1}(G_1 \cap G_2) \geqq m^*_{n-1}(E_1 \cap E_2)$$

implique l'inégalité (22), d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} m^*_{n-1} E_1 + m^*_{n-1} E_2 + m^*_{n-1} E_3 &\geqq m^*_{n-1}(E_1 \cup E_2) + \\ + m^*_{n-1} E_3 + m^*_{n-1}(E_1 \cap E_2) &\geqq m^*_{n-1}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) + \\ + m^*_{n-1}[(E_1 \cup E_2) \cap E_3] + m^*_{n-1}(E_1 \cap E_2) &\geqq m^*_{n-1}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) + \\ + m^*_{n-1}(E_1 \cap E_2 \cup E_1 \cap E_3 \cup E_2 \cap E_3) + m^*_{n-1}(E_1 \cap E_2 \cap E_3), \end{aligned}$$

et dans le cas général

$$\sum_{k=1}^{m} m^*_{n-1} E_k \geqq \sum_{i=1}^{m} m^*_{n-1} K_i,$$

où K_i est l'ensemble des points qui appartiennent à au moins i ensembles E_i. Évidemment, $K_p \supset K_q$ lorsque $q \leqq p$, de sorte que l'inégalité précédente implique :

$$\sum_{k=1}^{m} m^*_{n-1} E_k \geqq \sum_{i=1}^{m} m^*_{n-1} K_i \geqq i m^*_{n-1} K_i.$$

Si nous choisissons comme ensembles E_k justement les ensembles E'_{kp} et nous remarquons que chaque point de E'_k est contenu dans au moins N ensembles E'_{kp}, il résulte l'inégalité (21).

De la mesurabilité des ensembles W_p $(p = 1, \ldots, k)$, il résulte

$$\Gamma^{n-1} E = \Sigma_p \Gamma^{n-1}(E \cap W_p). \tag{23}$$

Mais $\Gamma^{n-1}(E \cap W_p)$ est tout au plus égal à la mesure Lebesgue à $n-1$ dimensions de la projection de $E \cap W_p$ sur le plan Π, car

$$m^*_{n-1}(E \cap W_p)_\Pi \leqq \Sigma_i m^*_{n-1}[(E \cap W_p)_k^i]_\Pi \leqq \Gamma_k^{n-1}(E \cap W_p)_\Pi \leqq \Gamma^{n-1}(E \cap W_p)_\Pi,$$

où $(E \cap W_p)_k^i$ est la portion de $E \cap W_p$ contenue dans le cube W_k^i de la définition de la mesure de Gross et $[(E \cap W_p)_k^i]_\Pi$ est la projection de $(E \cap W_p)_k^i$ sur le plan Π. Mais alors, parce que $m^*_{n-1} E'_{kp} \leqq m^*_{n-1}(E \cap W_p)_\pi$, il résulte que

$$\Gamma^{n-1}(E \cap W_p) \geqq m^*_{n-1} E'_{kp},$$

d'où, en tenant compte de (21) et (23), on obtient $\Gamma^{n-1} E \geqq N m^*_{n-1} E'_k$, qui, en tenant compte de (20), implique

$$m^*_{n-1} E'_N - \varepsilon < m^*_{n-1} E'_k \leqq \frac{1}{N} \Gamma^{n-1} E,$$

et, comme ε était arbitraire, il résulte que

$$m^*_{n-1} E'_N \leqq \frac{1}{N} \Gamma^{n-1} E.$$

Ceci dans l'hypothèse que E est un ensemble borné.

Si E n'est pas borné, nous allons considérer les cubes Q^*_m ayant le centre à l'origine et les arêtes de longueur m et parallèles aux axes de coordonnées. Si E^*_m est l'ensemble des points de Π dans lesquels se projettent au moins N points de $E \cap W^*_m$, alors d'un côté $m^*_{n-1} E^*_k = \lim_{m \to \infty} m^*_{n-1} E^*_m$, où E^* représente l'énsemble des points de Π dans lesquels se projettent au moins N points de E et, d'un autre coté, $\Gamma^{n-1} E = \lim_{m \to \infty} \Gamma^{n-1}(E \cap W^*_m)$ de sorte que, en tenant compte du fait que:

$$m^*_{n-1} E^*_m \leqq \frac{1}{N} \Gamma^{n-1}(E \cap W^*_m)$$

pour tout m, en vertu de ce qui a été établi pour E borné, il résulte l'affirmation du théorème de Gross dans le cas général.

Corollaire 1. *Si $\Gamma^q E < \infty$, alors les points d'une variété linéaire à q dimensions dans lesquels se projettent un nombre infini de points de E est un ensemble de mesure Lebesgue à q dimensions nulle.*

Soit $E \subset R^n$ et

$$a_\varepsilon(E) = \inf_{\substack{\{U_i\} \\ d(U_i) \leqq \varepsilon}} \Sigma_i \, \omega_{n-1} \left[\frac{d(U_i)}{2} \right]^{n-1}, \quad a(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} a_\varepsilon(E),$$

où la borne inférieure est prise par rapport à tous les recouvrements $\{U_i\}$ de E. Alors la quantité $a(E)$ s'appelle *l'aire de l'ensemble E* (ou bien encore la *mesure Hausdorff à $n-1$ dimensions*). Un ensemble E s'appelle *d'aire Σ-finie si $E = \bigcup_i E_i$ et $a(E_i) < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$.*

Corollaire 2. *Si E est un ensemble d'aire Σ-finie, alors les points d'un plan dans lesquels se projettent un ensemble non-dénombrable de E est un ensemble de mesure Lebesgue à $n-1$ dimensions nulle.*

En effet, soit $E = \bigcup_m E_m$, où l'aire $a(E_m) < \infty$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Mais comme, en vertu des inégalités (I. 3. 1) de la monographie „Homeomorfisme cvasiconforme n-dimensionalle" (Caraman [6]) (voir aussi H. Federer [7]) nous avons $a(E_m) \geqq \Gamma^{n-1} E_m$, il résulte $\Gamma^{n-1} E_m < \infty$ pour tout m, et donc, en vertu du corollaire précédent, pour tout m, l'ensemble des points d'un plan dans lesquels se projettent une infinité de points de E_m est un ensemble de mesure Lebesgue à $n-1$ dimensions nulle. Comme la réunion d'un ensemble dénombrable d'ensembles de mesure nulle est toujours un ensemble de mesure nulle, il résulte qu'en chaque point d'un plan — à l'exception éventuelle d'un ensemble de mesure nulle — se projettent un nombre fini de points de chaque E_m, et donc, tout au plus, un ensemble dénombrable de points de E.

Nous disons que deux segments $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ *forment un angle de sommet x_0 et parallèle à un angle d'un simplex τ* s'il existe une transformation affine de la forme $g(x) = ax + b, a > 0$, telle que $g(x_0)$ soit un sommet du simplex τ et $g(\gamma_1), g(\gamma_2)$ deux arêtes de τ ayant $g(x_0)$ comme sommet.

Théorème 3. *Pour qu'un homéomorphisme $f(x)$ soit conforme dans D, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions:* (i),

(ii*) *pour tout $x_0 \in D - E_1$, où E_1 est un ensemble d'aire Σ-finie, et pour toute paire de segments $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ qui forment un angle de sommet x_0 et parallèle à un angle d'un simplex arbitraire fixe τ à n dimensions, a lieu l'inégalité*

$$A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] > 0;$$

(iii*) *pour presque tous les points $x_0 \in D$ et pour toute paire de segments $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, qui forment un angle de sommet x_0 et parallèle à un angle du simplex τ, a lieu l'inégalité*

$$A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] \geqq A(\gamma_1, \gamma_2).$$

Nous allons commencer par montrer que $f(x)$ est ACL en D dans l'hypothèse plus restrictive que τ_0 est le simplex ayant comme sommets l'origine O et l'autre extrémité des verseurs $e_1, \ldots, e_n$. Et maintenant, supposons que $\varphi(y), \mathcal{J}_0, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, $E(p, q)$ et $E(p)$ ont les mêmes significations que dans le lemme 5 et que $E = \bigcup_p E(p)$. Si $\varphi(y_0) < \infty$, alors (comme on l'a déjà vu au cours de la démonstration du lemme 5), pour tout ensemble compact $F \subset \mathcal{J}_0 \cap E(p, q)$, a lieu l'inégalité (12), et pour tout ensemble $E' \subset \mathcal{J}_0$ tel que $m_1 E' = 0$, on a aussi $A[f(E')] = 0$, même si, au lieu de la relation (11), comme dans le cas du lemme 5, nous avons la condition un peu plus large que $\mathcal{J}_0 - E$ est dénombrable.

Supposons que $O\xi$ — et donc aussi γ_1, γ_2 — est parallèle à l'un des axes de coordonnées $Ox^1, \ldots, Ox^{n-1}$; ceci implique le parallélisme des angles formés par γ_1, γ_2 et γ_3, γ_4 avec un angle de τ_0, de sorte que, en vertu de la condition (ii*), $I - E$ est un ensemble d'aire Σ-finie. Alors, en vertu du corollaire 2 du théorème de Gross (démontré plus haut),

$\mathcal{J}_0 - E$ est un ensemble tout au plus dénombrable pour presque tous les y_0 de I_n, de sorte que (conformément à la remarque faite plus haut), $E' \subset \mathcal{J}_0$ tel que $m_1 E' = 0$ implique $A[f(E')] = 0$. D'autre part, un raisonnement similaire à celui de la démonstration du lemme 5 nous permet de conclure que la condition (iii*) implique $m[I - E(p)] = 0$ lorsque $p > \operatorname{cosec}(\pi/8)$ et donc, en vertu du théorème de Fubini, l'inégalité (17) est vérifiée pour un tel p et pour presque tous les $y_0 \in I_n$, ce qui implique l'inégalité (18) pour tout ensemble compact $E \subset \mathcal{J}_0$, de sorte que $f(x)$ est AC sur $\mathcal{J}_0$ et donc sur presque tous les segments de I parallèles à l'axe $O\xi$. Mais du fait que $O\xi$ peut être supposé parallèle à chacun des axes de coordonnées $Ox^1, \ldots, Ox^{n-1}$, nous déduisons que $f(x)$ est AC sur presque tous les segments de I parallèles à chacun des axes $Ox^1, \ldots, Ox^{n-1}$, et enfin, du fait que Ox^n et $O\xi$ ont un rôle symétrique dans le raisonnement, on peut conclure que $f(x)$ est AC aussi sur tous les segments de I parallèles à Ox^n, d'où, I étant un intervalle arbitraire de D, on déduit que $f(x)$ est ACL dans D.

Démontrons maintenant que $f(x)$ est une représentation conforme dans l'hypothèse qu'elle est ACL et que τ est un simplex arbitraire, ou, ce qui revient au même, montrons que, dans ces hypothèses, $f(x)$ est 1-quasi-conforme d'après la définition analytique de Väisälä (citée au commencement de cette Note). Les deux premières conditions sont vérifiées par hypothèse. Il nous reste à vérifier que la double inégalité

$$\max |f'(x)| = |\mathcal{J}(x)| = \min |f'(x)| \tag{24}$$

a lieu en chaque point de D qui vérifie la condition (iii*), c'est-à-dire p. p. dans D. Soit x_0 un tel point. Nous pouvons supposer $x_0 = f(x_0) = 0$ et au voisinage de $x_0 = 0$

$$f(x) = a_k x^k e_k + x^n e_n + o(|x|), \tag{25}$$

où l'indice muet k parcourt les valeurs $1, \ldots, n-1$, car ceci peut s'obtenir par une similitude convenable, et les similitudes conservent les angles Nous pouvons supposer aussi $\max |f'(x)| > 0$, car $\max |f'(x)| = 0$ implique $|\mathcal{J}(x_0)| = 0$ et la double inégalité serait vérifiée dans ce cas. Nous pouvons choisir la similitude considérée plus haut de manière que $a_k \geqq 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ dans (25), mais de la condition (iii*) l'on déduit que $a_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, car si $a_k = 0$ pour au moins un indice k, alors il est facile de trouver deux segments γ_1, γ_2 faisant un angle parallèle à un angle de τ et tel que $A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] = 0$, ce qui contredirait (iii*).

Pour montrer que $f(x)$ vérifie (24), il suffit d'établir que $a_k = 1$ $(k = 1, \ldots, n-1)$. Enfin, en vertu du lemme 1, on peut supposer que

$$f(x) = a_k x^k e_k + x^n e_n \quad (a_k > 0, k = 1, \ldots, n-1).$$

Nous allons démontrer d'abord que $f(x)$ conserve les angles de τ. En effet, soient γ_1, γ_2 deux arêtes de τ formant un angle (c'est-à-dire ayant une extrémité commune). Ces deux arêtes font parti d'un triangle $\Delta \subset \partial\tau$,

que $f(x)$ transforme en un triangle Δ^*. Alors, en vertu de la condition (iii*), $A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] \geqslant A(\gamma_1, \gamma_2)$. Mais comme la somme des angles d'un triangle est constante ($= 180°$), si $A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] > A(\gamma_1, \gamma_2)$, il résulterait qu'au moins un angle de Δ doit diminuer, ce qui contredirait la condition (iii*), qui a lieu pour tous les angles formés par des paires de segments ayant le sommet en O et parallèles aux angles de τ. Donc

$$A[f(\gamma_1), f(\gamma_2)] = A(\gamma_2, \gamma_2).$$

Afin d'établir maintenant que $a_k = 1$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, considérons tout d'abord les équations

$$\frac{x^1}{l_1^1} = \ldots = \frac{x^n}{l_n^1} \quad (\delta^{ik} l_i^1 l_k^1 = 1), \qquad \frac{x^1}{l_1^2} = \ldots = \frac{x^n}{l_n^2} \quad (\delta^{ik} l_i^2 l_k^2 = 1),$$

des deux droites passant par O et qui correspondent à γ_1 et γ_2. Alors, si nous notons $\alpha = A(\gamma_1, \gamma_2)$, $\cos\alpha = \delta^{ik} l_i^1 l_k^2$. Du fait que $f(x)$ conserve l'angle α, on déduit que

$$a_1^2 l_1^1 l_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 l_{n-1}^1 l_{n-1}^2 + l_n^1 l_n^2 = \delta^{ik} l_i^1 l_k^2,$$

d'où

$$(1 - a_1^2) l_1^1 l_1^2 + \ldots + (1 - a_{n-1}^2) l_{n-1}^1 l_{n-1}^2 = 0. \tag{26}$$

Un calcul simple montre que, lorsque $n \geqslant 3$, une face à $n-1$ dimensions de τ contient au moins n arêtes. Les équations des droites passant par l'origine et correspondant à n arêtes de la même face à $n-1$ dimensions seront

$$\frac{x^1}{l_1^i} = \ldots = \frac{x^n}{l_n^i} \quad (\delta^{pq} l_p^i l_q^i = 1) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

La condition de la conservation des angles conduit aux équations suivantes analogues à (26):

$$(1 - a_1^2) l_1^i l_2^k + \ldots + (1 - a_{n-1}^2) l_{n-1}^i l_{n-1}^k = 0 \quad (i \neq k;\ i, k = 1, \ldots, n).$$

Si nous considérons le sous-système obtenu pour un i fixe et nous notons

$$(1 - a_i^2) l_k^i = \lambda_k^i \quad (k = 1, \ldots, n-1), \tag{27}$$

alors celui-ci devient de la forme

$$\lambda_1^i l_1^k + \ldots + \lambda_{n-1}^i l_{n-1}^k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

ce qui implique ou bien $\lambda_k^i = 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, ou bien la condition que les n arêtes sont situées dans le même plan à $n-1$ dimensions $\lambda_k^i x^k = 0$. Mais comme on le constate aisément, n arêtes d'un simplex (non-dégénéré) à n dimensions ne sont pas contenues dans un même plan à

$n-2$ dimensions, de sorte que ces n arêtes déterminent le plan à $n-1$ dimensions $\lambda_k^i x^k = 0$, qui est d'ailleurs le plan qui correspond à la face à $n-1$ dimensions à laquelle appartiennent ces n arêtes. Mais les plans d'au moins deux des faces à $n-1$ dimensions d'un simplex à n dimensions ont chacun un seul point comun avec l'axe Ox^n. Nous n'avons qu'à supposer que les n arêtes considérées appartiennent à l'une de ces deux faces, ce qui exclut la possibilité qu'elles soient situées toutes dans le plan $\lambda_k^i x^k = 0$, ce qui implique (comme seul cas possible) $\lambda_k^i = 0$ $(k = 1,\dots,n-1)$, ce qui, tenant compte des notations (27), peut s'écrire aussi sous la forme:

$$(1-a_k^2)\, l_k^i = 0 \quad (k = 1,\dots,n-1),$$

et ceci pour $i = 1,\dots,n$. Considérons enfin le sous-système

$$(1-a_k^2)\, l_k^i = 0 \quad (i = 1,\dots,n).$$

Si l'on supposait $a_k \neq 1$, alors, on devrait avoir $l_k^i = 0$ $(i = 1,\dots,n)$, c'est-à-dire que les n arêtes considérées devraient être situées dans le plan $x^k=0$ (plan qui contient Ox^n), ce qui est exclu par le fait que le plan à $n-1$ dimensions de la face considérée a un seul point commun avec Ox^n. Donc $a_k = 1$, et ceci pour tous les $k = 1,\dots,n-1$, ce qui établit la conformité de $f(x)$ dans D dans l'hypothèse que $f(x)$ est ACL dans D et vérifie les conditions (i), (ii*), (iii*) avec un simplex arbitraire τ.

Dans la première partie de la démonstration, nous avons prouvé qu'un homéomorphisme $f(x)$, qui vérifie les conditions du théorème avec un simplex τ_0 ayant parmi ses arêtes $e_1,\dots,e_n$ est ACL. Il nous reste à prouver que $f(x)$ est ACL aussi dans le cas général où il vérifie les hypothèses du théorème avec un simplex arbitraire τ.

Dans ce but, supposons que $g(x)$ est une transformation affine qui fait correspondre au simplex τ le simplex τ_0. Évidemment, $g(x)$ sera un homéomorphisme K-quasi-conforme d'après la définition métrique de Gehring, et, en vertu du théorème précédent, K-quasi-conforme aussi d'après la définition d'Agard et de Gehring. Soit $h = f \circ g^{-1}$. Alors h vérifie les conditions (i), (ii*), (iii*) avec τ, D, E_1 remplacés par $g(\tau) = \tau_0, g(D)$, $g(E_1)$, et $A(\gamma_1, \gamma_2)$ par $[A(\gamma_1, \gamma_2)]/K$. Du fait que $g(x)$ est une transformation affine non-dégénérée, on déduit que $g(E_1)$ est aussi un ensemble d'aire Σ-finie. On établit d'abord que $h(\xi)$ est ACL dans $g(D)$ par le même raisonnement par lequel on a établi que $f(x)$ est ACL dans D s'il vérifie les hypothèses du théorème avec le simplex τ_0, à la seule différence près qu'au lieu de prendre $p > \operatorname{cosec}(\pi/8)$, nous allons choisir $p > (\pi/8K)$. Ensuite, comme on le remarque facilement, lorsqu'on a démontré que $f(x)$ vérifie la relation (24), on ne s'est pas servi du fait que $f(x)$ est ACL dans D, de sorte que cette conclusion reste valable aussi dans notre cas, c'est-à-dire que $f(x)$ vérifie la relation (24). D'autre part, $g(x)$ étant K-quasi-conforme d'après la définition métrique de Gehring, $g^{-1}(\xi)$

l'est aussi, mais alors $g^{-1}(\xi)$ est K^{n-1}-quasi-conforme d'après les définitions de Väisälä, de sorte qu'il vérifie la double inégalité

$$\frac{\max |g^{-1\prime}(\xi)|^n}{K^{n-1}} \leqq |\mathcal{J}(\xi)| \leqq K^{n-1} \min |g^{-1\prime}(\xi)|^n$$

p. p. dans D. Enfin, en tenant compte que dans un point de différentiabilité

$$\max |f'(x)| = \sup_s \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|, \quad \min |f'(x)| = \inf_s \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|, \quad \max |g^{-1\prime}(\xi)| = \sup_s \left|\frac{\partial g^{-1}}{\partial s}\right|$$

$$\min |g^{-1\prime}(\xi)| = \inf_s \left|\frac{\partial g^{-1}}{\partial s}\right|,$$

il résulte que $\partial h/\partial \xi = (\partial f/\partial x)(\partial g^{-1}/\partial \xi)$ et donc

$$\frac{\max |h'(\xi)|^n}{K^{n-1}} = \frac{\max |f'(x)|^n}{1} \cdot \frac{\max |g^{-1\prime}(\xi)|^n}{K^{n-1}} \leqq |\mathcal{J}(x)|\,|\mathcal{J}_{g^{-1}}(\xi)| \leqq$$

$$K^{n-1} \min |f'(x)|^n \min |g^{-1\prime}(\xi)|^n = K^{n-1} |\min h'(\xi)|^n,$$

ce qui implique la K^{n-1}-quasi-conformité de $h(\xi)$ dans $g(D)$ d'après les définitions de Väisälä, et donc la $K^{\frac{2(n-1)}{n}}$-quasi-conformité d'après la définition métrique de Gehring. Mais alors, comme $f = h \circ g$ et $h(\xi)$ et $g(x)$ sont quasi-conformes, il résulte que $f(x)$ est aussi quasi-conforme dans D, et donc aussi ACL dans D; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Nous signalons, dans le cas $n = 2$, une autre définition, due à Taari [15], des homéomorphismes quasi-conformes caractérisés par la déformation des angles. Il montre aussi l'équivalence de sa définition avec les autres.

BIBLIOGRAPHIE

1. Agard S. A. et Gehring W. Frederik — *Angles and quasiconformal mappings.* Proc. London. Math. Soc. 11I, 14 A, 1965, 1—21.
2. Caraman P. Petru — *La différentiabilité des représentations quasi-conformes tridimensionnelles.* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Math. Natur. VIII, 29, 1960, 181—185.
3. — *Contributions à la théorie des représentations quasi-conformes n-dimensionnelles.* Rev. Math. Pures Appl. 6, 1961, 311—356.
4. — *A new definition of the n-dimensional quasiconformal mappings.* Nagoya Math. J. 26, 1966, 146—165.
5. — *On the equivalence of the definitions of the n-dimensional quasiconformal homeomorphisms (QCFH).* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 12, 1697, 887—941.
6. — *Homeomorfisme cvasiconforme n-dimensionale.* Bucureşti, 1968.
7. Federer H. — *The (Φ, K)-rectifiable subsets of n-space.* Trans. Amer. Math. Soc. 62, 1967, 114—192.

8. Gehring W. Frederick — *The definition and exceptional sets for quasiconformal mappings.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A I, 1960, 261.
9. — *Rings and quasiconformal mappings in space.* Trans. Amer. Math. Soc. 103, 1962, 353 393.
10. — *The Carathéodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space.* Ann. Acad. Sci Fenn. Ser. A I, 1963, 336/11.
11. Gross W — *Über das Flächenmass von Punktmengen.* Monatshefte Math. Phys. 29, 1918, 145—176.
12. Копылов А. П. — *Гомеоморфные отображения в трёхмерном пространстве Эвклида сохраняющие углы для лучей.* ДАН СССР, 170, 1966, 1016—1017.
13. Маркушевич А. И. — *О некоторых классах непрерывных отображений.* ДАН СССР 28, 1940, 301—304.
14. Saks Stanisław — *Théorie de l'intégrale. Avec une Note de Stefan Bergman,* Warszawa, 1933.
15. Taari O — *Characterisierung der Quasikonformität mit Hilfe der Winkelverzerung.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, 1966, 390.
16. Väisälä Jussi — *On quasiconformal mappings in space.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I, 1961, 298.

CARACTERIZAREA HOMEOMORFISMELOR CVASICONFORME n-DIMENSIONALE PRIN DEFORMAREA UNGHIURILOR

Rezumat

În lucrarea de față se demonstrează că definiția homeomorfismelor K-cvasiconforme n-dimensionale cu ajutorul deformării unghiurilor este echivalentă cu definiția metrică a lui Gehring și cu cea a lui Markușevici-Pesin (cu același K). Din echivalența stabilită, rezultă ca un caz particular pentru $K=1$ că invarianța măsurii interioare a unghiurilor topologice caracterizează reprezentările conforme, adică, în cazul $n>2$, restricția transformării lui Möbius la domeniul considerat.

În a doua parte a lucrării, lărgind și mai mult ipotezele acestei teoreme, se demonstrează că condiția necesară și suficientă pentru ca un homeomorfism să fie conform este ca să invarieze aproape peste tot în D unghiurile paralele cu unghiurile făcute de muchiile unui simplex fix nedegenerat n-dimensional τ și ca pentru toți $x \in D$ cu excepția eventuală a unei mulțimi de arie Σ-finită, măsura interioară a unghiului topologic al imaginii oricărei perechi de segmente formînd un unghi cu vîrful în x și paralel cu un unghi a lui τ să fie strict pozitiv.

SUR LES SYSTÈMES DE PFAFF DE CARACTÈRE TROIS DONT LE SYSTÈME DÉRIVÉ A MOINS DE $s-3$ ÉQUATIONS

PAR

I. MOISINI

§ 1. Ce travail a comme but l'étude des systèmes de s équations de Pfaff de caractère $s_1=3$, dont le système dérivé contient moins de $s-3$ équations. L'auteur généralise quelques résultats obtenus par E. Cartan dans [1]. Pour toutes les notions employées le lecteur est envoyé à [2].

Soit

$$\omega_i \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dx_j = 0 \qquad (i=1,2,\dots,s) \tag{1.1}$$

un système de Pfaff ayant s équations indépendantes et dont le premier caractère est $s_1=3$; a_{ij} sont des fonctions analytiques dans un domaine de l'espace des variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$. Son système dérivé est alors formé de $s-3$ équations indépendantes au plus.

Nous allons étudier seulement le cas où ce système dérivé contient moins de $s-3$ équations, autrement dit, les s différentielles extérieures $d\omega_1, d\omega_2, \dots, d\omega_s$ seraient liées par moins de $s-3$ relations linéaires (modulo $\omega_1, \dots, \omega_s$). Pour fixer les idées supposons que l'on n'ait acune congruence de la forme

$$u_1\, d\omega_1 + u_2\, d\omega_2 + u_3\, d\omega_3 + u_4\, d\omega_4 \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s} \tag{1.2}$$

et soit h le genre minimum de l'expression:

$$u_1\, d\omega_1 + u_2\, d\omega_2 + u_3\, d\omega_3 + u_4\, d\omega_4 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s} \tag{1.3}$$

où les coefficients u_i ne sont pas tous simultanément nuls.