SUR LES DISTRIBUTIONS STRUCTURELLES D'UNE G-STRUCTURE

PAR

GH. GHEORGHIEV

La distribution $\mathfrak{D}_p$ d'une variété différentiable V_n douée d'une G-structure est appelée structurelle (DS) si elle est involutive, invariante aux transformations du groupe G (qui agit dans l'espace tangent) et reste constante sur ses variétés intégrales, inclusivement sur la variété intégrale de dimension maximum $V_p \subset V_n$. La DS peut varier si l'on passe d'une variété intégrale à l'autre; si la $\mathfrak{D}_p$ reste invariante sur toutes les variétés intégrales, on dit que la $\mathfrak{D}_p$ est une distribution structurelle absolue (DSA). L'étude globale d'une DS $\mathfrak{D}_p \subset V_n$ revient à douer la base V_n d'une $\mathfrak{G}_1$-structure; qui peut être appelée grassmannienne. Sur les variétés intégrales de dimension maximum V_p de la DS considérée est induite, par restriction sur V_p, une g-structure. Maintenant, si l'on considère la DS $\mathfrak{D}_q \subset V_p$ par rapport à la g-structure induite, l'étude globale de la configuration $\mathfrak{D}_q \subset \mathfrak{D}_p \subset V_n$ peut être appelée configuration Myller [11, 12]; cela revient à douer la base V_n d'une G_1-structure. La recherche de la structure des groupes $\mathfrak{G}_1$ et G_1 et de quelques-uns de leurs sous-groupes remarquables, en particulier les sous-groupes $\mathfrak{A}_1$, K_1, permet d'introduire sur V_n quelques structures intéressantes pour la solution du problème de la fibration principale ou quelconque de M. Ehresmann d'une variété différentiable [1]. L'application montre comment on peut utiliser ces considérations à l'étude de la structure d'un pseudogroupe Lie infini.

Pour éviter les répétitions, on suppose connus les résultats de la Note [8].

1. Les distributions structurelles. Une distribution $\mathfrak{D}_p$ de la variété V_n douée d'une D_n^1-structure (où $D_n^1 = GL(n, R)$), donnée par [8]

$$(1) \qquad \theta^{i'} = \omega^{i'} - A_b^{i'} \omega^b = 0, \quad a, b, c = 1,\dots,p; \; i', j', k' = p+1,\dots,n,$$

sera une DS si

$$(2) \qquad d\theta^{i'} \pmod{\theta^{j'}} = 0 \qquad \text{et} \quad (3) \quad dA_b^{i'} \pmod{\theta^{j'}} = 0;$$

de même tous les prolongements réguliers de celle-ci par rapport aux formes $\omega^a \pmod{\theta^{i'}}$ satisferont à des conditions similaires à (3).

S la $\mathfrak{D}_p$ est une DSA, alors la condition (3) est remplacée par

$$dA^{i'}_a = 0 \tag{3'}$$

et par les conditions similaires aux prolongements de celle-ci.

Le problème: si une distribution donnée est une DS ou DSA peut être résolu en utilisant l'algorithme de Cartan de la M. R. M. jusqu'à l'épuisement ou jusqu'à la stabilisation des paramètres du groupe D^2_n (ou G^1 de la G-structure) [2, 8].

Le processus du prolongement du système (1) par rapport aux $\omega^a \pmod{\theta^{i'}}$ étant régulier, on a

$$\Delta A^{i'}_{b_1} = A^{i'}_{b_1 b_2}\,\omega^{b_2},\ldots,\quad \Delta A^{i'}_{b_1\ldots b_s} = A^{i'}_{b_1\ldots b_s b_{s+1}}\,\omega^{b_{s+1}},\ldots \tag{4}$$

où

$$\Delta A^{i'}_{b_1\ldots b_s} = dA^{i'}_{b_1\ldots b_s} + \omega^{i'}_{b_1\ldots b_s} + \cdots \tag{5}$$

Eu égard à (3), nous avons $dA^{i'}_{b_1\ldots b_s} \pmod{\theta^{i'}} = 0$ et d'autant plus $dA^{i'}_{b_1\ldots b_s} \pmod{\omega^i} = \delta A^{i'}_{b_1\ldots b_s} = 0$.

En choisissant convenablement les origines des coordonnées sur les variétés grassmanniennes $V_{\mathfrak{G}_1}(A^{i'}_b)$, $V_{\mathfrak{G}_2}(A^{i'}_b,\ A^{i'}_{b_1 b_2})$,... [8], les équations de la DS $\mathfrak{D}_p$ et de ses prolongements $(\mathrm{mod}\ \omega^i)$ donnent la suite de relations

$$\overline{\omega}^{i'}_b = 0,\quad \overline{\omega}^{i'}_{b_1 b_2} = 0,\ldots \tag{6}$$

Si la $\mathfrak{D}_p$ est une DSA, cela ajoute aussi les formules

$$\overline{\omega}^{i'}_{bj'} = 0,\quad \overline{\omega}^{i'}_{b_1 b_2 j'} = 0,\ldots \tag{7}$$

Si la V_n est douée d'une G-structure, alors les suites de plus haut deviendront respectivement [8]

$$C^{i'}_{\alpha b}\,\pi^\alpha = 0,\quad C^{\alpha'}_{\alpha_1 b}\,\pi^{\alpha_1} = 0, \qquad (7')\quad C^{\alpha'}_{\alpha_1 j'}\,\pi^{\alpha_1} = 0, \tag{6'}$$

Je dis que $\overline{\omega}^{i'}_a = 0$ est le système de définition du sous-groupe $\mathfrak{G}_1$ stationnaire d'un point de la variété grassmannienne $V_{\mathfrak{G}_1}$ sur laquelle opère le groupe D^1_n. Pour l'étude de $\mathfrak{G}_1$ et de quelques-uns de ses sous-groupes remarquables, nous écrirons les équations de structure de D^1_n sous la forme

$$\begin{aligned} d\overline{\omega}^{i'}_a &= \overline{\omega}^b_a \wedge \overline{\omega}^{i'}_b + \overline{\omega}^{j'}_a \wedge \overline{\omega}^{i'}_{j'}, & d\overline{\omega}^a_b &= \overline{\omega}^c_b \wedge \overline{\omega}^a_c + \overline{\omega}^{i'}_b \wedge \overline{\omega}^a_{i'}, \\ d\overline{\omega}^a_{i'} &= \overline{\omega}^b_{i'} \wedge \overline{\omega}^a_b + \overline{\omega}^{j'}_{i'} \wedge \overline{\omega}^a_{j'}, & d\overline{\omega}^{i'}_{j'} &= \overline{\omega}^b_{j'} \wedge \overline{\omega}^{i'}_b + \overline{\omega}^{h'}_{j'} \wedge \overline{\omega}^{i'}_{h'}. \end{aligned} \tag{8}$$

De la première on voit que $\overline{\omega}^{i'}_a = 0$ est un système complètement intégrable, tandis que de (8_{2-4}), il résulte que le système $\overline{\omega}^a_b = \overline{\omega}^a_{i'} = \overline{\omega}^{i'}_{j'} = 0$ est aussi complètement intégrable. Par conséquent ces deux systèmes de Pfaff définiront deux sous-groupes complémentaires $\mathfrak{G}_1$ et $\overline{\mathfrak{A}}_1$, ayant $D^1_n = \overline{\mathfrak{A}}_1 . \mathfrak{G}_1$. Le sous-groupe $\mathfrak{A}_1$ d'ordre $p(n-p)$ est abélien ayant $\overline{\omega}^a_{i'}$ (modulo toutes les autres) comme ses formes invariantes.

De (8) $(\mathrm{mod}\ \omega^{i'}_a)$ il résulte la formule remarquable suivante qui met en évidence la structure de $\mathfrak{G}_1$:

$$\mathfrak{G}_1 = (D^1_p \times D^1_{n-p}) \overline{\times} \mathfrak{A}_1 \tag{9}$$

où $\mathfrak{A}_1$ est un sous-groupe invariant abélien de celui-ci, d'ordre $p(n-p)$ ayant $\overline{\omega}^a_{i'}$ (modulo toutes les autres) comme ses formes invariantes. Nous avons donc $D^1_n = \overline{\mathfrak{A}}_1 . [(D^1_p \times D^1_{n-p}) \overline{\times} \mathfrak{A}_1]$.

Dans ce qui suit, nous aurons besoin de considérer encore le sous-groupe $\mathfrak{H}_1$ donné par

$$\overline{\omega}^{i'}_a = \overline{\omega}^a_b = 0 \tag{10}$$

et le sous-groupe complémentaire de celui-ci $\overline{\mathfrak{H}}_1$, donné par

$$\overline{\omega}^a_{i'} = \overline{\omega}^{i'}_{j'} = 0; \tag{10'}$$

nous avons donc $D^1_n = \mathfrak{H}_1 . \overline{\mathfrak{H}}_1$.

On déduit aisément les liaisons suivantes:

$$\mathfrak{G}_1 = D^1_p \overline{\times} \mathfrak{H}_1,\quad \mathfrak{H}_1 = D^1_{n-p} \overline{\times} \mathfrak{A}_1 .$$

Remarque. Si l'on considère une D S complémentaire, $\mathfrak{D}_{n-p} \subset V_p$, en choisissant convenablement les origines des coordonnées sur les variétés grassmanniennes correspondantes $V_{\overline{\mathfrak{G}}_1}$, $V_{\overline{\mathfrak{G}}_2}$,..., alors la D_{n-p} et ses prolongements réguliers par rapport à $\omega^{i'}$ seront $\omega^a = 0$, $\omega^a_{i'} = 0$, $\omega^a_{j'_1 j'_2} = 0$,... De (8) il résulte d'une façon analogue que $D^1_n = \mathfrak{A}_1 . \overline{\mathfrak{G}}_1 = \mathfrak{A}_1 [D^1_{n-p} \times D^1_p) \overline{\times} \overline{\mathfrak{A}}_1]$, où $\mathfrak{A}_1$, $\overline{\mathfrak{G}}_1$ ont la même signification comme plus haut; on déduit encore $\overline{\mathfrak{H}}_1 = D^1_p \overline{\times} \overline{\mathfrak{A}}_1$.

Les sous-groupes $\mathfrak{G}_1$ ou $\mathfrak{H}_1$ (respectivement $\overline{\mathfrak{G}}_1$ ou $\overline{\mathfrak{H}}_1$) définissent sur V_n les structures subordonnées, puisque tant $\mathfrak{G}_1$ que $\mathfrak{H}_1$ ont toujours une même représentation sur $E_n = T_x$ dans tous les points $x \in V_n$. D'ici il résulte qu'une $\mathfrak{G}_1$-structure sur V_n est caractérisée par l'invariance d'une direction p-plane. Par exemple, pour $p = 1$, les équations du sous-groupe $\mathfrak{G}_1$ seront $\overline{\omega}^{i'}_1 = 0$, $i' = 2,\ldots,n$; cette $\mathfrak{G}_1$-structure laisse invariante une direction de dimension 1; un cas particulier de celle-ci est la structure centro-affine [5]. Ces deux structures ont été rencontrées par S. Kobayashi [9].

Si l'on considère simultanément deux D S complémentaires $\mathfrak{D}_p$ et $\mathfrak{D}_{n-p}$ (dont l'existence est supposée), le premier prolongement de chacune d'elles nous conduit alors à considérer le système $\bar{\omega}^{i'}_{a} = \bar{\omega}^{a}_{i'} = 0$; évidemment complètement intégrable; ce système définit le groupe complètement réductible $\mathfrak{G}_1 \cap \bar{\mathfrak{G}}_1 = D^1_p \times D^1_{n-p}$ et, par conséquent, la structure correspondante sur V_n.

Si la D S $\mathfrak{D}_p$ appartient à V_n douée d'une G-structure, chacun des systèmes (6') est complètement intégrable en vertu des identités (4) de [8]; le système (6') définit le sous-groupe $\mathfrak{g} \subset G$ stationnaire d'un point de la variété $V_{\mathfrak{g}_1}$ sur laquelle agit le groupe structural G; on établit immédiatement la formule $G = \bar{\mathfrak{A}}_1 . \mathfrak{G}_1$. Maintenant le système analogue à (10) sera: $C^{i'}_{\alpha b} \pi^{\alpha} = 0$, $C^{a}_{\alpha b} \pi^{\alpha} = 0$. Ce système définit un sous-groupe $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1 \subset G$. Nous supposerons dorénavant que les sous-groupes $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{h}_1$ définissent les structures correspondantes subordonnées sur V_n (ce qui n'a pas lieu toujours, comme il s'est passé ci-dessus pour $G = D'_n$).

En ce qui concerne le deuxième prolongement de la D S, $\mathfrak{D}_p$ donné par son système canonique $\omega^{i'} = 0$, comme aussi quelques-uns des cas particuliers, nous rappelons que les équations de structure de D^2_n sont données par (8) et par

$$d\bar{\omega}^{i}_{jk} = \bar{\omega}^{h}_{jk} \wedge \bar{\omega}^{i}_{h} + \bar{\omega}^{h}_{j} \wedge \bar{\omega}^{i}_{hk} + \bar{\omega}^{h}_{k} \wedge \bar{\omega}^{i}_{jh} . \tag{11}$$

On convient d'écrire ces dernières sous la forme:

$$\begin{aligned}
d\bar{\omega}^{i'}_{b_1b_2} &= \bar{\omega}^{c}_{b_1b_2} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{c} + \bar{\omega}^{c}_{b_1} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{cc_2} + \bar{\omega}^{c}_{b_2} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{b_1c} + \bar{\omega}^{h'}_{b_1b_2} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{h'} + \bar{\omega}^{h'}_{b_1} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{h'b_2} + \bar{\omega}^{h'}_{b_2} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{b_1h'} , \\
d\bar{\omega}^{i'}_{bj'} &= \bar{\omega}^{c}_{bj'} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{c} + \bar{\omega}^{c}_{b} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{cj'} + \bar{\omega}^{c}_{j'} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{bc} + \bar{\omega}^{h'}_{bj'} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{h'} + \bar{\omega}^{h'}_{b} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{h'j'} + \bar{\omega}^{h'}_{j'} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{bh'} , \\
d\bar{\omega}^{a}_{b_1b_2} &= \bar{\omega}^{c}_{b_1b_2} \wedge \bar{\omega}^{a}_{c} + \bar{\omega}^{c}_{b_1} \wedge \bar{\omega}^{a}_{cb_2} + \bar{\omega}^{c}_{b_2} \wedge \bar{\omega}^{a}_{b_1c} + \bar{\omega}^{h'}_{b_1b_2} \wedge \bar{\omega}^{a}_{h'} + \bar{\omega}^{h'}_{b_1} \wedge \bar{\omega}^{a}_{h'b_2} + \bar{\omega}^{h'}_{b_2} \wedge \bar{\omega}^{a}_{b_1h} , \\
d\bar{\omega}^{a}_{bi'} &= \bar{\omega}^{c}_{bi'} \wedge \bar{\omega}^{a}_{c} + \bar{\omega}^{c}_{b} \wedge \bar{\omega}^{a}_{ci'} + \bar{\omega}^{c}_{i'} \wedge \bar{\omega}^{a}_{bc} + \bar{\omega}^{h'}_{bi'} \wedge \bar{\omega}^{a}_{h'} + \bar{\omega}^{h'}_{b} \wedge \bar{\omega}^{a}_{h'i'} + \bar{\omega}^{h'}_{i'} \wedge \bar{\omega}^{a}_{bh'} , \\
d\bar{\omega}^{a}_{j_1'j_2'} &= \bar{\omega}^{c}_{j_1'j_2'} \wedge \bar{\omega}^{a}_{c} + \bar{\omega}^{c}_{j_1'} \wedge \bar{\omega}^{a}_{cj_2'} + \bar{\omega}^{c}_{j_2'} \wedge \bar{\omega}^{a}_{j_1'c} + \bar{\omega}^{h'}_{j_1'j_2'} \wedge \bar{\omega}^{a}_{h'} + \bar{\omega}^{h'}_{j_1'} \wedge \bar{\omega}^{a}_{h'j_2'} + \bar{\omega}^{h'}_{j_2'} \wedge \bar{\omega}^{a}_{j_1'h'} , \\
d\bar{\omega}^{i'}_{j_1'j_2'} &= \bar{\omega}^{c}_{j_1'j_2'} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{c} + \bar{\omega}^{c}_{j_1'} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{cj_2'} + \bar{\omega}^{c}_{j_2'} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{j_1'c} + \bar{\omega}^{h'}_{j_1'j_2'} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{h'} + \bar{\omega}^{h'}_{j_1'} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{h'j_2'} + \bar{\omega}^{h'}_{j_2'} \wedge \bar{\omega}^{i'}_{j_1'h'} .
\end{aligned} \tag{11}$$

Les équations

$$\bar{\omega}^{i'}_{a} = \bar{\omega}^{i'}_{b_1b_2} = 0 \tag{12}$$

définissent le sous-groupe grassmannien $\mathfrak{G}_2 \subset D^2_n$; $\mathfrak{G}_2$ a un sous-groupe complémentaire abélien $\mathfrak{A}_2$, ainsi que $D^2_n = \bar{\mathfrak{A}}_2 \mathfrak{G}_2$ et il admet aussi une

interprétation analogue d'être le sous-groupe stationnaire d'un point de la variété grassmannienne $V_{\mathfrak{G}_2}$. On établit facilement la formule $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_1 \bar{\times} \mathfrak{A}_2$, où $\mathfrak{A}_2$ est son sous-groupe invariant abélien. On voit aisément, par induction qu'à la s-ième étape du prolongement il y a $D^s_n = \bar{\mathfrak{A}}_s . \mathfrak{G}_s$.

Signalons ci-dessous quelques sous-groupes remarquables de $\mathfrak{G}_2$ dont certains seront utilisés dans ce qui suit.

a) le sous-groupe $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{G}_2$ des équations (12) et

$$\bar{\omega}^{i'}_{bj'} = 0 \tag{13}$$

admet comme complémentaire par rapport à D^2_n, le sous-groupe abélien B_2, ainsi que $D^2_n = \mathfrak{B}_2 . \mathfrak{M}_2$. Il en résulte immédiatement la formule $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{G}_1 \bar{\times} \mathfrak{A}'_2$ où $\mathfrak{A}'_2$ est le sous-groupe abélien invariant de $\mathfrak{M}_2$.

b) le sous-groupe $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{G}_2$ d'équations (12)—(13) et

$$\bar{\omega}^{a}_{b_1b_2} = 0 \qquad \bar{\omega}^{a}_{bi'} = 0 \tag{14}$$

admet aussi un sous-groupe complémentaire par rapport à D^2_n, mais ce dernier n'est pas abélien, tandis que le sous-groupe d'équations (12) — (13) et seulement (14_1) admet un sous-groupe complémentaire abélien.

c) le sous-groupe $\mathfrak{H}_2 \subset \mathfrak{G}_2$ d'équations (12)—(14) et

$$\bar{\omega}^{a}_{b} = 0 \tag{15}$$

admet aussi un sous-groupe complémentaire (non abélien) $\bar{\mathfrak{H}}_2$, ainsi que $D^2_n = \mathfrak{H}_2 . \bar{\mathfrak{H}}_2$. On déduit sans difficulté les liaisons suivantes: $\bar{\mathfrak{H}}_2 = \bar{\mathfrak{H}}_1 \bar{\times} A_2 = (D^1_{n-p} \bar{\times} \mathfrak{A}_1) \bar{\times} A_2$ et $\bar{\mathfrak{H}}_2 = \bar{\mathfrak{H}} \bar{\times} A_2$.

d) si l'on considère le sous-groupe de D^2_n d'équations $\bar{\omega}^{i'}_{a} = 0$, alors son sous-groupe, donné par les équations $\bar{\omega}^{a}_{b} = \bar{\omega}^{a}_{i'} = \bar{\omega}^{i'}_{ab} = \bar{\omega}^{i'}_{a'} = 0$, sera invariant et abélien.

2. Les distributions M. Nous considérerons maintenant sur la variété intégrale de dimension maximum V_p d'une DS, $\mathfrak{D}_p$, une DS $\mathfrak{D}_q \subset V_p$; nous aurons la configuration Myller [11, 12], ou abrégé — la distribution DM. Les équations canoniques de la DS V_q et son premier prolongement seront

$$\omega^{\alpha} \pmod{\omega^{i'}} = 0 \quad \bar{\omega}^{a'}_{\alpha} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \dots q;\ a', b', \dots = q+1, \dots p).$$

Le problème si une configuration donnée $\mathfrak{D}_q \subset \mathfrak{D}_p \subset V_n$ est une DM, peut être résolu en utilisant la méthode du repérage [3, 8], jusqu'à l'épuisement ou jusqu'à la stabilisation des paramètres du sous-groupe G_2. Pour les considérations groupales de la DM $\mathfrak{D}_q \subset \mathfrak{D}_p \subset V_n$ nous écrirons les équations de structure de D'_n sous la forme

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
d\bar\omega^{i'}_{j'} &= \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'} + \bar\omega^{c'}_{j'} \wedge \bar\omega^{i'}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{j'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\gamma},\\
d\bar\omega^{a'}_{j'} &= \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{c'}_{j'} \wedge \bar\omega^{a'}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{j'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\gamma},\\
d\bar\omega^{\alpha}_{j'} &= \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'} + \bar\omega^{c'}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\gamma},\\
d\bar\omega^{i'}_{b'} &= \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'} + \bar\omega^{c'}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\gamma},\\
d\bar\omega^{a'}_{b'} &= \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{c'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\gamma},\\
d\bar\omega^{a'}_{b'} &= \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{c'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\gamma},\\
d\bar\omega^{i'}_{\beta} &= \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'} + \bar\omega^{c'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{\gamma},\\
d\bar\omega^{a'}_{\beta} &= \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{c'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{\gamma},\\
d\bar\omega^{\alpha}_{\beta} &= \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'} + \bar\omega^{c'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\gamma},
\end{aligned}
$$

De (17) on voit que le système

$$
(18)\qquad \bar\omega^{i'}_{a'} = \bar\omega^{i'}_{\alpha} = \bar\omega^{a'}_{\alpha} = 0
$$

définit un sous-groupe $G_1 \subset D'_n$ qui a un sous-groupe complémentaire $\mathfrak{N}_1$, ainsi que $D^1_n = G_1 . \mathfrak{N}_1$. Les équations de structure de G_1 seront (17) (mod (18)), c'est-à-dire

$$
d\bar\omega^{i'}_{j'} = \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'}, \quad d\bar\omega^{a'}_{b'} = \bar\omega^{c'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{c'}, \quad d\bar\omega^{\alpha}_{\beta} = \bar\omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\gamma},
$$

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
&d\bar\omega^{a'}_{j'} = \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{b'}_{j'} \wedge \bar\omega^{a'}_{b'}, \quad d\bar\omega^{\alpha}_{j'} = \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'} + \bar\omega^{c'}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\gamma},\\
&d\bar\omega^{\alpha}_{b'} = \bar\omega^{c'}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{c'} + \bar\omega^{\gamma}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\gamma}.
\end{aligned}
$$

De (19) il résulte la formule remarquable suivante qui met en évidence la structure de G_1:

$$
(20)\qquad G_1 = (D^1_{n-p} \times D^1_{p-q} \times D^1_q) \,\bar\times\, \mathfrak{M}_1,
$$

où $\mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe invariant métabélien. En effet les équations de structure de $\mathfrak{M}_1$ seront

$$
(21)\qquad d\bar\omega^{a'}_{j'} = d\bar\omega^{\alpha}_{b'} = 0, \quad d\bar\omega^{\alpha}_{j'} = \bar\omega^{c'}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{c'} \quad (\text{mod } (18) \text{ et } \bar\omega^{i'}_{j'},\ \bar\omega^{a'}_{b'},\ \bar\omega^{\alpha}_{\beta}).
$$

Or, de (21) il suit que $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{A}_1 \,\bar\times\, \mathfrak{M}^{(1)}_1$, où $\mathfrak{M}^{(1)}_1$ est le groupe dérivé de $\mathfrak{M}_1$, qui est abélien, donc $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{A}_1 \,\bar\times\, A_1$: le groupe facteur $\mathfrak{A}_1$, évidemment abélien est d'ordre $(n-p)\,(p-q)$. De (21) il suit encore que le

centre $z(\mathfrak{M}_1) = A_1$, ce qui démontre que $\mathfrak{M}_1$ est un certain groupe métabélien (étant le produit semidirect de deux groupes abéliens).

En ce qui concerne le sous-groupe $\mathfrak{N}_1$ donné par

$$
(23)\qquad \bar\omega^{i'}_{j'} = \bar\omega^{a'}_{j'} = \bar\omega^{\alpha}_{j'} = \bar\omega^{a'}_{b'} = \bar\omega^{\alpha}_{b'} = \bar\omega^{\alpha}_{\beta} = 0,
$$

les équations de structure de celui-ci seront

$$
(23)\qquad d\bar\omega^{i'}_{b'} = d\bar\omega^{a'}_{\beta} = 0, \quad d\bar\omega^{i'}_{\beta} = \bar\omega^{c'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{c'}.
$$

On déduit aisément encore que $\mathfrak{N}_1 = \bar{\mathfrak{A}}_1 \,\bar\times\, \mathfrak{N}^{(1)}_1$ et que $\mathfrak{N}_1$ est un groupe métabélien produit semidirect de deux groupes abéliens, c'est-à-dire, $\mathfrak{N}_1 = \bar{\mathfrak{A}}_1 \,\bar\times\, A_1$. Un autre sous-groupe remarquable de G_1, désigné par K_1, sera donné par (18) et

$$
(24)\qquad \bar\omega^{a'}_{b'} = \bar\omega^{\alpha}_{b'} = \bar\omega^{\alpha}_{\beta} = 0.
$$

De (19) il suit que K_1 est un sous-groupe invariant de G_1 ayant les équations de structure

$$
(25)\qquad d\bar\omega^{i'}_{j'} = \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'}, \quad d\bar\omega^{a'}_{j'} = \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'}, \quad d\bar\omega^{\alpha}_{j'} = \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'}.
$$

De (19) et (25) on déduit les formules suivantes qui mettent en évidence la structure de G et de K_1:

$$
(26)\qquad G_1 = \bar K_1 . K_1, \quad K_1 = D^1_{n-p} \,\bar\times\, \mathfrak{A}_1 \quad \bar K_1 = (D^1_{p-q} \times D^1_q) \,\bar\times\, A_1.
$$

Les sous-groupes G_1 et K_1 définissent sur la variété V_n les structures subordonnées, puisque tant G_1 que K_1 ont toujours une même représentation sur $E_n = T_x$ dans tous les points $x \in V_n$. Il suit qu'une G_1-structure est caractérisée par l'invariance de la configuration Myller du type (p, q).

Quant au deuxième prolongement de DM $\mathfrak{D}_q \subset \mathfrak{D}_p \subset V_n$, nous utiliserons les équations de structure de (D^2_n) sous la forme (17) auxquelles on adjoint les formules (11) écrites sous une forme analogue à (17), c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
d\bar\omega^{i'}_{j'k'} &= \bar\omega^{h'}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{j'h'} + \bar\omega^{d'}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'} +\\
&+ \bar\omega^{d'}_{j'} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'k'} + \bar\omega^{d'}_{k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{j'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{j'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda k'} + \bar\omega^{\lambda}_{k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{j'\lambda},\\
d\bar\omega^{i'}_{b'k'} &= \bar\omega^{h'}_{b'k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{i}_{b'h'} + \bar\omega^{d'}_{b'k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'} +\\
&+ \bar\omega^{d'}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'k'} + \bar\omega^{d'}_{k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{b'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{a'k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda k'} + \bar\omega^{\lambda}_{k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{b'\lambda},\\
d\bar\omega^{i'}_{\beta k'} &= \bar\omega^{h'}_{\beta k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\beta h'} + \bar\omega^{d'}_{\beta k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'} +\\
&+ \bar\omega^{d'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'k'} + \bar\omega^{d'}_{k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\beta d'} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta k} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i}_{\lambda k'} + \bar\omega^{\lambda}_{k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\beta\lambda},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\bar\omega^{i'}_{b'c'} &= \bar\omega^{h'}_{b'c'} \wedge \bar\omega^{c'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{c'} \wedge \bar\omega^{i'}_{b'h'} + \bar\omega^{d'}_{b'c'} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'c'} + \bar\omega^{d'}_{c'} \wedge \bar\omega^{i'}_{b'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{b'c'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda c'} + \bar\omega^{\lambda}_{c'} \wedge \bar\omega^{i'}_{b'\lambda}, \\
d\bar\omega^{i'}_{b'\beta} &= \bar\omega^{h'}_{b'\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'\beta} + \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{b'h'} + \bar\omega^{d'}_{b'\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'\beta} + \bar\omega^{d'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{b'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{b'\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{b'} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda\beta} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{b'\lambda}, \\
d\bar\omega^{i'}_{\beta\gamma} &= \bar\omega^{h'}_{\beta\gamma} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'\gamma} + \bar\omega^{h'}_{\gamma} \wedge \bar\omega^{i'}_{\beta h'} + \bar\omega^{d'}_{\beta\gamma} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{d'\gamma} + \bar\omega^{d'}_{\gamma} \wedge \bar\omega^{i'}_{\beta d'} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta\gamma} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{\lambda\gamma} + \bar\omega^{\lambda}_{\gamma} \wedge \omega^{i'}_{\beta\lambda}, \\
d\bar\omega^{a'}_{j'k'} &= \bar\omega^{h'}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{j'h'} + \bar\omega^{d'}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{j'} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'k'} + \bar\omega^{d'}_{k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{j'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{j'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda k'} + \bar\omega^{\lambda}_{k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{j'\lambda}, \\
d\bar\omega^{a'}_{b'k'} &= \bar\omega^{h'}_{b'k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{b'h'} + \bar\omega^{d'}_{b'k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'k'} + \bar\omega^{d'}_{k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{b'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{b'k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda k'} + \bar\omega^{\lambda}_{k'} \wedge \omega^{a'}_{b'\lambda}, \\
d\bar\omega^{a'}_{\beta k'} &= \bar\omega^{h'}_{\beta k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\beta h'} + \bar\omega^{d'}_{\beta k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'k'} + \bar\omega^{d'}_{k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\beta d'} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda k'} + \bar\omega^{\lambda}_{k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\beta\lambda}, \\
d\bar\omega^{a'}_{b'c'} &= \bar\omega^{h'}_{b'c'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'c'} + \bar\omega^{h'}_{c'} \wedge \bar\omega^{a'}_{b'h'} + \bar\omega^{d'}_{b'c'} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'c'} + \bar\omega^{d'}_{c'} \wedge \bar\omega^{a'}_{b'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{b'c'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda c'} + \bar\omega^{\lambda}_{c'} \wedge \omega^{a'}_{b'\lambda}, \\
d\bar\omega^{a'}_{b'\beta} &= \bar\omega^{h'}_{b'\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'\beta} + \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{b'h'} + \bar\omega^{d'}_{b'\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'\beta} + \bar\omega^{d'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{b'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{b'\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{b'} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda\beta} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{b'\lambda}, \\
d\bar\omega^{a'}_{\beta\gamma} &= \bar\omega^{h'}_{\beta\gamma} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'\gamma} + \bar\omega^{h'}_{\gamma} \wedge \bar\omega^{a'}_{\beta h'} + \bar\omega^{d'}_{\beta\gamma} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'} + \bar\omega^{d'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{d'\gamma} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{\gamma} \wedge \bar\omega^{a'}_{\beta d'} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta\gamma} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta} \wedge \bar\omega^{a'}_{\lambda\gamma} + \bar\omega^{\lambda}_{\gamma} \wedge \bar\omega^{a'}_{\beta\lambda}, \\
d\bar\omega^{\alpha}_{j'k'} &= \bar\omega^{h'}_{j'k} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{k} + \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{j'h'} + \bar\omega^{d'}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'k'} + \bar\omega^{d'}_{k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{j'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda k'} + \bar\omega^{\lambda}_{k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{j'\lambda}, \\
d\bar\omega^{\alpha}_{b'k'} &= \bar\omega^{h'}_{b'k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{b'h'} + \bar\omega^{d'}_{b'k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'k'} + \bar\omega^{d'}_{k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{b'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{b'k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda k'} + \bar\omega^{\lambda}_{k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{b'\lambda},
\end{aligned}
\tag{11*}
$$

$$
\begin{aligned}
d\bar\omega^{\alpha}_{\beta k'} &= \bar\omega^{h'}_{\beta k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\beta h'} + \bar\omega^{d'}_{\beta k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'k'} + \bar\omega^{d'}_{k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\beta d'} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda k'} + \bar\omega^{\lambda}_{k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\beta\lambda}, \\
d\bar\omega^{\alpha}_{b'c'} &= \bar\omega^{h'}_{b'c'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'c'} + \bar\omega^{h'}_{c'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{b'h'} + \bar\omega^{d'}_{b'c'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'c'} + \bar\omega^{d'}_{c'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{b'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{b'c'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda c'} + \bar\omega^{\alpha}_{c'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{b'\lambda}, \\
d\bar\omega^{\alpha}_{b'\beta} &= \bar\omega^{h'}_{b'\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'\beta} + \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{b'h'} + \bar\omega^{d'}_{b'\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'\beta} + \bar\omega^{d'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{b'd'} + \bar\omega^{\lambda}_{b'\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{b'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda\beta} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{b'\lambda}, \\
d\bar\omega^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \bar\omega^{h'}_{\beta\gamma} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'\gamma} + \bar\omega^{h'}_{\gamma} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\beta h'} + \bar\omega^{d'}_{\beta\gamma} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'} + \bar\omega^{d'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{d'\gamma} + \\
&\quad + \bar\omega^{d'}_{\gamma} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\beta d'} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta\gamma} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda} + \bar\omega^{\lambda}_{\beta} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\lambda\gamma} + \bar\omega^{\lambda}_{\gamma} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{\beta\lambda}.
\end{aligned}
$$

Le sous-groupe $G_2 \subset D^2_n$ sera donné par le système (18) et

$$
\bar\omega^{i'}_{b'c'} = d\bar\omega^{i'}_{b'\gamma} = \bar\omega^{i'}_{\beta\gamma} = \bar\omega^{a'}_{\alpha\beta} = 0, \tag{18'}
$$

évidemment complètement intégrable; il aura un sous-groupe complémentaire métabélien, $\mathfrak{M}_2$, d'où il s'ensuit:

$$
D^2_n = G_2 \,.\, \mathfrak{M}_2
$$

Les équations de structure de $\mathfrak{M}_2$ sont données par (23) et les suivantes

$$
d\bar\omega^{i'}_{b'c'} = d\bar\omega^{a'}_{\beta\gamma} = 0, \quad d\bar\omega^{i'}_{b'\beta} = \bar\omega^{c'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{b'c'},
$$

$$
d\bar\omega^{i'}_{\beta\gamma} = \bar\omega^{c'}_{\beta\gamma} \wedge \bar\omega^{i'}_{c'} + \bar\omega^{c'}_{\beta} \wedge \bar\omega^{i'}_{c'\gamma} + \bar\omega^{c'}_{\gamma} \wedge \bar\omega^{i'}_{\beta c'}
$$

d'où on déduit notre assertion que $\mathfrak{M}_2$ est un groupe métabélien; de plus il s'ensuit encore $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{N}_2 \times A_2$.

Le sous-groupe $K_2 \subset G_2 \subset D^2_n$ sera donné par le système (18), (18'), (24) et par

$$
\begin{aligned}
\bar\omega^{i'}_{a'j'} = \bar\omega^{i'}_{\alpha j'} = \bar\omega^{a'}_{\alpha j'} = \omega^{a'}_{\alpha b'} = \bar\omega^{a'}_{b'j'} = \bar\omega^{a'}_{b'c'} = \bar\omega^{\alpha}_{b'j'} = \bar\omega^{\alpha}_{b'c'} = \\
= \bar\omega^{\alpha}_{b'\gamma} = \bar\omega^{\alpha}_{\beta i'} = \bar\omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0,
\end{aligned}
\tag{24'}
$$

évidemment complètement intégrable. Les équations de structure de K_2 sont données par (25) et par les suivantes:

$$
d\bar\omega^{i'}_{j'k'} = \bar\omega^{h'}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{i'}_{h'k'}, \quad d\bar\omega^{a'}_{j'k'} = \bar\omega^{h'}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{a'}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{a'}_{j'h'},
$$

$$
d\bar\omega^{\alpha}_{j'k'} = \bar\omega^{h'}_{j'k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'} + \bar\omega^{h'}_{j'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{h'k'} + \bar\omega^{h'}_{k'} \wedge \bar\omega^{\alpha}_{j'h'},
$$

d'où il résulte $K_2 = D^2_{n-p} \times A_2$, où A_2 est un certain sous-groupe invariant abélien.

3. Dans ce paragraphe nous nous proposons de trouver les conditions auxquelles est soumise une DS pour que la $\mathfrak{D}_p$ produise une fibration principale de M. Ehresmann dans la variété V_n, c'est-à-dire pour que V_n soit un EFP ayant la base V_{n-p} donnée par $\omega^{i'}$, du groupe structural G dont la variété des paramètres est isomorphe à la variété intégrale de dimension maximum de la $\mathfrak{D}_p$ donnée.

Nous avons vu que l'étude d'une DS revient à douer la variété V_n d'une structure grassmannienne, c'est-à-dire d'avoir $B = E_0(V_n . \mathfrak{G}_1)$. La variété B étant un sous-fibré principal de la D^1_n-structure, les équations de structure de celle-ci et de son premier prolongement normal B^1 seront

$$d\omega^{i'} = \omega^{j'} \wedge \omega^{i'}_{j'}, \quad d\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a_b + \omega^{j'} \wedge \omega^a_{j'},$$

$$d\omega^{i'}_{j'} = \omega^{h'}_{j'} \wedge \omega^{i'}_{h'} + \omega^c \wedge \omega^{i'}_{j'c} + \omega^{h'} \wedge \omega^{i'}_{j'h'},$$

$$d\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^c \wedge \omega^a_{bc} + \omega^{h'} \wedge \omega^a_{bh'},$$

$$d\omega^a_{i'} = \omega^c_{i'} \wedge \omega^a_c + \omega^{h'}_{i'} \wedge \omega^a_{h'} + \omega^c \wedge \omega^a_{i'c} + \omega^{h'} \wedge \omega^h_{i'h'}.$$

On considère sur la variété B, à côté du premier prolongement de la $\mathfrak{D}_p$, $\omega^{i'}_a = 0$, la distribution associée, $\bar{\omega}^a_b = 0$, toutes les deux étant supposées DSA; cela signifie premièrement que dans les formules

$$\omega^{i'}_a = A^{i'}_{ab}\,\omega^b \,(A^{i'}_{ab} = A^{i'}_{ba}) \quad \omega^a_b = A^a_{bc}\,\omega^c \pmod{\omega^{i'}} \tag{28}$$

les coefficients A seront constants; puis, en tenant compte de la définition d'une DSA les prolongements de (28), c'est-à-dire:

$$\bar{\omega}^{i'}_{ab} = \bar{\omega}^a_{bc} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\omega}^{i'}_{aj'} = \bar{\omega}^a_{bj'} = 0 \tag{29}$$

seront eux aussi des DSA. Ainsi nous serons conduits à considérer la $\mathfrak{H}_1$-structure de la V_n, c'est-à-dire $C = E_0(V_n . \mathfrak{H}_1)$, dont le premier prolongement normal sera $C^1 = E_0(C, \mathfrak{A}_1)$. Les équations de structure de C^1 résultent immédiatement de (27) calculées mod (28) et (29); on a

$$\begin{aligned} &d\omega^{i'} = \omega^{j'} \wedge \omega^{i'}_{j'}, \; d\omega^a = \frac{1}{2} C^a_{bc}\,\omega^b \wedge \omega^c + \omega^{j'} \wedge \omega^a_{j'}, \; (C^a_{bc} = A^a_{bc} - A^a_{cb}) \\ &d\omega^{i'}_{j'} = \omega^{h'}_{j'} \wedge \omega^{i'}_{h'} + \omega^{h'} \wedge \omega^{i'}_{j'h'}, \; d\omega^a_{i'} = \omega^{j'}_{i'} \wedge \omega^a_{j'} + C^a_{bc}\,\omega^b_{i'} \wedge \omega^c + \omega^{j'} \wedge \omega^a_{i'j'}. \end{aligned} \tag{30}$$

Or, si l'on désigne par G le groupe donné par les formes invariantes $\bar{\omega}^a = \omega^a \pmod{\omega^{i'}}$ qui vérifient les équations de structure $(30_2) \pmod{\omega^{i'}}$, il suit de $(30_{1,2})$ que la variété V_n est homéomorphe à l'EFP, $\mathfrak{S} = E(V_{n-p}, G)$; le premier prolongement $\mathfrak{S}^1$ de $\mathfrak{S}$ par rapport aux formes $\omega^{i'}$ de la base

V_{n-p} [6] aura les équations de structure précisément toutes les formules (30), donc $\mathfrak{S}^1$ est homéomorphe à la variété C de plus haut.

Comme une conclusion de ce paragraphe on peut dire que l'existence d'une fibration principale dans une variété régulière V_n, de base quelconque V_{n-p} et de groupe structural G d'ordre p, c'est-à-dire $V_n \approx \mathfrak{S} = E(V_{n-p}, G)$, suppose premièrement la dotation de l'espace V_n d'une $\mathfrak{H}_1$-structure, c'est-à-dire $C = E_0(V_n, \mathfrak{H}_1)$ (certaine structure subordonnée à la structure grassmannienne, qui laisse invariante une direction p-plane) et puis la fermeture entre C et le premier prolongement normal $\mathfrak{S}^1$ de $\mathfrak{S}$ par rapport aux formes de sa base (V_{n-p}); brièvement, la fibration principale de M. Ehresmann exige l'accomplissement des conditions $V_n \approx \mathfrak{S}$ et $C \approx \mathfrak{S}^1$.

4. Maintenant nous nous proposons de trouver les conditions auxquelles est soumise une DM pour que cette configuration $\mathfrak{D}_q \subset \mathfrak{D}_p \subset V_n$ produise une fibration de M. Ehresmann dans la variété V_n, c'est-à-dire pour que V_n soit un EF ayant la base V_{n-p}, donnée par $\omega^{i'}$ du groupe structural G dont la variété est isomorphe à la variété intégrale de dimension maximum de la DSA $\mathfrak{D}_p$ et dont la fibre type est un espace homogene G/H du groupe G dont le sous-groupe est donné par ω^α (mod $\omega^{i'}$, $\omega^{a'}$).

Nous avons vu que l'étude d'une DM revient à douer V_n d'une G_1-structure (§ 2), c'est-à-dire $\mathfrak{B} = E_0(V_n, G_1)$. La variété $\mathfrak{B}$ étant un sousfibré principal de la D^1_n-structure, les équations de structure de celle-ci et de son premier prolongement normal $\mathfrak{B}^1$ seront

$$\begin{aligned} &d\omega^{i'} = \omega^{j'} \wedge \omega^{i'}_{j'}, \; d\omega^{a'} = \omega^{j'} \wedge \omega^{a'}_{j'} + \omega^{b'} \wedge \omega^{a'}_{b'}, \; d\omega^\alpha = \omega^{j'} \wedge \omega^\alpha_{j'} + \\ &\qquad + \omega^{b'} \wedge \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_{b'} + \omega^\alpha_\beta. \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &d\omega^{i'}_{j'} = \omega^{h'}_{j'} \wedge \omega^{i'}_{h'} + \omega^{h'} \wedge \omega^{i'}_{j'h'} + \omega^{a'} \wedge \omega^{i'}_{j'a'} + \omega^\alpha \wedge \omega^{i'}_{j'\alpha}, \; d\omega^{a'}_{b'} = \omega^{c'}_{b'} \wedge \omega^{a'}_{c'} + \\ &\qquad + \omega^{h'} \wedge \omega^{a'}_{b'h'} + \omega^{c'} \wedge \omega^{a'}_{b'c'} + \omega^\gamma \wedge \omega^{a'}_{b'\gamma}. \\ &d\omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \omega^{h'} \wedge \omega^\alpha_{\beta h'} + \omega^{c'} \wedge \omega^\alpha_{\beta c'} + \omega^\gamma \wedge \omega^\alpha_{\beta\gamma}, \\ &d\omega^{a'}_{j'} = \omega^{h'}_{j'} \wedge \omega^{a'}_{h'} + \omega^{c'}_{j'} \wedge \omega^{a'}_{c'} + \omega^{h'} \wedge \omega^{a'}_{j'h'} + \omega^{c'} \wedge \omega^{a'}_{j'c'} + \omega^\gamma \wedge \omega^{a'}_{j'\gamma}, \\ &d\omega^\alpha_{j'} = \omega^{h'}_{j'} \wedge \omega^\alpha_{h'} + \omega^{c'}_{j'} \wedge \omega^\alpha_{c'} + \omega^\alpha_{j'} \wedge \omega^\alpha_\gamma + \omega^{h'} \wedge \omega^\alpha_{j'h'} + \omega^{c'} \wedge \omega^\alpha_{j'c'} + \omega^\gamma \wedge \omega^\alpha_{j'\gamma}, \\ &d\omega^\alpha_{b'} = \omega^{c'}_{b'} \wedge \omega^\alpha_{c'} + \omega^\gamma_{b'} \wedge \omega^\alpha_\gamma + \omega^{h'} \wedge \omega^\alpha_{b'h'} + \omega^{c'} \wedge \omega^\alpha_{b'c'} + \omega^\gamma \wedge \omega^\alpha_{b'\gamma}. \end{aligned} \tag{32}$$

A côté du premier prolongement de la DM, $\bar{\omega}^{i'}_{a'} = \bar{\omega}^{i'}_\alpha = \bar{\omega}^{a'}_\alpha = 0$, on considère sur la variété $\mathfrak{B}$ aussi les distributions suivantes associées $\bar{\omega}^{a'}_{b'} = \bar{\omega}^\alpha_{b'} = \bar{\omega}^\alpha_\beta = 0$, toutes ces distributions étant supposées DSA. Cela signifie premièrement que dans les formules

$$\omega^{i'}_{a'} = A^{i'}_{a'b'}\,\omega^{b'} + A^{i'}_{a'\alpha}\,\omega^{\alpha},\quad \omega^{i'}_{\alpha} = A^{i'}_{\alpha a'}\,\omega^{a'} + A^{i'}_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta},$$

$$\omega^{a'}_{\alpha} = A^{a'}_{\alpha b'}\,\omega^{b'} + A^{a'}_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta},\quad \omega^{a'}_{b'} = A^{a'}_{b'c'}\,\omega^{c'} + A^{a'}_{b'\alpha}\,\omega^{\alpha},\ (\mathrm{mod}\ \omega^{i'})$$

$$\omega^{\alpha}_{b'} = A^{\alpha}_{b'c'}\,\omega^{c'} + A^{\alpha}_{b'\gamma}\,\omega^{\gamma},\quad \omega^{\alpha}_{\beta} = A^{\alpha}_{\beta a'}\,\omega^{a'} + A^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\omega^{\gamma},$$

les coefficients A seront constants; puis, en tenant compte de (6) et (7), les premiers prolongements de celles-ci, c'est-à-dire

$$\omega^{i'}_{a'j} = \omega^{i'}_{\alpha j} = \omega^{a'}_{\alpha j} = \omega^{a'}_{b'j} = \omega^{\alpha}_{b'j} = \omega^{\alpha}_{\beta j} = 0,\qquad j = 1, \ldots, n, \tag{33}$$

seront aussi des DSA.

De cette sorte nous serons conduits à considérer la K_1-structure de la variété V_n, c'est-à-dire $C = E_0(V_n, K_1)$, dont le premier prolongement normal sera $C^1 = E_0(C, \mathfrak{A}_1)$. Les équations de structure de C^1 sont

$$\begin{gathered} d\omega^{i'} = \omega^{i'} \wedge \omega^{i'}_{j},\quad d\omega^{a'} = \frac{1}{2}\, C^{a'}_{b'c'}\,\omega^{b'} \wedge \omega^{c'} + C^{a'}_{b'\alpha}\,\omega^{b'} \wedge \omega^{\alpha} + \omega^{j'} \wedge \omega^{a'}_{j}, \\ d\omega^{\alpha} = \frac{1}{2}\, C^{\alpha}_{ab}\,\omega^{a} \wedge \omega^{b} + \omega^{j'} \wedge \omega^{\alpha}_{j}; \end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered} d\omega^{i'}_{j} = \omega^{h'}_{j} \wedge \omega^{i'}_{h'} + \omega^{h'} \wedge \omega^{i'}_{j'h'},\quad d\omega^{\alpha}_{j'} = \omega^{h'}_{j'} \wedge \omega^{\alpha}_{h'} + C^{\alpha}_{ab}\,\omega^{a}_{j'} \wedge \omega^{b} + \omega^{h'} \wedge \omega^{\alpha}_{j'h'}, \\ d\omega^{a'}_{j} = \omega^{h'}_{j} \wedge \omega^{a'}_{h'} + C^{a'}_{b'c'}\,\omega^{b'}_{j} \wedge \omega^{c'} + C^{a'}_{b'\alpha}\,\omega^{b'}_{j} \wedge \omega^{\alpha} + C^{a'}_{\alpha b'}\,\omega^{\alpha}_{j} \wedge \omega^{b'} + \omega^{h'} \wedge \omega^{a'}_{j'h'}. \end{gathered} \tag{35}$$

Or, si l'on désigne par G le groupe donné par les formes invariantes $\omega^{a'}$, ω^{α} (mod $\omega^{i'}$) qui vérifient les équations de structure ($34_{2,3}$) (mod $\omega^{i'}$), il suit de (34) que la variété V_n est homéomorphe à l'EF, $\mathcal{E} = E(V_{n-p}, G, G/H)$ où le sousgroupe stationnaire H d'un point de la fibre type est donné par les formes invariantes ω^{α} (mod $\omega^{i'}$, $\omega^{a'}$) qui vérifient les équations de structure (34_3) (mod $\omega^{i'}$, $\omega^{a'}$). Le premier prolongement $\mathcal{E}^1$ de $\mathcal{E}$ par rapport aux formes de la base V_{n-p} [6] aura les équations de structure précisement (34) et (35), donc $\mathcal{E}^1$ est homéomorphe à la variété C de ce paragraphe.

En conclusion on peut dire que l'existence d'une fibration dans une variété régulière V_n, de base quelconque V_{n-p}, du groupe structural G d'ordre p, et de la fibre type G/H de dimension $p-q$, c'est-à-dire $V_n \approx \mathcal{E} = E(V_{n-p}, G, G/H)$, suppose premièrement la dotation de l'espace V_n d'une K_1-structure, c'est-à-dire $C = E_0(V_n, K_1)$ (certaine structure subordonnée à la M-structure, qui laisse invariante une configuration Myller (p, q)) et puis la fermeture entre C et le premier prolongement normal $\mathcal{E}^1$ de $\mathcal{E}$ par rapport aux formes de sa base; brièvement — la fibration de M. Ehresmann exige l'accomplissement des conditions $V_n \approx \mathcal{E}$ et $C \approx \mathcal{E}^1$.

5. Application aux G-structures. Soit la G-structure $B = E_0(V_n, G)$ donnée par les formes invariantes $(\omega^{i'}, \omega^{\alpha})$ définies globalement et une

DS $\mathfrak{D}_p \subset V_n$ donnée par son système canonique $\omega^{i'} = 0$. De l'équation de structure écrite sous la forme

$$\begin{gathered} d\omega^{i'} = \frac{1}{2}\, C^{i'}_{j'k'}\,\omega^{j'} \wedge \omega^{k} + C^{i'}_{j'a}\,\omega^{j'} \wedge \omega^{a} + \frac{1}{2}\, C^{i'}_{ab}\,\omega^{a} \wedge \omega^{b} + \\ + C^{i'}_{\alpha j'}\,\omega^{\alpha} \wedge \omega^{j'} + C^{i'}_{\alpha a}\,\omega^{\alpha} \wedge \omega^{a}, \\ d\omega^{a} = \frac{1}{2}\, C^{a}_{jk}\,\omega^{j} \wedge \omega^{k} + C^{a}_{\alpha j}\,\omega^{\alpha} \wedge \omega^{j}, \end{gathered} \tag{36}$$

le premier prolongement de $\mathfrak{D}_p$ conduit à (6_1) $C^{i'}_{\alpha b}\,\pi^{\alpha} = 0$ — système de définition du sous-groupe $\mathfrak{G}_1 \subset G$; l'ordre de $\mathfrak{G}_1$ dépend du rang ρ_0 de la matrice $[C^{i'}_{\alpha b}]$.

Si $\rho_0 = r$, c'est-à-dire si $\mathfrak{G}_1 = G$, on a $C^{i'}_{\alpha b} = 0$, et de même de (36) il résulte aussi $C^{i'}_{ab} = 0$; telles distributions structurelles peuvent être appelées par analogie [8] distributions normales de la G-structure.

Les équations de structure du prolongement B^1 de B peuvent être mises sous la forme:

$$\begin{gathered} d\omega^{i'} = \omega^{j'} \wedge \omega^{i'}_{j'},\quad d\omega^{a} = C^{a}_{\alpha b}\,\omega^{\alpha} \wedge \omega^{b} + \frac{1}{2}\, C^{a}_{bc}\,\omega^{b} \wedge \omega^{c} + \omega^{j'} \wedge \omega^{a}_{j'}, \\ d\omega^{\alpha} = \frac{1}{2}\, C^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + C^{\alpha}_{\beta a}\,\omega^{\beta} \wedge \omega^{a} + \frac{1}{2}\, C^{\alpha}_{ab}\,\omega^{a} \wedge \omega^{b} + C^{\alpha}_{\alpha_1 b}\,\omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{b} + \omega^{j'} \wedge \omega^{\alpha}_{j'} \end{gathered} \tag{37}$$

où

$$\begin{gathered} \omega^{i'}_{j'} = C^{i'}_{j'k'}\,\omega^{k'} + C^{i'}_{j'a}\,\omega^{a} + C^{i'}_{j'\alpha}\,\omega^{\alpha},\quad \omega^{a}_{j'} = C^{a}_{j'k'}\,\omega^{k'} + C^{a}_{j'b}\,\omega^{b} + C^{a}_{j'\alpha}\,\omega^{\alpha}, \\ \omega^{\alpha}_{j'} = C^{\alpha}_{j'k'}\,\omega^{k'} + C^{\alpha}_{j'\beta}\,\omega^{\beta} + C^{\alpha}_{j'\alpha_1}\,\omega^{\alpha_1}. \end{gathered} \tag{37'}$$

Pour qu'une fibration dans V_n à base V_{n-p} donnée par les formes $\omega^{i'}$, soit possible, une première condition est que le système ($37_{2,3}$) soit prolongeable régulièrement par rapport aux $\omega^{i'}$; cela aura lieu si les formes quadratiques $d\omega^{a}$ et $d\omega^{\alpha}$ (mod $\omega^{i'}$) sont prolongeables régulièrement par rapport aux mêmes formes [6, 10]; on vérifie cette affirmation en utilisant les équations de structure de B^2 et les formules de Jacobi [8], donc la fibration annoncée est possible. Comme le système (37) n'est pas fermé en général, on obtient une fibration généralisée à groupe structural — certain pseudogroupe Lie infini.

Pour qu'il ait lieu une fibration de M. Ehresmann dans la variété V_n, il faut premièrement que le système soit fermé, ce qui exige $C^{\alpha}_{\alpha_1 b} = 0$; puis que les coefficients C^{a}_{bc}, $C^{\alpha}_{\beta a}$, C^{α}_{ab} soient constants. Cette dernière condition a lieu par exemple dans le cas d'un pseudogroupe de Lie. En ce qui concerne la première condition, en utilisant les formules de Jacobi [8], à savoir $C^{i'}_{\alpha j'}\,C^{\alpha}_{\alpha_1 b} - C^{i'}_{\alpha b}\,C^{\alpha}_{\alpha_1 j'} = 0$; puisque $C^{i'}_{\alpha b} = 0$, il s'ensuit

$$(+) \qquad C^{i'}_{\alpha j'} C^{\alpha}_{\alpha_1 b} = 0.$$

Puisque la représentation du groupe G dans E_n est effective, la matrice $[C^i_{\alpha j}]$ a le rang r; si la sous-matrice $[C^{i'}_{\alpha j'}]$ a le rang r, de $(+)$ il résulte que $C^{\alpha}_{\alpha_1 b} = 0$ et le système (37) est fermé.

En supposant que toutes les conditions énoncées plus haut pour l'existence d'une fibration de M. Ehresmann sont remplies, alors ω^a, ω^α (mod $\omega^{i'}$) sont les formes invariantes d'un groupe Γ, d'ordre $r+p$, qui vérifient les équations de structure

$$(38) \qquad \begin{aligned} d\omega^a &= \frac{1}{2} C^a_{bc}\, \omega^b \wedge \omega^c + C^a_{\alpha b}\, \omega^\alpha \wedge \omega^b, \\ d\omega^\alpha &= \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\, \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + C^\alpha_{\beta a}\, \omega^\beta \wedge \omega^a + \frac{1}{2} C^\alpha_{ab}\, \omega^a \wedge \omega^b \ (\text{mod } \omega^{i'}). \end{aligned}$$

Il suit que le groupe structural G est un sous-groupe de Γ.

Donc: soit donnée une G-structure et une de ses distributions normales $\mathfrak{D}_p$ pour laquelle sont remplies les conditions de plus haut, la variété base V_n admet alors une fibration de M. Ehresmann; la V_n est isomorphe à EF, $\mathfrak{S} = E(V_{n-p}, \Gamma, \Gamma/G)$; l'existence du prolongement régulier du système (37) assure le remplissement de la condition de la fermeture du § **4**.

Remarques. 1. La variété base de l'EF $\mathfrak{S}$ n'est pas arbitraire; elle est douée, comme il en résulte de (37), d'une Γ-structure ou d'une structure subordonnée de celle-ci; ce fait se constate en évaluant le rang ρ de la matrice $[C^{i'}_{j'a}\ C^{i'}_{j'\alpha}]$.

En particulier, si $C^{i'}_{aj'} = 0$, nous aurons alors $\rho = r$, puisque par l'hypothèse de plus haut le rang de la matrice $[C^{i'}_{j'\alpha}]$ est précisément r. De $(37'_1)$ il suit que dans ce cas la variété V_{n-p} est douée de la G-structure. Compte tenu du fait que nous avons maintenant $C^i_{\alpha b} = C^{i'}_{ab} = C^{i'}_{aj'} = 0$, de la formule de Jacobi [8]:

$$C^{i'}_{(j'a,b)} + C^{i'}_{h(j'} C^h_{ab)} + C^{i'}_{\alpha(j'} C^\alpha_{ab)} = 0,$$

il résulte presque immédiatement qu'elle se réduit à $C^{i'}_{\alpha h'}, C^\alpha_{ab} = 0$, d'où, en vertu de l'hypothèse rappelée, on obtient $C^\alpha_{ab} = 0$. Ce résultat montre, comme on voit de (38), que le groupe Γ est précisément de la forme $\Gamma = \gamma . G$, où le sous-groupe γ est donné par les formes ω^a (mod $\omega^{i'}$, ω^α) $= \pi^a$ qui vérifient les équations de structure $d\pi^a = \frac{1}{2} C^a_{bc}\, \pi^b \wedge \pi^c$.

2. Dans le cas d'un pseudogroupe normal transitif $\mathcal{G}$ ayant le groupe structural G, on sait que [7] les distributions normales définissent diverses représentations normales $\tilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ et en opérant sur V_{n-p}. Le groupe structural du pseudogroupe $\tilde{\mathcal{G}}$ sera précisément le groupe considéré dans la remarque précédente [7]. Si la condition de fermeture $C^\alpha_{\alpha_1 b} = 0$ ou la condition analogue dans une des étapes du prolongement normal de $\tilde{\mathcal{G}}$, est remplie le pseudogroupe $\tilde{\mathcal{G}}$ est isomorphe au pseudogroupe initial $\mathcal{G}$; sinon, ils sont homéomorphes. Donc, l'existence de la fibration au sens Ehresmann, dans le cas des pseudogroupes revient à la condition d'isomorphisme. D'ici il découle, à mon avis, la nécessité de considérer les fibrations plus générales, en renonçant à la condition de la fermeture.

Exemple. Si la G-structure est systatique, c'est-à-dire le système systatique

$$(39) \qquad \frac{\partial d\omega^i}{\partial \omega^\alpha} = C^i_{\alpha j}\, \omega^j = 0$$

est de rang $\tau < n$ $(\tau = n - p,\ p > 0)$ [5] on peut alors l'écrire sous la forme $\omega^{i'} = 0$, ce qui exige que $C^i_{\alpha b} = 0$ et la matrice $[C^i_{\alpha j'}]$ est précisément de rang $\tau = n - p$. Pour établir les conditions pour que le système $\omega^{i'} = 0$ soit complètement intégrable, nous utiliserons une des formules de Jacobi [8] et précisement la suivante

$$(40) \qquad C^i_{ba,\alpha} + C^i_{jb} C^j_{\alpha a} - C^i_{ja} C^j_{\alpha b} - C^i_{\alpha j} C^j_{ab} = 0;$$

compte tenu de (39) on obtient

$$(41) \qquad C^i_{ba,\alpha} - C^i_{\alpha j'} C^{j'}_{ab} = 0.$$

D'autre part, de (36_1) il y a

$$d\omega^{i'} (\text{mod } \omega^{j'}) = \frac{1}{2} C^{i'}_{ab}\, \omega^a \wedge \omega^b + C^{i'}_{\alpha b}\, \omega^\alpha \wedge \omega^b$$

expression qui, en vertu de (39), se réduit à

$$(42) \qquad d\omega^{i'} \ (\text{mod } \omega^{j'}) = \frac{1}{2} C^{i'}_{ab}\, \omega^a \wedge \omega^b.$$

Donc si le système systatique est complètement intégrable $(C^{i'}_{ab} = 0)$, de (41) il résulte $C^i_{ba,\alpha} = 0$ et réciproquement, si $C^i_{ba,\alpha} = 0 \rightarrow C^i_{\alpha j'} C^{j'}_{ab} = 0$; vu que la matrice $[C^i_{\alpha j'}]$ a le rang τ, il résulte $C^{j'}_{ab} = 0$, q.e.d. En particulier pour les G-structures pseudogroupales pour lesquelles $C^i_{jk} = C^i_{jk}(x)$ [4], il suit que les systèmes systatiques sont toujours complètement intégrables. Mais, en général, la distribution (39) n'est pas involutive pour toutes les G-structures systatiques; nous avons obtenu ainsi un critère simple pour discerner les cas possibles de G-structures systatiques.

En supposant que pour la G-structure systatique considérée la distribution (39) est involutive, il résulte que la $\mathfrak{D}_p$ correspondante est structurelle; de plus, ayant rempli les conditions

$$C^i_{\alpha b} = C^i_{ab} = 0, \tag{43}$$

la distribution systatique est normale et les équations de structure (37) deviennent

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^a = \frac{1}{2} C^a_{bc}\, \omega^b \wedge \omega^c + \omega^j \wedge \omega^a_j. \tag{44}$$

En supposant que C^a_{bc} sont constantes (par exemple le cas du pseudogroupe transitif) de l'une des formules de Jacobi [8]

$$C^a_{(bc,d)} + C^a_{j(b}\, C^j_{cd)} + C^a_{\alpha(b}\, C^\alpha_{cd)} = 0,$$

en utilisant (43), il résulte $C^a_{e(b}\, C^e_{cd)} = 0$, qui sont précisément les identités Jacobi du groupe γ d'ordre p. Donc nous avons obtenu une fibration principale de M. Ehresmann, qu'on peut appeler la fibration systatique de la base V_n. De (44_2) et (37_3) (mod ω^i) il suit que le groupe structural G est sous-groupe invariant de Γ, γ étant le groupe facteur correspondant. Dans le cas particulier de la remarque 1 de plus haut, c'est-à-dire si $C^i_{aj} = 0$, nous obtenons évidemment la formule remarquable $\Gamma = \gamma \times G$. Dans le cas d'un pseudogroupe transitif $\mathfrak{G}$, ayant le groupe structural G (la remarque 2 de plus haut), le pseudogroupe $\overline{\mathfrak{G}}$, qui opérera sur V_{n-p}, aura aussi G comme son groupe structural.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ehresmann, C. — *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950 (Paris, 1951), pp. 29—55.
2. Gheorghiev, Gh. — *Observaţii asupra metodei reperului mobil.* Analele şt. Univ. Iaşi, t. XII (1966), pp. 5 118.
3. Gheorghiev, Gh. et Popa, I. — *Sur la méthode du repérage et la théorie des variétés équiparamétriques.* C. R Acad. Sc Paris 263 (1966), pp. 911—914
4. Gheorghiev, Gh. — *Sur les groupes de Lie associés aux prolongements réguliers d'une variété différentiable; applications aux G-structures.* C. R. Acad. Paris, 265 (1967) pp. 779—82, 845—47.
5. Gheorghiev, Gh — *Sur les automorphismes de certaines G-structures.* C. R. Acad. Sc. Paris, 266 (1968) pp. 21—24.
6. Gheorghiev, Gh. — *Sur les prolongementes réguliers des espaces fibrés et les groupes de Lie associés.* C. R. Acad. Sc. Paris. 266 (1968) pp. 65—68.
7. Gheorghiev, Gh. — *Sur les distributions structurales d'un pseudogroupe Lie.* Rendiconti del Seminario Matematico, Università Padova, XXXIX (1967), pp. 35—46.
8. Gheorghiev, Gh. — *Sur la métode du repère mobile.* (Sous presse) Izvestia mat. Institut Acad. bulgare des Sciènces.
9. Kobayshi, S. et Nagano, T. — *On projective conections.* J. of Math. and Mech., 13 (1964),

10. Laptev, G. — *Structures infinitésimales fondamentales sur une variété régulière.* Travaux du Séminaire de Géométrie (Moscou), I (1966), pp. 139—189.
11. Miron R. — *Configuraţii Myller în spaţii riemanniene.* Studii şi cercetări şt., Mat. Iaşi 12 (1961), pp. 315—340.
12. Popa, I. et Gheorghiev, Gh. — *Sur une variété uni-dimensionnelle non holonome de A. Myller.* Analele şt. Univ. Iaşi, VI (1960), p. 56—75.

DESPRE DISTRIBUŢII STRUCTURALE ALE UNEI G-STRUCTURI

Rezumat

Distribuţia $\mathfrak{D}_p$ a unei varietăţi diferenţiabile V_n dotată cu o G-structură se numeşte structurală DS dacă ea este involutivă, invariantă la transformările grupului G şi constantă de-a lungul oricărei varietăţi integrale a lui $\mathfrak{D}_p$, inclusiv pe o varietate de dimensiune maximă $V_p \subset V_n$; dacă $\mathfrak{D}_p$ rămîne constantă pe toate varietăţile integrale avem o distribuţie structurală absolută DSA. Studiul global al unei DS revine a dota baza V_n cu o $\mathfrak{G}_1$-structură, numită Grassmann. Pe varietatea integrală V_p este indusă, prin restricţie, o g-structură. Dacă se consideră DS $\mathfrak{D}_q \subset V_p$ în raport cu structura indusă, studiul global al configuraţiei $\mathfrak{D}_q \subset \mathfrak{D}_p \subset V_n$ numită configuraţie $\mathfrak{M}$ (Myller) revine la a dota V_n cu o G_1-structură. Studiul structurii grupurilor $\mathfrak{G}_1$ şi G_1, precum şi al unor subgrupuri remarcabile ale acestora ca $\mathfrak{N}_1$ şi K_1 permite să se introducă pe V_n unele structuri strîns legate de soluţia problemei fibrărilor în sens Ehresmann ale unei varietăţi diferenţiabile. În ultimul paragraf se fac aplicaţii la unele G-structuri şi în special la studiul structurii unui pseudogrup Lie infinit.