8. Gehring W. Frederick — *The definition and exceptional sets for quasiconformal mappings*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A I, 1960, 261.
9. — *Rings and quasiconformal mappings in space*. Trans. Amer. Math. Soc. 103, 1962, 353 393.
10. — *The Carathéodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, 1963, 336/11.
11. Gross W — *Über das Flächenmass von Punktmengen*. Monatshefte Math. Phys. 29, 1918, 145—176.
12. Копылов А. П. — *Гомеоморфные отображения в трёхмерном пространстве Эвклида сохраняющие углы для лучей*. ДАН СССР, 170, 1966, 1016—1017.
13. Маркушевич А. И. — *О некоторых классах непрерывных отображений*. ДАН СССР 28, 1940, 301—304.
14. Saks Stanisław — *Théorie de l'intégrale. Avec une Note de Stefan Bergman*, Warszawa, 1933.
15. Taari O — *Characterisierung der Quasikonformität mit Hilfe der Winkelverzerung*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, 1966, 390.
16. Väisälä Jussi — *On quasiconformal mappings in space*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I, 1961, 298.

CARACTERIZAREA HOMEOMORFISMELOR CVASICONFORME n-DIMENSIONALE PRIN DEFORMAREA UNGHIURILOR

Rezumat

În lucrarea de faţă se demonstrează că definiţia homeomorfismelor K-cvasiconforme n-dimensionale cu ajutorul deformării unghiurilor este echivalentă cu definiţia metrică a lui Gehring şi cu cea a lui Markuşevici-Pesin (cu acelaşi K). Din echivalenţa stabilită, rezultă ca un caz particular pentru $K=1$ că invarianţa măsurii interioare a unghiurilor topologice caracterizează reprezentările conforme, adică, în cazul $n>2$, restricţia transformării lui Möbius la domeniul considerat.

În a doua parte a lucrării, lărgind şi mai mult ipotezele acestei teoreme, se demonstrează că condiţia necesară şi suficientă pentru ca un homeomorfism să fie conform este ca să invarieze aproape peste tot în D unghiurile paralele cu unghiurile făcute de muchiile unui simplex fix nedegenerat n-dimensional τ şi ca pentru toţi $x \in D$ cu excepţia eventuală a unei mulţimi de arie Σ-finită, măsura interioară a unghiului topologic al imaginii oricărei perechi de segmente formînd un unghi cu vîrful în x şi paralel cu un unghi a lui τ să fie strict pozitiv.

SUR LES SYSTÈMES DE PFAFF DE CARACTÈRE TROIS DONT LE SYSTÈME DÉRIVÉ A MOINS DE $s-3$ ÉQUATIONS

PAR

I. MOISINI

§ 1. Ce travail a comme but l'étude des systèmes de s équations de Pfaff de caractère $s_1=3$, dont le système dérivé contient moins de $s-3$ équations. L'auteur généralise quelques résultats obtenus par E. Cartan dans [1]. Pour toutes les notions employées le lecteur est envoyé à [2].

Soit

$$\omega_i \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dx_j = 0 \qquad (i=1,2,\dots,s) \tag{1.1}$$

un système de Pfaff ayant s équations indépendantes et dont le premier caractère est $s_1=3$; a_{ij} sont des fonctions analytiques dans un domaine de l'espace des variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$. Son système dérivé est alors formé de $s-3$ équations indépendantes au plus.

Nous allons étudier seulement le cas où ce système dérivé contient moins de $s-3$ équations, autrement dit, les s différentielles extérieures $d\omega_1, d\omega_2, \dots, d\omega_s$ seraient liées par moins de $s-3$ relations linéaires (modulo $\omega_1, \dots, \omega_s$). Pour fixer les idées supposons que l'on n'ait acune congruence de la forme

$$u_1\, d\omega_1 + u_2\, d\omega_2 + u_3\, d\omega_3 + u_4\, d\omega_4 \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s} \tag{1.2}$$

et soit h le genre minimum de l'expression:

$$u_1\, d\omega_1 + u_2\, d\omega_2 + u_3\, d\omega_3 + u_4\, d\omega_4 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s} \tag{1.3}$$

où les coefficients u_i ne sont pas tous simultanément nuls.

Nous pouvons alors supposer que l'on a

$$(1.4) \qquad [d\omega_1]^{h+1} = 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s}$$

et pour aucun système de valeurs des u_i on n'a pas

$$(1.5) \qquad [u_1 d\omega_1 + u_2 d\omega_2 + u_3 d\omega_3 + u_4 d\omega_4]^h \equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s}.$$

Nous allons commencer notre étude en supposant d'abord que h est égal à 1.

§ 2. Supposant $h = 1$ on peut mettre le système obtenu en différentiant extérieurement (1.1) sous la forme

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} d\omega_1 &\equiv [\varpi_1 \varpi_2] \\ d\omega_2 &\equiv \sum_{i,j=1}^{\rho} A_{ij} [\varpi_i \varpi_j] \\ d\omega_3 &\equiv \sum_{i,j=1}^{\rho} B_{ij} [\varpi_i \varpi_j] \\ d\omega_4 &\equiv \sum_{i,j=1}^{\rho} C_{ij} [\varpi_i \varpi_j] \\ d\omega_5 &\equiv 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ d\omega_\rho &\equiv 0, \end{aligned} \qquad \pmod{\omega_1, \ldots, \omega_s}$$

où avec ρ on a noté la différence entre le nombre n des variables indépendantes et le nombre s des équations du système de Pfaff (1.1), $\rho = n - s$.

Les coefficients A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} sont supposés antisymétriques dans les indices i et j.

D'après la définition du caractère s_1, tous les déterminants du quatrième ordre de la matrice

$$(\mathfrak{M}) \equiv \begin{Vmatrix} \varpi_2 & -\varpi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \sum_{i=1}^{\rho} A_{1i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} A_{2i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} A_{3i}\varpi_i & \ldots & \sum_{i=1}^{\rho} A_{\rho i}\varpi_i \\ \sum_{i=1}^{\rho} B_{1i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} B_{2i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} B_{3i}\varpi_i & \ldots & \sum_{i=1}^{\rho} B_{\rho i}\varpi_i \\ \sum_{i=1}^{\rho} C_{1i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} C_{2i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} C_{3i}\varpi_i & \ldots & \sum_{i=1}^{\rho} C_{\rho i}\varpi_i \end{Vmatrix}$$

doivent être nuls, quels que soient $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$. Il résulte en particulier de là que tous les déterminants du troisième ordre de la matrice

$$(M) \equiv \begin{Vmatrix} \sum A_{3i}\varpi_i & \ldots & \sum A_{\rho i}\varpi_i \\ \sum B_{3i}\varpi_i & \ldots & \sum B_{\rho i}\varpi_i \\ \sum C_{3i}\varpi_i & \ldots & \sum C_{\rho i}\varpi_i \end{Vmatrix}$$

doivent être identiquement nuls. Par suite, d'après un théorème d'algèbre bien connu, entre les lignes et les colonnes des déterminants de troisième ordre de la matrice (M) il existe des relations linéaires à coefficients pas tous nuls.

Nous pouvons donc écrire:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} A_{ki} + \alpha_k A_{3i} + \beta_k A_{4i} = 0, \\ B_{ki} + \alpha_k B_{3i} + \beta_k B_{4i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, \rho; h = 5, 6, \ldots, \rho) \\ C_{ki} + \alpha_k C_{3i} + \beta_k C_{4i} = 0, \end{cases}$$

en supposant évidemment que le déterminant du deuxième ordre

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{\rho} A_{3i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} A_{4i}\varpi_i \\ \sum_{i=1}^{\rho} B_{3i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} B_{4i}\varpi_i \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul. Cette dernière hypothèse ne constitue pas une restriction imposée au système (2.1). En vérité, si tous les déterminants du deuxième ordre de la matrice (M) étaient nuls — leur nombre pouvant être aussi zéro — alors, en écrivant les combinaisons linéaires qui existent entre leurs colonnes on obtiendrait:

$$\begin{cases} A_{ki} = l_k A_{3i}, \\ B_{ki} = l_k B_{3i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, \rho; k = 4, 5, \ldots, \rho). \\ C_{ki} = l_k C_{3i}. \end{cases}$$

En faisant dans les seconds membres de ces formules, $i = 3$, on obtient:

$$\begin{aligned} A_{43} &= \ldots = A_{\rho 3} = 0, \\ B_{43} &= \ldots = B_{\rho 3} = 0, \\ C_{43} &= \ldots = C_{\rho 3} = 0. \end{aligned}$$

Par suite, dans les éléments de la matrice (M) il n'entre que les formes ϖ_1 et ϖ_2. En faisant encore la transformation:

$$\varpi_3^* = \varpi_3 + l_4 \varpi_4 + \cdots + l_\rho \varpi_\rho ,$$

on voit facilement qu'entre les quatre différentielles extérieures — qui à présent s'expriment au moyen de seulement trois formes ϖ indépendantes — il existe une congruence de la forme (1.2), ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc le rang de la matrice (M) est au moins deux. Les éléments caractéristiques du système (1.1) s'expriment par les équations:

$$(2.3)\quad \begin{cases} \varpi_1 = 0, \qquad \varpi_2 = 0, \\ \sum_{j=1}^{\rho} A_{ij}\varpi_j = 0 \quad \sum_{j=1}^{\rho} B_{ij}\varpi_j = 0 \quad \sum_{j=1}^{\rho} C_{ij}\varpi_j = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, \rho). \end{cases}$$

En substituant les formules (2.2) dans les équations (2.3) et en faisant les notations

$$(2.4)\quad \begin{cases} \varpi_3^* \equiv \varpi_3 - \sum_{k=5}^{\rho} \alpha_k \varpi_k, \\ \varpi_4^* \equiv \varpi_4 - \sum_{k=5}^{\rho} \beta_k \varpi_k, \end{cases}$$

on voit, en tenant compte aussi de l'antisymétrie des coefficients A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, que les équations (2.3) des éléments caractéristiques se réduisent à quatre seulement, à savoir:

$$(2.5)\qquad \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \varpi_4 = 0,$$

où on a évidemment renoncé à l'astérisque. Dans ce cas, si ρ est supérieur à 4, le système admet un élément caractéristique à $\rho - 4$ dimensions.

La réciproque est aussi juste. En vérité, si pour simplifier on effectue des combinaisons linéaires entre les formes extérieures quadratiques $d\omega_1$, $d\omega_2$, $d\omega_3$, $d\omega_4$, le système (2.1) peut être mis sous la forme:

$$(2.6)\quad \begin{aligned} d\omega_1 &\equiv [\varpi_1 \varpi_2] \\ d\omega_2 &\equiv [\varpi_3 \varpi_4] + A_{23}[\varpi_2 \varpi_3] + A_{24}[\varpi_2 \varpi_4], \\ d\omega_3 &\equiv [\varpi_1 \varpi_4] + B_{23}[\varpi_2 \varpi_3] + B_{24}[\varpi_2 \varpi_4], \\ d\omega_4 &\equiv [\varpi_1 \varpi_3] + C_{23}[\varpi_2 \varpi_3] + C_{24}[\varpi_2 \varpi_4], \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s), \\ d\omega_5 &\equiv 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\omega_\rho &\equiv 0. \end{aligned}$$

Pour ce système, la matrice (M) devient une matrice à deux colonnes et trois lignes, la matrice $(\mathfrak{M})$ étant une matrice quadratique à quatre lignes et quatre colonnes dont le déterminant est identiquement nul, comme l'on voit facilement par un calcul direct. Ce qui prouve que l'on a manifestement $s_1 = 3$.

Remarque: La démonstration que nous avons faite jusqu'ici est en général analogue à celle donnée par E. Cartan ([1], p. 261—264) pour le cas $s_1 = 2$. Dans le cas traité par E. Cartan la matrice du système (1.1) qui correspond à la matrice (M) du système (2.6) du présent article, est une matrice unicolonnaire, donc elle ne contient aucun déterminant du second ordre. Pour obtenir cette matrice, E. Cartan se sert du fait que tous les déterminants du second ordre de la matrice (7) doivent être nuls. Ceci le conduit d'un côté à la „proportionnalité" (ce mot, assez incorect, doit être remplacé par „combinaison linéaire") des lignes, ce qui est absurde, car cela contredit l'hypothèse, et d'un autre côté à la proportionnalité des colonnes qui le conduit au système (1.1). Le fait que la proportionnalité des lignes conduit à une absurdité, tandis que celle des colonnes non, est dû à l'inexistence des déterminants du second ordre de la matrice associée au système (1.1). Nous avons simplifié notre démonstration en renonçant à considérer les combinaisons linéaires entre les lignes de la matrice (M), ce qui est complètement inutile même dans la démonstration de Cartan.

§ 3. Étudions maintenant le cas où h est supérieur à l'unité. En procédant comme au § 2, le système obtenu en différentiant extérieurement (1.1) peut être mis sous la forme:

$$(3.1)\quad \begin{aligned} d\omega_1 &\equiv [\varpi_1 \varpi_2] + [\varpi_3 \varpi_4] + \ldots + [\varpi_{2h-1} \varpi_{2h}], \\ d\omega_2 &\equiv \sum_{i,j=1}^{\rho} A_{ij}[\varpi_i \varpi_j], \\ d\omega_3 &\equiv \sum_{i,j=1}^{\rho} B_{ij}[\varpi_i \varpi_j], \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1 \omega_2 \ldots, \omega_s), \\ d\omega_4 &\equiv \sum_{i,j=1}^{\rho} C_{ij}[\varpi_i \varpi_j], \\ d\omega_5 &\equiv 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\omega_s &\equiv 0. \end{aligned}$$

les coefficients A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} étant toujours antisymétriques, mais évidemment ce ne sont plus les mêmes du § 2.

Ici forcément $\rho > 2h$, sinon l'equation:

$$[d\omega_2 - \lambda d\omega_1]^h = 0,$$

qui est équivalente à une équation du degré h en λ, admettrait au moins une racine, ce qui contredirait (1.5).

Formons, comme au § 2, la matrice $(\mathfrak{M}^*)$:

$$(\mathfrak{M}^*) \equiv \left\| \begin{matrix} \varpi_2 & -\varpi_1 & \dots & \varpi_{2h-1} & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{i=1}^{\rho} A_{1i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} A_{2i}\varpi_i & \dots & \sum_{i=1}^{\rho} A_{2h,i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} A_{2h+1,i}\varpi_i & \dots & \sum_{i=1}^{\rho} A_{\rho,i}\varpi_i \\ \sum_{i=1}^{\rho} B_{1i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} B_{1i}\varpi_i & \dots & \sum_{i=1}^{\rho} B_{2h,i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} B_{2h+1,i}\varpi_i & \dots & \sum_{i=1}^{\rho} B_{\rho,i}\varpi_i \\ \sum_{i=1}^{\rho} C_{1i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} C_{1i}\varpi_i & \dots & \sum_{i=1}^{\rho} C_{2h,i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} C_{2h+1,i}\varpi_i & \dots & \sum_{i=1}^{\rho} C_{\rho,i}\varpi_i \end{matrix} \right\|$$

Tous les déterminants du quatrième ordre de cette matrice doivent être nuls et, par suite, tous les déterminants du troisième ordre de la matrice

$$(M^*) \equiv \left\| \begin{matrix} \sum_{i=1}^{\rho} A_{2h+1,i}\omega_i & \sum_{i=1}^{\rho} A_{2h+2,i}\varpi_i & \dots & \sum_{i=1}^{\rho} A_{\rho,i}\varpi_i \\ \sum_{i=1}^{\rho} B_{2h+1,i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} B_{2h+2,i}\varpi_i & \dots & \sum_{i=1}^{\rho} B_{\rho,i}\varpi_i \\ \sum_{i=1}^{\rho} C_{2h+1,i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\lambda} C_{2h+2,i}\varpi_i & \dots & \sum_{i=1}^{\rho} C_{\rho,i}\varpi_i \end{matrix} \right\| .$$

En raisonnant comme au § 2, l'existence des combinaisons linéaires qui doivent avoir lieu entre les colonnes de tous les déterminants du troisième ordre de (M^*), nous conduisent aux formules:

$$(3.2) \begin{cases} A_{2h+j,i} + \alpha_{2h+j} A_{2h+1,i} + \beta_{2h+j} A_{2h+2,i} = 0, \\ B_{2h+j,i} + \alpha_{2h+j} B_{2h+1,i} + \beta_{2h+j} B_{2h+2,i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \rho; j = 3, 4, \dots, \rho) \\ C_{2h+j,i} + \alpha_{2h+j} C_{2h+1,i} + \beta_{2h+j} C_{2h+2,i} = 0. \end{cases}$$

Nous avons évidemment supposé que le déterminant

$$\Delta^* \equiv \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{\rho} A_{2h+1,i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} A_{2h+2,i}\varpi_i \\ \sum_{i=1}^{\rho} B_{2h+1,i}\varpi_i & \sum_{i=1}^{\rho} B_{2h+2,i}\varpi_i \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Cela n'est pas une restriction pour le système (3.1) comme on peut le voir par un raisonnement analogue à celui fait dans le § 2

pour le déterminant Δ. En effectuant sur les formes ϖ une substitution linéaire convenable, on voit que les quatre différentielles extérieures non nulles (mod $\omega_1 \dots \omega_s$) s'expriment au moyen de $2h+2$ formes ϖ indépendantes.

De plus, il ne peut exister aucune terne de coefficients α, β, γ non tous nuls, de façon qu'ait lieu une relation:

$$(3.3) \qquad \alpha A_{2h+1,i} + \beta B_{2h+1,i} + \gamma C_{2h+1,i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2h),$$

car si une terne de cette façon existait, nous serions en état de trouver un coefficient l tel que

$$[l d\omega_1 + \alpha d\omega_2 + \beta d\omega_3 + \gamma d\omega_4]^h \equiv 0 \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s),$$

ce qui serait contraire à l'hypothèse (1.5).

Cela étant, considérons tous les déterminants du troisième ordre de la matrice

$$\begin{vmatrix} A_{1,2h+1} & A_{2,2h+1} \dots A_{2h,2h+1} \\ B_{1,2h+1} & B_{2,2h+1} \dots B_{2h,2h+1} \\ C_{1,2h+1} & C_{2,2h+1} \dots C_{2h,2h+1} \end{vmatrix} .$$

Il est clair que tous les déterminants du troisième ordre de cette matrice ne peuvent être nuls, car dans ce cas de l'existence des combinaisons linéaires entre les lignes de cette matrice, on retomberait sur une relation de la forme (3.3) ce qui est absurde.

Prenons donc, pour fixer les idées, le déterminant

$$\Delta^{**} \equiv \begin{vmatrix} A_{1,2h+1} & A_{2,2h+1} & A_{3,2h+1} \\ B_{1,2h+1} & B_{2,2h+1} & B_{3,2h+1} \\ C_{1,2h+1} & C_{2,2h+1} & C_{3,2h+1} \end{vmatrix}$$

et supposons-le différent de zéro. En développant le déterminant du quatrième ordre formé par les premières quatre colonnes de la matrice $(\mathfrak{M}^*)$ on déduit que les coefficients du terme en $[\varpi_3 \varpi_{2h+1}^3]$ — qui est précisément Δ^{**} — n'est pas nul, donc $s_1 > 3$ ce qui est absurde.

Nous voyons donc que, dans le cas où $h > 1$, quatre différentielles extérieures quelconques $d\omega_i$ $(i = 1, 2, \dots, s)$ sont liées par une relation linéaire (1.2), autrement dit que le système dérivé est formé de $s-3$ équations.

Cela nous permet de formuler le

Théorème. *Le système dérivé d'un système de Pfaff de s équations à coefficients arbitraires et de caractère trois, est formé de $s-3$ équations. Il n'y a qu'une exception: lorsque le système admet des caractéristiques à $n-s-4$ dimensions, alors le système dérivé peut contenir $s-4$ équations seulement.*

§ 4. Nous allons maintenant nous occuper de l'intégration d'un système de Pfaff (1.1) de caractère $s_1 = 3$ dont le système dérivé a $s-4$

équations indépendantes. Dans ce cas le système obtenu en différentiant extérieurement (1.1) peut être mis sous la forme (2.6).

Si $\rho = n - s = 4$ il n'y a pas d'élément caractéristique et la formule bien connue:

$$n = s + s_1 + \dots + s_p + p$$

montre que l'on a $p = 1, s_1 = 3$.

Conformément au deuxième théorème d'existence de Cartan l'intégrale générale du système (1.1) est unidimensionnelle et dépend de trois fonctions arbitraires d'une seule variable indépendante. Le système peut être regardé comme un système de s équations différentielles ordinaires à $s + 3$ fonctions inconnues et on peut prendre arbitrairement trois de ces fonctions inconnues.

Si $\rho > 4$, on a des caractéristiques à $\rho - 4$ dimensions et l'on a

$$p = \rho - 3, \quad s_1 = 3, \quad s_2 = s_3 = \dots = s_p = 0.$$

En effectuant alors des opérations d'ordre $s + 4, s + 3, \dots, 2, 1$ nous sommes ramenés au cas où $\rho = 4$, c'est-à-dire à des équations différentielles ordinaires.

L'efficacité et la facilité de maniement des méthodes purement algébriques que nous avons utilisées, nous a encore permis de généraliser les résultats obtenus ici dans le cas des systèmes de Pfaff de s équations indépendantes dont le premier caractère s_1 est quelconque, mais dont le système dérivé a moins de $s - s_1$ équations indépendantes.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan E. — *Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux.* Bull. Soc. Math. France, T. 28 (1901), p. 233—302.
2. Cartan E. — *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* Paris, 1945.

ASUPRA SISTEMELOR PFAFF DE CARACTER TREI CU SISTEM DERIVAT AVÎND MAI PUŢIN DECÎT $s - 3$ ECUAŢII

Rezumat

Autorul se ocupă de problema sistemelor Pfaff de caracter trei' pentru care sistemul derivat are efectiv mai puţin de $s - 3$ ecuaţii independente. Se arată care este forma sistemului obţinut prin diferenţierea exterioară a sistemului Pfaff dat în acest caz şi se stabileşte o teoremă care arată cînd poate sistemul derivat avea mai puţin de $s - 3$ ecuaţii. Se integrează sistemul în această eventualitate, folosindu-se teoremele de existenţă ale lui Cartan.

Rezultatele obţinute se extind simplu la cazul sistemelor Pfaff cu s_1 arbitrar avînd sistem derivat format cu mai puţin ca $s - s_1$ ecuaţii independente.

AN EXTREMAL PROBLEM ASSOCIATED WITH A CERTAIN NON-LINEAR INTEGRAL EQUATION [1])

BY

R. H. ROLWING and I. A. BARNETT

Introduction. In a previous paper entitled *On a System of Quadratic Equations and its Integral Analogue* (An. St. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi. Sect. I, 1965, p. 58) the authors have discussed the integral equation

$$y^2(x) = [y(x) - K(x)] \int_0^1 y(s)\, ds.$$

Let us denote by $I(c)$ the totality of values c for which

$$1 - cK(x) \geqslant 0 \text{ for every } x \text{ on } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Here, $K(x)$ denotes a real valued function defined on the interval $0 \leqslant x \leqslant 1$ having the following properties:

(i) $K(x)$ is bounded on $0 \leqslant x \leqslant 1$,

(ii) $K(x)$ is continuous almost everywhere on $0 \leqslant x \leqslant 1$,

(iii) $\int_0^1 K(x)\, dx \neq 0$,

(iv) $K(x)$ is positive on some subinterval of $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Such a function will be called *admissible*. Furthermore, let $\varepsilon(x)$ be a step function assuming values ± 1 on $0 \leqslant x \leqslant 1$; otherwise it is continuous a.e. with the assumption that there is at least one jump discontinuity. Then it has been shown that there exists a c on $I(c)$ for which

[1]) This research was supported in part by National Science Foundation grant G19281.