LES PSEUDOCOMPLEXES DE COCHAÎNES ET LEURS APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR

IZU VAISMAN

Dans ce travail, nous introduirons les *pseudocomplexes de cochaînes* et nous montrerons comment il est possible d'obtenir, à l'aide de ceux-ci, des invariants cohomologiques des structures géométriques. Nos considérations ont été inspirées par la théorie des dérivations de Nijenhuis et Frölicher [7, 8, 9], dans la forme donnée par Kodaira et Spencer [12]. Dans cette direction il faut aussi remarquer les travaux de P. Liberman [13], T. Hangan [10], C. M. de Barros [1] et d'autres.

Il faut encore dire qu'on pourrait étudier, d'une manière tout à fait analogue, les pseudocomplexes de chaînes et c'est pourquoi nous ne les envisagerons pas.

Une partie de nos résultats a été communiquée dans [17], avec un certain changement des notations.

Dans le présent travail, on notera, par exemple, par (2, §2) la formule (2) du § 2, mais si la référence est relative au texte du même paragraphe (§ 2) on écrira seulement (2). La même convention vaut pour les théorèmes.

§ 1. Théorie algébrique

1.1. Soit

$$X = \bigoplus_{n=0}^{\infty} X^n \tag{1}$$

un groupe abélien gradué et supposons que, pour chaque n, on a défini un homomorphisme

$$h : X^n \to X^{n+1}. \tag{2}$$

L'ensemble (X, h) sera, par définition, un *pseudocomplexe de cochaînes* et h sera *l'opérateur* de celui-ci. Dans le cas particulier où

$$h^2 = 0, \tag{3}$$

le pseudocomplexe X[1]) se réduit à un complexe de cochaînes au sens usuel.

Les notions algébriques classiques de souspseudocomplexe, de pseudocomplexe quotient, d'homomorphisme etc. sont définies comme pour les complexes de cochaînes [6]. Rappelons seulement qu'un homomorphisme de pseudocomplexes sera un homomorphisme des groupes gradués en question, qui commute avec l'opérateur h.

Pour obtenir des théories de cohomologie pour le pseudocomplexe X, considérons le groupe gradué

$$Y = \bigoplus_{n=0}^{\infty} Y^n, \tag{4}$$

où l'on a posé

$$Y^n = X^n \times X^{n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

En généralisant la terminologie de [12], nous dirons que Y est le *groupe des jets*[2]) de X et que les éléments de Y^n sont des *jets de degré n*. Dans la suite, on notera par x_n, x'_n, etc. les éléments de X^n et par y_n, y'_n, etc. ceux de Y^n. On a donc:

$$y_n = (x_n, x_{n+1}). \tag{6}$$

Cherchons à trouver maintenant un cobord pour les jets, de telle manière que Y soit organisé comme complexe de cochaînes.

On remarque tout de suite qu'un tel cobord est donné par

$$D_0 y_n = (x_{n+1}, 0), \tag{7}$$

qui est un homomorphisme $D_0 : Y^n \to Y^{n+1}$, tel que $D_0^2 = 0$.

Mais ce n'est pas l'unique possibilité. En effet, supposons qu'on a trouvé un homomorphisme

$$\varkappa : Y^n \to X^{n+1} \tag{8}$$

et posons

$$D_{1\varkappa} y_n = (\varkappa y_n, h\varkappa y_n), \quad D_{2\varkappa} y_n = (-\varkappa y_n, h\varkappa y_n). \tag{9}$$

Cela donne des homomorphismes de Y^n dans Y^{n+1}, qui sont des cobords si l'on a respectivement:

[1]) Si aucune confusion n'est à craindre, un pseudocomplexe sera noté seulement par le groupe correspondant.

[2]) Il serait plus correct de parler de formes-jet au lieu de jets, mais la présente terminologie est plus courte et nous considérons qu'elle ne donnera pas lieu à des confusions avec la notion usuelle de jet.

$$\varkappa(\varkappa y_n, h\varkappa y_n) = 0, \quad \varkappa(-\varkappa y_n, h\varkappa y_n) = 0. \tag{10}$$

On a au moins un $\varkappa$ qui satisfait à la première condition (10) et au moins un qui satisfait à la seconde. Ceux-ci sont respectivement

$$\varkappa_1 y_n = hx_n - x_{n+1}, \tag{11}$$

$$\varkappa_2 y_n = hx_n + x_{n+1}. \tag{12}$$

Ils nous donnent deux corbords $D_{1\varkappa_1} = D_1$ et $D_{2\varkappa_2} = D_2$ tels que

$$D_1(x_n, x_{n+1}) = (hx_n - x_{n+1}, h^2 x_n - hx_{n+1}), \tag{13}$$

$$D_2(x_n, x_{n+1}) = (-hx_n - x_{n+1}, h^2 x_n + hx_{n+1}), \tag{14}$$

$$D_1^2 = D_2^2 = 0. \tag{15}$$

Il est aussi à remarquer que des formules plus générales pour des cobords sont

$$D_{1\varkappa\tau} = (\varkappa y_n, \tau h\varkappa y_n), \quad D_{2\varkappa\tau} = (-\varkappa y_n, \tau h\varkappa y_n), \tag{16}$$

où $\tau : X \to X$ est un homomorphisme de groupes gradués et on a la condition (10) correspondante.

Dans la suite nous nous bornerons à considérer seulement les opérateurs D_0, D_1 et D_2 qui sont toujours définis.

Nous allons montrer d'abord que les complexes de cochaînes (Y, D_0), (Y, D_1) et (Y, D_2) sont isomorphes. A ce but considérons les homomorphismes λ_1 et λ_2 définis par

$$\lambda_1 y_n = (x_n, \varkappa_1 y_n), \quad \lambda_2 y_n = (x_n, -\varkappa_2 y_n). \tag{17}$$

Cela nous donne

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \text{id.}, \tag{18}$$

ce qui montre que λ_1 et λ_2 sont des automorphismes involutifs pour le groupe gradué Y.

Maintenant, il est simple de voir que l'on a

$$\begin{gathered} \lambda_1 D_1 = D_0 \lambda_1, \quad D_1 \lambda_1 = \lambda_1 D_0, \\ \lambda_2 D_2 = D_0 \lambda_2, \quad D_2 \lambda_2 = \lambda_2 D_0, \\ (\lambda_2 \lambda_1) D_1 = D_2 (\lambda_2 \lambda_1), \quad (\lambda_1 \lambda_2) D_2 = D_1 (\lambda_1 \lambda_2), \end{gathered} \tag{19}$$

et notre affirmation sur l'isomorphisme des trois complexes se trouve ainsi justifiée.

Dans la suite il sera encore utile d'envisager les homomorphismes de groupes gradués

$$i_0, i_1, i_2 : X \to Y, \tag{20}$$

définis par

(21) $$i_0 x_n = (x_n, 0), \quad i_1 x_n = (x_n, hx_n), \quad i_2 x_n = (x_n, -hx_n).$$

Alors, il est facile de voir que les suites

(22) $$0 \to X^0 \xrightarrow{i_0} Y^0 \xrightarrow{D_0} Y^1 \xrightarrow{D_0} \dots,$$

(23) $$0 \to X^0 \xrightarrow{i_1} Y^0 \xrightarrow{D_1} Y^1 \xrightarrow{D_1} \dots,$$

(24) $$0 \to X^0 \xrightarrow{i_2} Y^0 \xrightarrow{D_2} Y^1 \xrightarrow{D_2} \dots,$$

sont exactes, d'où il suit que les trois complexes considérés ci-dessus sont acycliques [6].

En résumant tout ce qui précède, on voit que nous avons démontré le

Théorème 1. *Si X est un pseudocomplexe de cochaînes et Y le groupe de ses jets, alors Y possède trois structures naturelles isomorphes de complexes acycliques de cochaînes.*

Remarquons encore qui si $h = 0$, alors $D_1 = D_2 = -D_0$ et que D_2 s'obtient de D_1 en remplaçant h par $-h$ et réciproquement.

1.2. Établissons maintenant quelques autres résultats sur la configuration considérée auparavant.

Tout d'abord, certaines remarques générales. Ainsi, pour les opérateurs considérés on a encore les relations

(25) $$\lambda_1 i_0 = i_1, \quad \lambda_1 i_1 = i_0, \quad \lambda_2 i_0 = i_2, \quad \lambda_2 i_2 = i_0,$$

(26) $$D_0 = i_0 \varkappa_1 \lambda_1 = -i_0 \varkappa_2 \lambda_2, \quad D_1 = i_1 \varkappa_1, \quad D_2 = -i_2 \varkappa_2.$$

Ensuite, soient encore les homomorphismes

(27) $$p : Y^n \to X^n, \quad q : Y^n \to X^{n+1}, \quad j : X^{n+1} \to Y^n,$$

les deux premiers étant les projections du produit direct et le dernier

(28) $$jx_{n+1} = (0, x_{n+1}).$$

On obtient d'ici les relations

(29) $$D_0 j = i_0, \quad D_1 j = -i_1, \quad D_2 j = -i_2, \quad \lambda_1 j = \lambda_2 j = -j.$$

Cela posé, nous voyons qu'on a trois décompositions de Y^n en somme directe :

(30) $$Y^n = i_0 X^n \oplus jX^{n+1},$$

(31) $$Y^n = i_1 X^n \oplus jX^{n+1},$$

(32) $$Y^n = i_2 X^n \oplus jX^{n+1},$$

la décomposition d'un élément y_n étant respectivement

(33) $$y_n = i_0 x_n + jx_{n+1},$$

(34) $$y_n = i_1 x_n - j\varkappa_1 y_n,$$

(35) $$y_n = i_2 x_n + j\varkappa_2 y_n.$$

Une autre remarque simple est la suivante : si $\alpha : X \to \tilde{X}$ est un homomorphisme entre deux pseudocomplexes de cochaînes, il induit les homomorphismes des complexes de cochaînes :

$$\alpha^0 : (Y, D_0) \to (\tilde{Y}, D_0), \quad \alpha^1 : (Y, D_1) \to (\tilde{Y}, D_1), \quad \alpha^2 : (Y, D_2) \to (\tilde{Y}, D_2),$$

en posant $\alpha(x_n, x_{n+1}) = (\alpha x_n, \alpha x_{n+1})$.

Supposons maintenant que les X^n sont des espaces vectoriels. Alors la même chose vaut pour les espaces Y^n des jets et, si h sont des homomorphismes linéaires, tous les homomorphismes envisagés sont linéaires.

Supposons de plus que les espaces X^n sont doués d'un produit scalaire noté par $\langle x_n, x'_n \rangle$. Alors, on obtient évidemment un produit scalaire dans l'espace Y^n, en posant pour $y_n = (x_n, x_{n+1})$ et $y'_n = (x'_n, x'_{n+1})$

(36) $$\langle y_n, y'_n \rangle = \langle x_n, x'_n \rangle + \langle x_{n+1}, x'_{n+1} \rangle.$$

Dans ce cas on peut calculer immédiatement les opérateurs adjoints de D_0, D_1 et D_2. Ce sont les homomorphismes

(37) $$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2 : Y^n \to Y^{n-1},$$

donnés par :

(38) $$\begin{aligned} \Delta_0(x_n, x_{n+1}) &= (0, x_n), \\ \Delta_1(x_n, x_{n+1}) &= (h^* x_n + h^{*2} x_{n+1}, -x_n - h^* x_{n+1}), \\ \Delta_2(x_n, x_{n+1}) &= (h^{*2} x_{n+1} - h^* x_n, h^* x_{n+1} - x_n), \end{aligned}$$

où h^* est l'opérateur adjoint de h, c'est-à-dire $h^* : X^{n+1} \to X^n$ et

$$\langle hx_n, x_{n+1} \rangle = \langle x_n, h^* x_{n+1} \rangle.$$

En effet, on vérifie tout de suite que

$$\langle D_\alpha y_n, y_{n+1} \rangle = \langle y_n, \Delta_\alpha y_{n+1} \rangle \quad (\alpha = 0, 1, 2)$$

et aussi que $\Delta_0^2 = \Delta_1^2 = \Delta_2^2 = 0$. Donc (Y, Δ_α) $(\alpha = 0, 1, 2)$ sont des complexes de chaînes.

Les *laplaciens* correspondants à ces trois opérateurs sont respectivement

(39) $$\square_0(x_n, x_{n+1}) = (D_0 \Delta_0 + \Delta_0 D_0)(x_n, x_{n+1}) = (x_n, x_{n+1}),$$

$$(40)\qquad \square_1(x_n, x_{n+1}) = (D_1\Delta_1 + \Delta_1 D_1)(x_n, x_{n+1}) = ((hh^* + h^*h + h^{*2}h^2)\,x_n + x_n - (h^{*2}h - hh^{*2})\,x_{n+1},\ (hh^* + h^*h + h^2h^{*2})\,x_{n+1} + x_{n+1} + (h^2h^* - h^*h^2)\,x_n),$$

$$(41)\qquad \square_2(x_n, x_{n+1}) = (D_2\Delta_2 + \Delta_2 D_2)(x_n, x_{n+1}) = ((hh^* + h^*h + h^{*2}h^2)\,x_n + x_n + (h^{*2}h - hh^{*2})\,x_{n+1},\ (hh^* + h^*h + h^2h^{*2})\,x_{n+1} + x_{n+1} - (h^2h^* - h^*h^2)\,x_n).$$

Il suit que $\square_0 y_n = 0$ si et seulement si $y_n = 0$. Quant au reste, si $\square_1 y_n = 0$ nous dirons que y_n est un *jet harmonique de première espèce* et si $\square_2 y_n = 0$ qu'il est un *jet harmonique de seconde espèce*. Remarquons que, si X est un complexe de cochaînes, c'est-à-dire $h^2 = 0$, on a $h^{*2} = 0$ et il s'ensuit $\square_1 = \square_2$; dans ce cas nous n'avons pas de jets harmoniques non nuls. En effet, pour un tel jet on aura d'après (40)

$$(hh^* + h^*h)\,x_n + x_n = (hh^* + h^*h)\,x_{n+1} + x_{n+1} = 0,$$

ce qui donne

$$< h^*x_n, h^*x_n > + < hx_n, hx_n > + < x_n, x_n > = 0,$$

et une relation analogue pour x_{n+1}. Mais, dans la somme précédente, tous les termes sont non-négatifs et on en déduit $x_n = x_{n+1} = 0$.

Une autre situation importante est celle où le pseudocomplexe X possède une structure d'algèbre graduée sur un anneau R. Alors le groupe Y des jets de X s'organise d'abord comme module sur R en posant

$$(42)\qquad \alpha y_p = (\alpha x_p, \alpha x_{p+1}) \quad (\alpha \in R)$$

et ensuite comme algèbre graduée sur R en posant

$$(43)\qquad y_p . y_q = (x_p, x_{p+1})(x_q, x_{q+1}) = (x_p . x_q, x_p . x_{q+1} + x_{p+1} . x_q).$$

En effet il est simple de vérifier les propriétés correspondantes.

Mentionnons seulement la formule

$$(44)\qquad (\alpha y_p) . y_q = y_p . (\alpha y_q) = \alpha (y_p . y_q) \quad (\alpha \in R).$$

Supposons maintenant que h est une dérivation de l'algèbre X, c'est-à-dire qu'on a

$$(45)\qquad h(\alpha x_p) = \alpha h x_p \quad (\alpha \in R), \qquad h(x_p + x_q) = hx_p + hx_q,$$
$$h(x_p . x_q) = (hx_p) . x_q + x_p . (hx_q).$$

On trouve alors

$$(46)\qquad \lambda_\sigma(y_p . y_q) = (\lambda_\sigma y_p) . (\lambda_\sigma y_q), \quad \lambda_\sigma(\alpha y_p) = \alpha(\lambda_\sigma y_p), \quad (\alpha \in R), \quad (\sigma = 1, 2),$$

ce qui montre que λ_1 et λ_2 sont des automorphismes de l'algèbre Y.

On remarquera aussi les relations

$$(47)\qquad i_\sigma(x_n . x_m) = (i_\sigma x_n) . (i_\sigma x_m), \quad (\sigma = 0, 1, 2).$$

Mais, les opérateurs D_σ $(\sigma = 0, 1, 2)$ ne sont pas des dérivations de l'algèbre Y. Pourtant, on peut obtenir des résultats utiles. Ainsi, on trouve d'abord

$$(48)\qquad D_0(y_p . y_q) = (D_0 y_p) . y_q + y_p . (D_0 y_q) - 2jp\,(D_0 y_p . D_0 y_q)$$

et ensuite, compte tenu de (19),

$$(49)\qquad D_\sigma(y_p . y_q) = (D_\sigma y_p) . y_q + y_p . (D_\sigma y_q) + 2jp\,(D_\sigma y_p . D_\sigma y_q), \quad (\sigma = 1, 2).$$

Il en résulte que les cocycles des complexes (Y, D_σ) $(\sigma = 0, 1, 2)$ constituent des sousalgèbres graduées de Y. De plus, si T est une sous-algèbre graduée de Y, qui est complexe de cochaînes par rapport à un D_σ, mais qui n'est pas acyclique, alors les cocycles de T constituent de nouveau une sousalgèbre de T et les cobords — un idéal de celle-ci. Dans ce cas on a une structure induite d'algèbre graduée sur le module de cohomologie de T.

Il est aisé de voir que si l'algèbre X est associative (commutative) alors il en est de même pour l'algèbre Y. Dans ce cas, on peut définir sur Y une structure d'algèbre de Lie graduée [14], chose importante du point de vue géométrique, en définissant le produit de deux jets par la *commutation* de (43) [14]:

$$(50)\qquad [y_p, y_q] = y_p . y_q - (-1)^{pq}\, y_q . y_p.$$

Maintenant on peut obtenir une dérivation de cette algèbre en posant

$$(51)\qquad \delta y_p = [y_1, y_p],$$

où y_1 est un élément fixé quelconque de Y_1. Si, de plus, on a $[y_1, y_1] = 0$, ce qui est équivalent à $y_1 = jx_2$, alors $\delta^2 = 0$, donc (Y, δ) est un complexe de cochaînes et son module de cohomologie possède une structure d'algèbre Lie graduée.

1.3. Soit

$$(52)\qquad T = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n$$

un sousgroupe gradué du groupe Y des jets du pseudocomplexe de cochaînes X. Compte tenu des formules (30), (31), (32), il suit qu'on a les décompositions en somme directe

$$(53)\qquad T^n = i_0 U^n \oplus jV^{n+1} = i_1 A^n \oplus jB^{n+1} = i_2 E^n \oplus jF^{n+1},$$

où U^n, A^n, E^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ et V^n, B^n, F^n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont des sous-

groupes de X^n. Dans ce qui suit, c'est la première décomposition (53) qui sera considérée fondamentale.

Nous remarquons que de (53) il suit

$$\lambda_1 T^n = i_0 A^n \oplus jB^{n+1}, \quad \lambda_2 T^n = i_0 E^n \oplus jF^{n+1}. \tag{54}$$

Pour les applications géométriques que nous allons envisager il est nécessaire d'établir les conditions pour l'exactité des suites du type (22), (23), (24), formées avec les groupes T^n ou $\lambda_\alpha T^n$, $(\alpha = 1, 2)$.

Remarquons d'abord que les diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to V^0 & \xrightarrow{i_0} & T^0 & \xrightarrow{D_0} & T^1 & \xrightarrow{D_0} & \dots, & 0 \to V^0 & \xrightarrow{i_\alpha} & T^0 & \xrightarrow{D_\alpha} & T^1 & \xrightarrow{D_\alpha} & \dots \\ \text{id.}\downarrow & & \lambda_\alpha\downarrow & & \lambda_\alpha\downarrow & & & \text{id.}\downarrow & & \lambda_\alpha\downarrow & & \lambda_\alpha\downarrow & & \\ 0 \to V^0 & \xrightarrow{i_\alpha} & \lambda_\alpha T^0 & \xrightarrow{D_\alpha} & \lambda_\alpha T_1 & \xrightarrow{D_\alpha} & \dots, & 0 \to V^0 & \xrightarrow{i_0} & \lambda_\alpha T^0 & \xrightarrow{D_0} & \lambda_\alpha T_1 & \xrightarrow{D_0} & \dots \end{array}$$

où $\alpha = 1, 2$ et V^0 est un sousgroupe quelconque de X^0, ont, dans le cas où leurs lignes ont un sens, toutes les cellules commutatives. Il suit que les deux lignes des diagrammes (55) ont simultanément du sens et sont (ou ne sont pas) simultanément des suites exactes.

Évidemment, dans ces diagrammes, on peut changer le sens des flèches verticales et employer $\lambda_\alpha^2 = \text{id.}$ $(\alpha = 1, 2)$, ce qui nous montre finalement qu'il suffit de nous occuper des suites

$$0 \to V^0 \xrightarrow{i_\alpha} T^0 \xrightarrow{D_\alpha} T^1 \xrightarrow{D_\alpha} \dots \quad (\alpha = 0, 1, 2). \tag{56}$$

Pour celles-ci nous démontrerons le

Théorème 2. *Pour que la suite* (56) *soit exacte dans le cas* $\alpha = 0$, *il est nécessaire et suffisant qu'on ait :*

$$U^n = V^n \quad (n \geqslant 0). \tag{57}$$

Pour que la suite (56) *soit exacte dans les cas* $\alpha = 1, 2$, *il est nécessaire et suffisant qu'on ait :*

$$V^n \subseteq U^n \quad h(V^n) \subseteq V^{n+1} \quad h(U^n) \subseteq U^{n+1} \quad h^2(U^n) \subseteq V^{n+2} \quad (n \geqslant 0) \tag{58}$$

et que la suite

$$0 \to U^0/V^0 \xrightarrow{\varepsilon h_*} U^1/V^1 \xrightarrow{\varepsilon h_*} U^2/V^2 \xrightarrow{\varepsilon h_*} \dots, \tag{59}$$

où h_* *est induit par* h *et* $\varepsilon = \pm 1$ *selon que* $\alpha = 1$ *ou* $\alpha = 2$, *soit exacte.*

Démonstration. Il est évident qu'il faut nous occuper seulement des cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, car $\alpha = 2$ s'obtient en remplaçant h par $-h$.

Considérons alors $\alpha = 0$. Si l'on exprime que $i_0(V^0) \subseteq T^0$ et que $D_0(T^n) \subseteq T^{n+1}$, on trouve $V^n \subseteq U^n$ $(n \geqslant 0)$ et puis, de l'exactité de la suite (56) correspondante on a $U^n \subseteq V^n$ $(n \geqslant 0)$. Donc, la nécessité de la condition (57). La suffisance de cette condition est immédiate.

Dans le cas $\alpha = 1$, supposons l'existence et l'exactité de la suite (56). Si $(a_n, a_{n+1}) \in T^n$, $a_n \in U^n$ et $a_{n+1} \in V^{n+1}$ et de $D_1(a_n, a_{n+1}) \in T^{n+1}$ on a $ha_n - a_{n+1} \in U^{n+1}$, $h(ha_n - a_{n+1}) \in V^{n+2}$. Ceci revient à $U^{n+1} \supseteq V^{n+1} \dotplus h(U^n)$, $h(V^{n+1} \dotplus h(U^n)) \subseteq V^{n+2}$, $(n \geqslant 0)$, où $\dotplus$ désigne l'union des sousgroupes en question. On obtient ainsi toutes les conditions (58), sauf les deux premières pour $n = 0$, qui s'obtiennent en écrivant que $\operatorname{Im} i_1 \subseteq T^0$.

Compte tenu de (58), la suite (59) a maintenant du sens, h_* étant bien déterminé. Si $(a_n, a_{n+1}) \in T^n$ et $D_1(a_n, a_{n+1}) = 0$, on a $ha_n = a_{n+1}$ et il s'ensuit $a_n = hb_{n-1} - b_n$, avec $b_{n-1} \in U^{n-1}$ et $b_n \in V^n$, ce qui donne l'exactité de la suite (59), sauf les deux premiers membres. Mais pour ceux-ci on peut faire une démonstration analogue.

Les conditions énoncées sont donc nécessaires. La suffisance de ces conditions s'établit en suivant la voie inverse. Ainsi le théorème 2 est complètement démontré. Ce théorème sera très utile dans les applications géométriques.

1.4. Nous terminons les considérations de nature algébrique, en indiquant la possibilité d'étendre les résultats précédents aux groupes bigradués.

Ainsi, nous appellerons *pseudocomplexe double de cochaînes* un groupe bigradué

$$M = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} M^{pq}, \tag{60}$$

muni de deux systèmes de homomorphismes

$$h' : M^{pq} \to M^{p+1,q}, \quad h'' : M^{pq} \to M^{p,q+1}. \tag{61}$$

Au pseudocomplexe M nous associons le groupe bigradué

$$n = \bigoplus_{p,q=0}^{\infty} N^{pq}, \tag{62}$$

où

$$N^{pq} = M^{pq} \times M^{p+1,q} \times M^{p,q+1} \tag{63}$$

qui sera nommé le groupe des *jets* de M.

Les notations employées dans la suite correspondent à celles des paragraphes précédents.

Définissons sur N les opérateurs

$$D_0' : N^{pq} \to N^{p+1,q}, \quad D_0'' : N^{pq} \to N^{p,q+1} \tag{64}$$

en posant

$$\begin{aligned} D_0'(m_{pq}, m_{p+1,q}, m_{p,q+1}) &= (m_{p+1,q}, 0, 0), \\ D_0''(m_{pq}, m_{p+1,q}, m_{p,q+1}) &= (m_{p,q+1}, 0, 0). \end{aligned} \tag{65}$$

On trouve alors immédiatement

$$D_0'^2 = D_0''^2 = D_0' D_0'' + D_0'' D_0' = 0, \tag{66}$$

ce qui nous montre qu'on a obtenu sur N une structure de complexe double de cochaînes [6].

Ensuite, nous pouvons définir les homomorphismes

$$\varkappa'_\alpha : N^{pq} \to M^{p+1,q}, \quad \varkappa''_\alpha : N^{pq} \to M^{p,q+1}, \quad (\alpha = 1, 2), \tag{67}$$

en posant

$$\begin{aligned} \varkappa'_\alpha (m_{pq}, m_{p+1,q}, m_{p,q+1}) &= \varepsilon h' m_{pq} - m_{p+1,q}, \\ \varkappa''_\alpha (m_{pq}, m_{p+1,q}, m_{p,q+1}) &= \varepsilon h'' m_{pq} - m_{p,q+1}, \end{aligned} \quad (\alpha = 1, 2), \tag{68}$$

où $\varepsilon = 1$ si $\alpha = 1$ et $\varepsilon = -1$ si $\alpha = 2$.

A l'aide de ceux-ci on trouve les homomorphismes $\lambda_\alpha : N \to N$ $(\alpha = 1, 2)$, définis par

$$\lambda_\alpha (m_{pq}, m_{p+1,q}, m_{p,q+1}) = (m_{pq}, \varkappa'_\alpha n_{pq}, \varkappa''_\alpha n_{pq}), \quad (\alpha = 1, 2), \tag{69}$$

où n_{pq} est le triplet du premier membre et on voit immédiatement que $\lambda_\alpha^2 = \text{id.}$, ce qui montre que λ_α sont des automorphismes involutifs.

En posant alors

$$D'_\alpha = \lambda_\alpha D'_0 \lambda_\alpha, \quad D''_\alpha = \lambda_\alpha D''_0 \lambda_\alpha \quad (\alpha = 1, 2), \tag{70}$$

ce qui revient à

$$\begin{aligned} D'_\alpha n_{pq} &= (\varepsilon h' m_{pq} - m_{p+1,q}, h'^2 m_{pq} - \varepsilon h' m_{p+1,q}, h'' h' m_{pq} - \varepsilon h'' m_{p+1,q}), \\ D''_\alpha n_{pq} &= (\varepsilon h'' m_{pq} - m_{p+1,q}, h' h'' m_{pq} - \varepsilon h' m_{p,q+1}, h''^2 m_{pq} - \varepsilon h'' m_{p,q+1}), \end{aligned} \tag{71}$$

où $\alpha = 1, 2$ et $\varepsilon = \pm 1$ selon que $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$, on a

$$D'^2_\alpha = D''^2_\alpha = D'_\alpha D''_\alpha + D''_\alpha D'_\alpha = 0, \quad (\alpha = 1, 2), \tag{72}$$

ce qui montre que $(N, D'_\alpha, D''_\alpha)$ sont deux complexes doubles de cochaînes, isomorphes à (N, D'_0, D''_0).

Pour les pseudocomplexes doubles, il est aussi possible de définir les homomorphismes

$$i_0 : M^{pq} \to N^{pq}, \quad i_\alpha : M^{pq} \to N^{pq}, \quad (\alpha = 1, 2), \tag{73}$$

à l'aide des formules

$$i_0 m_{pq} = (m_{pq}, 0, 0), \quad i_\alpha m_{pq} = (m_{pq}, \varepsilon h' m_{pq}, \varepsilon h'' m_{pq}), \tag{74}$$

$(\alpha = 1, 2)$ et $\varepsilon = 1$ si $\alpha = 1$, $\varepsilon = -1$ si $\alpha = 2$. On a alors les formules

$$\lambda_\alpha i_0 = i_\alpha, \quad \lambda_\alpha i_\alpha = i_0 \quad (\alpha = 1, 2) \tag{75}$$

et

$$D'_\alpha = \varepsilon i_\alpha \varkappa'_\alpha, \quad D''_\alpha = \varepsilon i_\alpha \varkappa''_\alpha, \quad D'_0 = \varepsilon i_0 \varkappa'_\alpha \lambda_\alpha, \quad D''_0 = \varepsilon i_0 \varkappa''_\alpha \lambda_\alpha, \tag{76}$$

où, de nouveau, $\alpha = 1, 2$ et $\varepsilon = \pm 1$.

On peut définir encore deux opérateurs j_1 et j_2, donnés par

$$j_1 m_{p+1,q} = (0, m_{p+1,q}, 0), \quad j_2 m_{p,q+1} = (0, 0, m_{p,q+1}) \tag{77}$$

ainsi que les projections de Y^{pq} sur ses trois facteurs.

Remarquons aussi qu'on a les décompositions suivantes en somme directe

$$N^{pq} = i_\alpha M^{pq} \oplus j_1 M^{p+1,q} \oplus j_2 M^{p,q+1} \quad (\alpha = 0, 1, 2) \tag{78}$$

etc.

On sait qu'à un complexe double de cochaînes on peut associer plusieurs complexes de cochaînes et les groupes de cohomologie correspondants [6]. Par exemple, on peut utiliser indépendamment chaque opérateur D'_α, D''_α $(\alpha = 0, 1, 2)$ ou on peut considérer les groupes

$$P^n = \bigoplus_{p+q=n} N^{pq}$$

avec un des opérateurs $D_\alpha = D'_\alpha + D''_\alpha$ $(\alpha = 0, 1, 2)$ [6].

§ 2. Applications aux formes scalaires d'une variété différentiable *)

2.1. Pour obtenir des applications de la théorie précédente en géométrie différentielle, nous considérerons d'abord comme pseudocomplexe de cochaînes, le complexe de cochaînes

$$\Omega(U) = \bigoplus_{n=0}^{p} \Omega^n(U), \tag{1}$$

formé par les formes différentielles extérieures de degrés $0, 1, 2, \ldots, p$, définies sur un ouvert U d'une variété différentiable V_p paracompacte, de dimension p, l'opérateur étant la différentielle extérieure, qui sera notée par d.

Notons alors par $\mathcal{J}(\Omega(U))$ le groupe des jets du pseudocomplexe $\Omega(U)$ et par $\mathcal{J}^n(\Omega(U))$ le groupe des jets de degré n. Ces derniers sont des paires de la forme (ω_n, ω_{n+1}) où les éléments sont des formes différentielles de degré n et $n+1$ respectivement. Cette notation sera toujours gardée dans la suite.

Les groupes $\Omega(U)$ avec les restrictions usuelles définissent un préfaisceau sur V_p, dont le faisceau des germes sera noté par Ω. Les fibres

*) La différentiabilité sera toujours supposée de la classe C^∞.

de Ω sont évidemment $\bigoplus_{n=0}^{p} \Omega_x^n$, $(x \in V_p)$ les termes étant les fibres des faisceaux Ω^n des germes de formes différentielles de degré n sur V_p. De même on aura les faisceaux $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}^n$ des germes de jets, qui se trouve dans une relation analogue. Il est évident que les faisceaux Ω, Ω^n et $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^n$ sont des faisceaux fins sur V_p.

Maintenant, on peut prendre en considération, selon la nécessité, tous les homomorphismes envisagés dans la première partie du travail. On constate que ce sont des homomorphismes de préfaisceaux, donc ils induisent des homomorphismes des faisceaux de germes correspondants. Ainsi, par exemple, les suites exactes (22), (23), (24) du § 1 donnent des suites exactes de faisceaux:

$$0 \to \Omega^0 \xrightarrow{i_\alpha} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{D_\alpha} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{D_\alpha} \mathcal{J}^2 \to \dots \quad (\alpha = 0, 1, 2). \tag{2}$$

Bornons-nous à considérer seulement le cas $\alpha = 1$. On a alors

$$i_1\, \omega_n = (\omega_n, d\omega_n), \tag{3}$$

$$D_1 (\omega_n, \omega_{n+1}) = (d\omega_n - \omega_{n+1}, -d\omega_{n+1}) \tag{4}$$

et la suite exacte (2) pour $\alpha = 1$.

On sait que, dans ce cas, il n'y a pas de jets harmoniques. Pourtant, il ne manque pas d'intérêt de considérer la situation $U = V_p$, où V_p est une variété riemannienne compacte et orientée, dont le tenseur métrique est g_{ij}. On sait [4] qu'on peut définir un produit scalaire global pour les formes, qui sera, dans la suite, noté par $<\omega_n, \omega'_n>$ et qu'il y a l'opérateur adjoint de d par rapport à ce produit qui est noté par δ; $\delta\omega_n$ est une forme de degré $n-1$. On aura alors un produit scalaire pour les jets, donné par

$$<(\omega_n, \omega_{n+1}), (\omega'_n, \omega'_{n+1})> = <\omega_n, \omega'_n> + <\omega_{n+1}, \omega'_{n+1}>. \tag{5}$$

L'opérateur adjoint de D_1, par rapport à ce produit est, d'après (38, § 1), donné par

$$\Delta_1 (\omega_n, \omega_{n+1}) = (\delta\omega_n, -\omega_n - \delta\omega_{n+1}) \tag{6}$$

et le laplacien correspondant par (40, § 1)

$$\square_1 (\omega_n, \omega_{n+1}) = (\Delta\omega_n + \omega_n, \Delta\omega_{n+1} + \omega_{n+1}), \tag{7}$$

où $\Delta = d\delta + \delta d$.

Remarquons que si

$$\begin{aligned} \omega_n &= d\alpha_{n-1} + \delta\beta_{n+1} + H\omega_n, \\ \omega_{n+1} &= d\alpha_n + \delta\beta_{n+2} + H\omega_{n+1} \end{aligned} \tag{8}$$

sont les décompositions des formes ω_n et ω_{n+1}, où $H\omega_n$ et $H\omega_{n+1}$ sont des formes harmoniques [4], alors on a la décomposition

$$\begin{aligned} (\omega_n, \omega_{n+1}) &= D_1 (\alpha_{n-1}, -H\omega_n - \alpha_n) + \\ &+ \Delta_1 (\beta_{n+1} - H\omega_{n+1}, -\beta_{n+2}) + (-\alpha_n, \beta_{n+1}). \end{aligned} \tag{9}$$

Si l'on a encore $d\omega_n = 0$ et $\delta\omega_{n+1} = 0$, alors le dernier terme de cette formule s'évanouit.

Une autre décomposition à remarquer est

$$(\omega_n, \omega_{n+1}) = D_1 (\alpha_{n-1}, -H\omega_n) - \Delta_1 (H\omega_{n+1}, \beta_{n+2}) + (\delta\beta_{n+1}, d\alpha_n). \tag{10}$$

Ici, on constate que les trois termes sont deux à deux orthogonaux et que le dernier appartient à l'image de l'opérateur

$$A : \mathcal{J}^n \to \mathcal{J}^n,$$

défini par

$$A (\omega_n, \omega_{n+1}) = (\delta\omega_{n+1}, d\omega_n).$$

Si, de plus, $D_1 (\omega_n, \omega_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire $\omega_{n+1} = d\omega_n$, on a $H\omega_{n+1} = \delta\beta_{n+2} = 0$, $d\alpha_n = d\delta\beta_{n+1}$ et l'on voit que

$$(\omega_n, d\omega_n) = D_1 (\alpha_{n-1}, -\delta\beta_{n+1} - H\omega_n). \tag{11}$$

Ici, le second membre est déterminé d'une manière unique par la condition qu'il soit orthogonal à l'espace des formes exactes et α_{n-1} est déterminé à une différentielle exacte près.

En nous rapportant aussi au § 1.2, remarquons que l'algèbre extérieure induit une structure d'algèbre associative sur $\mathcal{J}(\Omega(U))$ et celle-ci peut être employée comme on a y indiqué.

2.2. Une application des questions discutées dans le § 1.3 s'obtient si l'on considère définie sur la variété V_p une structure géométrique donnée par une *forme extérieure fermée* Θ, *de degré* k $(1 \leqslant k \leqslant p-1)$. On dira alors que la variété V_p possède une Θ-*structure*.

Dans ce cas, on peut considérer sur la variété V_p le faisceau des germes de fonctions différentiables $f : V_p \to R$ (droite réelle) telles que

$$(df) \wedge \Theta = 0. \tag{12}$$

C'est évidemment un faisceau de groupes abéliens. Il sera noté par $\mathcal{F}(\Theta)$ et sera nommé le *faisceau structural de la* Θ-*structure*.

Bornons-nous à considérer seulement le cas particulier où l'on a localement

$$\Theta = df_1 \wedge \dots \wedge df_k, \tag{13}$$

où $f_1, \dots, f_k$ sont des fonctions différentiables. Nous dirons alors que la Θ-structure est *réductible*. On sait que si Θ est de degré 1 ou $p-1$, on a toujours la formule (13).

Nous nous proposons de trouver dans ce cas une résolution fine du faisceau $\mathcal{F}$*).

A ce but, considérons sur les ensembles ouverts U de V_p le sous-groupe T de $\mathcal{J}(\Omega(U))$, défini par la formule (52) du § 1 et tel qu'on ait la première décomposition ((53), § 1), où les groupes U^n sont les groupes $\Omega^n(U)$, $(n = 0, 1, 2,...)$, et les groupes V^n $(n = 1, 2,...)$ sont les sousgroupes $V^n(U) \subseteq \Omega^n(U)$ des formes de degré n pour lesquelles on a

$$\omega_n \wedge \Theta = 0. \tag{14}$$

Alors la vérification des conditions (58) est immédiate.

Quant à la suite (59) § 1, le lemme classique de Poincaré nous permet d'en démontrer l'exactité pour un ouvert U suffisamment petit. En effet on a d'abord

$$d(\omega_n + V^n) = d\omega_n + V^{n+1},$$

d'où

$$d^2(\omega_n + V^n) = V^{n+2}$$

et puis, si

$$d(\omega_n + V^n) = V^{n+1},$$

cela revient à

$$d\omega_n \wedge \Theta = d\omega^n \wedge df_1 \wedge ... \wedge df_k = 0,$$

ce qui donne

$$d\omega_n = \alpha_1 \wedge df_1 + ... + \alpha_k \wedge df_k.$$

Il en résulte $d\omega_n = 0 \pmod{df_1,..., df_k}$ et, par le lemme de Poincaré, $\omega_n = d\gamma \pmod{df_1,..., df_k}$, d'où finalement

$$\omega_n = d\gamma + \beta_1 \wedge df_1 + ... + \beta_k \wedge df_k.$$

Il s'ensuit

$$(\omega_n - d\gamma) \wedge \Theta = 0.$$

Mais alors on a

$$\omega_n + V^n = d(\gamma + V^{n-1}),$$

car $\omega_n = d\gamma + (\omega_n - d\gamma)$ et $\omega_n - d\gamma \in V^n$; cela achève la démonstration de l'exactité locale de la suite (59, § 1), pour notre cas.

Alors le théorème 2, § 1 nous assure l'exactité locale de la suite correspondante à (56), § 1, avec $\alpha = 1$ et V^0-le groupe des sections de $\mathcal{F}(\Theta)$, ce qui revient à l'exactité de la suite de faisceaux:

*) A l'égard de ce sujet voir aussi [6].

$$0 \to \mathcal{F}(\Theta) \xrightarrow{i_1} T^0 \xrightarrow{D_1} T^1 \xrightarrow{D_1} ... \tag{15}$$

qui est évidemment une résolution fine du faisceau $\mathcal{F}(\Theta)$.

En notant par

$$0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{i_1^*} \Gamma(T^0) \xrightarrow{D^*} \Gamma(T^1) \xrightarrow{D^*} ... \tag{16}$$

la suite des sections globales des faisceaux de (15) (qui n'est plus exacte) nous avons donc [6] (voir aussi [15]) le

Théorème 1. *Les groupes de cohomologie de la variété V_p à coefficients dans le faisceau $\mathcal{F}(\Theta)$ sont donnés par*

$$H^s(V_p, \mathcal{F}(\Theta)) \approx \operatorname{Ker} D_s^* / \operatorname{Im} D_{s-1}^* \tag{17}$$

(D_s^* note l'opérateur D^* sur $\Gamma(T^s)$).

Il est clair que les groupes $H^s(V_p, \mathcal{F}(\Theta))$ sont des invariants globaux de la Θ-structure envisagée. Pour $s > n - k + 1$, $H^s(V_p, \mathcal{F}(\Theta))$ sont triviaux, car $T^s = \mathcal{J}^s$ pour $s \geqslant n - k + 1$.

Si $(\omega_n, \omega_{n+1}) \in T^n$ et $(\omega_m, \omega_{m+1}) \in T^m$, alors il est clair que le produit, défini par la formule (43, § 1), à l'aide du produit extérieur des formes différentielles, nous donne un élément de T^{n+m}, la condition (14) étant vérifiée. Mais, les conditions (45, § 1), ne sont complètement vérifiées que si n est un nombre pair. On obtient donc un produit entre deux classes de cohomologie des groupes (17) si la première est de degré pair.

De plus, le produit extérieur étant associatif, on obtient pour les jets de T une structure d'algèbre de Lie graduée à l'aide de la formule (50, § 1). Si l'on se donne encore une forme quadratique extérieure ω_2, on a une dérivation de cette algèbre avec la formule (51, § 1). C'est bien le cas d'une structure presque-symplectique.

On peut citer beaucoup d'exemples importants de structures géométriques possédant une forme réductible fermée Θ et donc auxquelles sont liés les groupes (17). Il s'agit d'abord de tous les cas où il y a une forme de Pfaff fermée. Supposons par exemple que la variété V_p est munie de deux connexions linéaires $\overset{\alpha}{\Gamma}{}^i_{jk}$ $(\alpha = 1, 2)$. Alors on peut introduire le tenseur de déformation $T^i_{jk} = \overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} - \overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk}$ et le covecteur T^i_{ik} qui donne la forme de Pfaff $\Theta = T^i_{ik}\, dx^k$. Le faisceau des fonctions f satisfaisant à la condition (12) sera alors le *faisceau associé* à la paire de connexions données. Si la forme Θ est fermée, le théorème 1 ci-dessus nous donne une résolution fine de ce faisceau. Nous avons cité cet exemple, parce qu'il a été le point de départ de nos recherches.

Puis, on peut citer des cas où il y a plusieurs pareilles formes. Telle est la situation, par exemple, dans un espace de Riemann possédant un certain nombre de champs de vecteurs absolument parallèles, etc.

Remarquons aussi que les structures envisagées se transposent sans changements aux variétés complexes. Supposons que V_p est une variété analytique complexe à p dimensions complexes et soit Θ une forme différentielle, holomorphe et réductible, au sens de la formule (13), de celle-ci. On sait que l'opérateur d a dans ce cas une décomposition [4]

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad (\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0)$$

et que les formes holomorphes appartiennent à Ker $\bar{\partial}$. Nous avons donc $\bar{\partial}\Theta = 0$.

Considérons ensuite le faisceau $\mathcal{F}(\Theta)$ de germes de fonctions différentiables complexes de V_p, telles que

$$\bar{\partial} f \wedge \Theta = 0; \tag{18}$$

ce sera le *faisceau caractéristique* de la structure complexe.

Une résolution fine de ce faisceau s'obtient exactement comme pour les Θ-structures réelles, en y remplaçant d par $\bar{\partial}$; remarquons que la condition (14) garde la même expression, n étant le second degré d'une forme complexe ω_{0n}. Pour obtenir le théorème analogue au théorème 1, on répétera la démonstration correspondante en la fondant sur le lemme de Dolbeault [4] au lieu du lemme de Poincaré. Il est encore a remarquer que des considérations analogues ont lieu si l'on remplace les fonctions f par des formes complexes de degré $(s, 0)$ (s-fixé) et les formes ω_{0n} par ω_{sn}.

2. 3. Pour obtenir d'autres résultats il nous faudra considérer la théorie des dérivations de Frölicher et Nijenhuis. Ces auteurs ont donné une construction intrinsèque de la théorie [7], une autre construction étant présentée par Kodaira et Spencer [12]. Ici nous allons reformuler la théorie de Kodaira et Spencer, en supposant qu'on a choisi sur la variété une connexion linéaire Γ, chose qui est toujours possible. Nous verrons alors que la théorie des dérivations et des formes vectorielles (dont la liaison est connue) se présente comme une partie du calcul tensoriel extérieur de Cartan [3].

On sait que E. Cartan [3], Kähler [11], T. Hangan [10] et autres auteurs ont montré qu'on peut édifier un calcul tensoriel avec des tenseurs dont les composantes sont des formes extérieures et que, si la variété est un espace à connexion linéaire, on peut considérer une différentielle covariante et extérieure en même temps. Pour la précision, nous allons récapituler ces choses.

Précisons d'abord la définition de ce genre de tenseurs. Notons par $T^h_k(V_p)$ le fibré vectoriel des tenseurs scalaires (c'est-à-dire usuels) de la variété V_p et par $\wedge^s T^*(V_p)$ celui dont les sections sont des formes extérieures réelles de degré s; en particulier $T^*(V_p)$ est le fibré des covecteurs tangents à la variété envisagée. Alors, nous pouvons considérer sur V_p le fibré vectoriel

$$^s\mathfrak{F}^h_k(V_p) = T^h_k(V_p) \otimes \wedge^s T^*(V_p). \tag{19}$$

Par définition, les sections de l'espace $^s\mathfrak{F}^h_k(V_p)$ seront des *champs de tenseurs (ou, plus court, tenseurs) à composantes s-formes réelles du type* (h, k). Nous les appellerons aussi *F-tenseurs* (ou lieu de formes tensorielles [3, 10]).

Il est clair que dans un voisinage de coordonnées de V_p, un F-tenseur t est représenté par un système de formes extérieures de degré s, du type

$$\omega^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k} = \frac{1}{s!} t^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k \alpha_1 \dots \alpha_s} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_s} \tag{20}$$

et qu'à un changement de coordonnées, le système (20) se transforme d'après la loi tensorielle usuelle. Cela revient au fait que les $t^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k \alpha_1 \dots \alpha_s}$ sont les composantes d'un tenseur scalaire du type $(h, k+s)$, antisymétrique en $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ [11].

En général, une section de $^s\mathfrak{F}^h_k(V_p)$ peut être représentée sous la forme

$$t = \sum_\rho \overset{\rho}{t} \otimes \overset{\rho}{\omega}, \tag{21}$$

où $\overset{\rho}{t}$ sont des tenseurs scalaires et $\overset{\rho}{\omega}$ des formes de degré s et la somme est finie.

Remarquons qu'un F-vecteur contravariant est justement une s-forme vectorielle de la variété V_p [7].

Pour réaliser des opérations avec les F-tenseurs, nous ferons usage des représentations (21) ou (20). Ainsi il est évident comment il faut faire la somme de deux F-tenseurs du même type. Quant à la multiplication, nous aurons ici un produit tensoriel extérieur donné par

$$t \hat{\otimes} \bar{t} = \sum (\overset{\rho}{t} \otimes \overset{\sigma}{t}) \otimes (\overset{\rho}{\omega} \wedge \overset{\sigma}{\bar{\omega}}), \tag{22}$$

ou par le produit extérieur des formes (20) qui sont les composantes des deux F-tenseurs. Il suit que ce produit est associatif et qu'il a la même règle de commutation que le produit extérieur des formes différentielles.

Remarquons aussi qu'à l'aide de la représentation (20) on obtient immédiatement l'opération de contraction des indices d'un F-tenseur.

La représentation (20) donne encore une autre opération importante [11]: la *dérivation algébrique* des F-tenseurs. En effet les dérivées algébriques, au sens de Cartan [2], des formes (20) sont

$$\omega^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k \alpha_1} = \frac{1}{(s-1)!} t^{i_1 \dots i_h}_{j_1 \dots j_k \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} dx^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_s}. \tag{23}$$

Ce sont donc les composantes d'un F-tenseur t' du type $(h, k+1)$ et de degré $s-1$ et il sera par définition la *dérivée algébrique du F-tenseur* t. Elle sera toujours notée par un accent.

On peut aussi définir une opération formelle de différentiation extérieure par

$$dt = \sum_{\rho} \overset{\rho}{t} \otimes d\overset{\rho}{\omega}, \tag{24}$$

mais elle sera moins utile.

Supposons maintenant, qu'on s'est donné sur V_p une connexion linéaire Γ. Elle sera définie par ses composantes locales ω_i^j, qui sont des formes de Pfaff, d'expression locale

$$\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j dx^k, \tag{25}$$

où Γ_{ik}^j sont les coefficients de connexion. A un changement de coordonnées, les formes ω_i^j changent d'après la loi bien connue d'un connexion linéaire [5].

Cella nous permettra de définir de nouvelles opérations sur les F-tenseurs.

Ainsi, si l'on note par ∇ (et aussi par $/$) la dérivation covariante par rapport à la connexion Γ, on peut associer à l'F-tenseur (20), l'F-tenseur de composantes [11].

$$\omega_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_h} = \frac{1}{s!} \nabla_l t_{j_1 \dots j_k \alpha_1 \dots \alpha_s}^{i_1 \dots i_h} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_s} \tag{26}$$

qui est un F-tenseur du même degré s, mais du type $(h, k+1)$. Il sera noté par ∇t et nommé la *dérivée covariante* de t.

Remarquons aussi qu'à l'aide de l'expression (21), l'opération précédente s'écrit

$$\nabla t = \sum_{\rho} (\nabla \overset{\rho}{t}) \otimes \overset{\rho}{\omega}. \tag{27}$$

Enfin, nous considérerons la *différentielle covariante extérieure* d'un F-tenseur, qui, à l'aide de la représentation (20), sera définie localement par [3]:

$$D\omega_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_h} = d\omega_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_h} = \sum_{\lambda=1}^{h} \omega_q^{i_\lambda} \wedge \omega_{j_1 \dots \dots j_k}^{i_1 \dots q \dots i_h} -$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{k} \omega_{j_\lambda}^{q} \wedge \omega_{j_1 \dots q \dots j_k}^{i_1 \dots \dots i_h},$$

où d est la différentielle extérieure. Il est simple de vérifier que $D\omega_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_h}$ se transforment, à un changement de coordonnées, d'après la loi tensorielle.

La différentielle covariante extérieure de l'F-tenseur t sera notée par Dt; elle est un F-tenseur du même type que t mais de degré $s+1$ (s étant le degré de t).

A l'aide de la représentation (2), la même opération est donnée par

$$Dt = \sum_{\rho} (D\overset{\rho}{t} \otimes \overset{\rho}{\omega} + \overset{\rho}{t} \otimes d\overset{\rho}{\omega}). \tag{29}$$

Il est à remarquer que l'opérateur D^2 n'est pas nul. En effet, un calcul simple donne pour un F-vecteur contravariant

$$D^2 \omega^\alpha = - \Omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \tag{30}$$

où Ω_β^α sont les formes de courbure de la connexion Γ, formes données par les *équations de structure* [5]

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta - \Omega_\alpha^\beta. \tag{31}$$

D'autres calculs directs donneront les règles suivantes pour les opérations précédentes

$$(t \hat{\otimes} \bar{t})' = t' \hat{\otimes} \bar{t} + (-1)^{\deg t} t \hat{\otimes} \bar{t}', \tag{32}$$

$$\nabla (t \hat{\otimes} \bar{t}) = \nabla t \hat{\oplus} \bar{t} + t \hat{\otimes} \nabla \bar{t} \tag{33}$$

$$D(t \hat{\otimes} \bar{t}) = Dt \hat{\otimes} \bar{t} + (-1)^{\deg t} t \hat{\otimes} D\bar{t}. \tag{34}$$

De plus, les opérateurs „$'$" et „∇" sont permutables.

Il est bien clair que pour les tenseurs scalaires, D est la différentielle covariante usuelle et pour les F-scalaires, c'est-à-dire formes extérieures, D est la différentielle extérieure d.

Nous avons déjà remarqué que les F-vecteurs sont les formes vectorielles de Frölicher et Nijenhuis. Maintenant, nous retrouverons les opérations avec ces formes. Nous nous guidons d'après l'exposé de Kodaira-Spencer [12].

Ainsi, soit d'abord une s-forme vectorielle $\varphi(\varphi^i)$ et une r-forme scalaire σ. Alors on a le produit

$$\varphi \bar{\wedge} \sigma = \varphi \wedge \sigma' = \varphi^i \wedge \sigma_i, \tag{35}$$

où σ' a les composantes σ_i. Il est clair que $\varphi \bar{\wedge} \sigma$ est une $(s+r-1)$-forme scalaire.

Soient maintenant $\varphi(\varphi^i)$ et $\psi(\psi^i)$ deux formes vectorielles de degrés s et r. Alors on a le produit

$$\varphi \bar{\wedge} \psi = \varphi \hat{\otimes}_c \psi' \quad (\varphi^i \wedge \psi_i^j),$$

où l'indice „c" signifie la contraction du produit et dans les paranthèses on a les composantes du résultat. Ce produit nous donne donc une $(s+r-1)$-forme vectorielle.

Soient de nouveau les formes φ et ψ de plus haut. On définira leur crochet $[\varphi, \psi]$ comme une $(s+r)$-forme vectorielle, dont les composantes sont

$$
\begin{aligned}
[\varphi, \psi]^\beta &= \varphi^\alpha \wedge \psi^\beta_{/\alpha} - (-1)^{sr} \psi^\alpha \wedge \varphi^\beta_{/\alpha} + \\
&+ (-1)^s {}'D\varphi^\alpha \wedge \psi^\beta_\alpha - (-1)^{sr+r} {}'D\psi^\alpha \wedge \varphi^\beta_\alpha + \tau^\beta_{\alpha\gamma} \varphi^\alpha \wedge \psi^\gamma,
\end{aligned} \tag{37}
$$

où $\psi^\alpha_{/\beta}$ et $\varphi^\beta_{/\alpha}$ sont respectivement les composantes de $\nabla\psi$ et $\nabla\varphi$, $'D$ est la différentielle par rapport à la connexion transposée de Γ [16] et $\tau^\beta_{\alpha\gamma}$ est le tenseur de torsion de Γ.

Avec ces définitions, on peut retrouver toutes les formules de Frölicher et Nijenhuis [7].

Nous croyons encore intéressant d'introduire un Γ-crochet pour les formes vectorielles φ et ψ, par une définition qui dépendra de la connexion Γ (ce n'est donc plus une opération liée intrinsèquement à la variété V_p, mais à la connexion Γ). A ce but nous considérons d'abord le produit

$$\varphi \vee \psi = \varphi \hat{\otimes} \nabla\psi \quad (\varphi^i \wedge \psi^j_{/i}) \tag{38}$$

et puis le crochet

$$\Gamma\varphi, \psi\rfloor = \varphi \vee \psi - (-1)^{sr} \psi \vee \varphi. \tag{39}$$

Un calcul simple nous donne pour cette opération

$$\Gamma\varphi, \psi\rfloor = -(-1)^{sr} \Gamma\psi, \varphi\rfloor. \tag{40}$$

Maintenant, le crochet (37) de Frölicher et Nijenhuis s'écrit

$$[\varphi, \psi] = \Gamma\varphi, \psi\rfloor + (-1)^s {}'D\varphi \overline{\wedge} \psi - (-1)^{sr+r} {}'D\psi \overline{\wedge} \varphi + \tau^\alpha_{\beta\gamma} \varphi^\beta \wedge \psi^\gamma. \tag{41}$$

En passant aux dérivations des formes extérieures (scalaires), rappelons d'abord que ce sont des opérateurs u, qui font correspondre à chaque forme σ de degré s une forme $u\sigma$ de degré $s+r$ (on dit alors que u est de degré r), de manière qu'on ait

$$u(\sigma_1 + \sigma_2) = u\sigma_1 + u\sigma_2; \quad u(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = u\sigma_1 \wedge \sigma_2 + (-1)^{rs_1} \sigma_1 \wedge u\sigma_2. \tag{42}$$

Frölicher et Nijenhuis [7] ont démontré que la donnée d'une dérivation de degré r revient à la donnée d'une paire (φ, η) formée par une forme vectorielle φ de degré r et une forme vectorielle η de degré $r+1$, formes qui définissent respectivement l'action de la dérivation sur les fonctions et sur les formes de Pfaff. (Cette action détermine complètement la dérivation.) Kodaira et Spencer ont donné une formule correspondante à ce résultat dans [12].

Si l'on considère sur la variété V_p la connexion linéaire Γ, alors la formule citée de Kodaira et Spencer devient

$$u\sigma = \varphi \vee \sigma + (-1)^r \eta \overline{\wedge} \sigma = \varphi^\alpha \wedge \sigma_{/\alpha} + (-1)^r \eta^\alpha \wedge \sigma_\alpha. \tag{43}$$

Il suit que la formule (43) donne toutes les dérivations de la variété V_p, exprimées à l'aide de la connexion Γ et cette formule permet de retrouver toutes les propriétés des dérivations [7, 12].

Ainsi, soient ${}_{(\alpha)}u\,({}_{(\alpha)}\varphi, {}_{(\alpha)}\eta)$ $(\alpha = 1, 2)$ deux dérivations quelconques, de degrés s et q. Alors

$${}_{(3)}u = [{}_{(1)}u, {}_{(2)}u] = {}_{(1)}u\,{}_{(2)}u - (-1)^{sq}\,{}_{(2)}u\,{}_{(1)}u \tag{44}$$

est une dérivation de degre $s+q$, appelée le *crochet* de ${}_{(1)}u$ et ${}_{(2)}u$. A l'aide de (43) on trouve la représentation de $[{}_{(1)}u, {}_{(2)}u]$ dans la connexion donnée Γ. On a d'abord, pour les dérivées algébriques et covariantes

$$\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\alpha} = 0, \tag{45}$$

$$\sigma_{/\beta\alpha} - \sigma_{/\alpha\beta} = \rho^\lambda_{\alpha\beta} \wedge \sigma_\lambda + \tau^\lambda_{\alpha\beta} \sigma_{/\lambda}, \tag{46}$$

où $\tau^\lambda_{\alpha\beta}$ est la torsion de Γ et

$$\rho^\lambda_{\alpha\beta} = R^\lambda_{\gamma\alpha\beta}\, dx^\gamma, \tag{47}$$

$R^\lambda_{\gamma\alpha\beta}$ étant le tenseur de courbure de Γ.

Ces formules donnent alors par un calcul direct, compte tenu des règles établies antérieurement et en notant ${}_{(3)}u\,({}_{(3)}\varphi, {}_{(3)}\eta)$

$$
\begin{aligned}
{}_{(3)}\varphi = {}_{(1)}\varphi \vee {}_{(2)}\varphi - (-1)^{pq}\,{}_{(2)}\varphi \vee {}_{(1)}\varphi + (-1)^p\,{}_{(1)}\eta \overline{\wedge}\,{}_{(2)}\varphi - \\
- (-1)^{pq+q}\,{}_{(2)}\eta \overline{\wedge}\,{}_{(1)}\varphi + \tau \otimes_c {}_{(1)}\varphi \wedge {}_{(2)}\varphi,
\end{aligned} \tag{48}
$$

le dernier terme étant $\tau^\alpha_{\beta\gamma}\,{}_{(1)}\varphi^\beta \wedge {}_{(2)}\varphi^\gamma$,

$$
\begin{aligned}
{}_{(3)}\eta = {}_{(1)}\eta \overline{\wedge}\,{}_{(2)}\eta - (-1)^{pq}\,{}_{(2)}\eta \overline{\wedge}\,{}_{(1)}\eta + (-1)^p\,{}_{(1)}\varphi \vee {}_{(2)}\eta - \\
- (-1)^{pq+q}\,{}_{(2)}\varphi \vee {}_{(1)}\eta + \rho \hat{\oplus}_c\, {}_{(1)}\varphi \wedge {}_{(2)}\varphi,
\end{aligned} \tag{49}
$$

le dernier terme étant $\rho^\alpha_{\beta\gamma} \wedge {}_{(1)}\varphi^\beta \wedge {}_{(2)}\varphi^\gamma$.

Il est d'ailleurs à remarquer qu'on trouve aisément le passage des formules de [12] chez nous. En effet, dans [12], la dérivation u est représentée par la forme vectorielle φ et par une forme locale ξ. En comparant la formule (43) avec la formule correspondante de [12], on voit que si $u = u(\varphi, \xi)$ alors le même u est donnée dans la connexion Γ par (φ, η), où :

$$\eta^\lambda = \xi^\lambda + {}'\omega^\lambda_\alpha \wedge \varphi^\alpha \tag{50}$$

(l'accent note la connexion transposée).

Cette fomule est utile en diverses questions. Ainsi, la différentielle extérieure d est une dérivation donnée par $\varphi^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$ et $\xi^\lambda = 0$. On obtient alors $d(\delta^\alpha_\beta, \tau^\alpha_{\beta\gamma})$. Puis, on a

$$Du = [d, u], \tag{51}$$

un opérateur fondamental agissant sur les dérivations [7]. On peut l'expliciter à l'aide de (48) et (49), ou plus directement avec (50). En effet, Du est donnée par $(d\varphi - \xi, -d\xi)$ [12], d'où il suit que, par rapport à Γ il a les représentants

$$('D\varphi - \eta, \quad 'D^2\varphi - 'D\eta), \tag{52}$$

où $'D$ est la différentielle covariante dans la connexion transposée de Γ.

Une autre remarque: l'opérateur ι de [12] était donné par

$$\iota\varphi = (\varphi, d\varphi), \tag{53}$$

ce qui revient maintenant à

$$\iota\varphi = (\varphi, 'D\varphi). \tag{54}$$

Remarquons encore que la notion de „F-relatedness" de Frölicher et Nijenhuis [9] trouve aussi un cadre naturel dans la théorie des F-tenseurs, car une relation entre les F-tenseurs contravariants ou covariants de deux variétés différentiables, liées par une application, s'obtient comme dans le cas des tenseurs scalaires.

2.4. Les considérations des §§ **2.1** et **2.2** ont été faites à l'aide des formes différentielles de la variété V_p et à l'aide de la différentielle extérieure, qui est une dérivation de degré 1. Il est donc naturel de chercher des résultats analogues pour d'autres dérivations du premier degré. Une analyse des conditions du théorème 2, § 1, montre qu'il faut considérer des dérivations δ, pour lesquelles on ait

$$\delta^2 f = 0 \tag{55}$$

pour toute fonction f de V_p.

Compte tenu du fait que:

$$\delta^2 = \frac{1}{2}[\delta, \delta]$$

formule valable pour toute dérivation de degré impair), on trouve avec (48) et (49) les formes qui définissent $\frac{1}{2}\delta^2$:

$$\begin{aligned} &\varphi \vee \varphi - \eta \overline{\wedge} \varphi + \frac{1}{2}\tau \otimes_c \varphi \wedge \varphi, \\ &\eta \wedge \eta - \varphi \vee \eta + \frac{1}{2}\rho \,\widehat{\otimes}_c \varphi \wedge \varphi. \end{aligned} \tag{56}$$

Dans une carte locale, ces formes reviennent à:

$$\begin{aligned} &\varphi^\beta_{[i}\varphi^\alpha_{j]/\beta} - \varphi^\alpha_\beta \eta^\beta_{ij} + \frac{1}{2}\tau^\alpha_{\beta\gamma}\varphi^\beta_{[i}\varphi^\gamma_{j]}, \\ &\frac{1}{2}\eta^\alpha_{\beta[h}\eta^\beta_{ij]} - \varphi^\beta_{[h}\eta^\alpha_{ij]/\beta} + \varphi^\beta_{[i}\varphi^\gamma_{j}R^\alpha_{h]\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{57}$$

Il suit que la condition (55) est vérifiée si et seulement si

$$\varphi \vee \varphi - \eta \overline{\wedge} \varphi + \frac{1}{2}\tau \otimes_c \varphi \wedge \varphi = 0, \tag{58}$$

ou

$$\varphi^\beta_{[i}\varphi^\alpha_{j]/\beta} - \varphi^\alpha_\beta \eta^\beta_{ij} + \frac{1}{2}\tau^\alpha_{\beta\gamma}\varphi^\beta_{[i}\varphi^\gamma_{j]} = 0. \tag{59}$$

Les dérivations du premier degré de la variété V_p qui satisfont à la condition (55) (ou (58)) seront appelées *dérivations spéciales*. Si de plus φ^α_β est un tenseur non dégénéré, nous dirons que la dérivation δ est *non dégénérée*.

Il suit que si δ est une dérivation spéciale, non dégénérée de V_p et si, pour la simplicité, on considère que Γ a la torsion nulle, on a

$$\eta^\gamma_{\lambda\mu} = \tilde{\varphi}^\gamma_\alpha \varphi^\beta_{(\lambda}\varphi^\alpha_{\mu)/\beta}, \tag{60}$$

où $\tilde{\varphi}^\gamma_\alpha$ est le tenseur réciproque de φ^β_α.

Donc, *les dérivations spéciales, non dégénérées de V_p sont en correspondance biunivoque avec les tenseurs mixtes non dégénérées φ^β_α de la variété V_p.*

Il en résulte que toute structure géométrique possédant un tel tenseur mixte possède aussi une dérivation spéciale, non dégénérée, intrinsèquement liée à celle-ci. C'est, par exemple, le cas des structures presque-complexes ou complexes et presque-produit.

Si l'on considère dans la formule (60) $\varphi^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha$, on trouve $\eta^\gamma_{\lambda\mu} = 0$ et on arrive justement à la différentielle extérieure d.

Pour que la dérivation δ ait la propriété $\delta^2\sigma = 0$, pour toute forme σ, il faut ajouter à (58) la condition exprimant l'annulation de la seconde expression (56) (si $\delta = d$ ceci revient aux identités de Bianchi [5]), mais si l'on considère une variété à deux dimensions et si δ est une dérivation spéciale de V_2, alors on a toujours $\delta^2 = 0$.

Rappelons aussi que sur une variété V_2 orientable, les structures complexes et les structures riemanniennes sont en correspondance biunivoque (à chaque g_{ij} on associe le tenseur ε_{ij} $(\sqrt{\det(g_{ij})}, 0, 0, -\sqrt{\det(g_{ij})})$ et le tenseur ε_i^j donne une structure complexe, ce procédé étant reversible), ce qui montre que pour une telle variété, on peut associer à chaque métrique riemannienne une dérivation spéciale.

Revenons à notre but principal. D'après (43) on a

$$\delta f = \varphi^{\alpha}_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} dx^{\gamma}, \tag{61}$$

ce qui montre que si l'on a (localement) $\delta f = 0$, alors f est une constante.

Signalons aussi que, en vertu de (55) et (42), on a pour toute fonction f et pour toute forme σ

$$\delta^2 (f\sigma) = f \delta^2 \sigma, \tag{62}$$

ce qui montre que l'ensemble des formes extérieures σ de degré s qui sont de la forme

$$\sigma = \delta^2 \lambda \quad (\operatorname{eg} \lambda = s - 2) \tag{63}$$

est un sousmodule du module des formes de degré s, sur l'algèbre des fonctions différentiables de V_p. Ce sousmodule sera noté par $\mathfrak{D}^s(U)$, (U étant un ouvert de V_p). On peut aussi parler du faisceau de germes correspondant, qui sera noté par $\mathfrak{D}^s$.

Nous allons considérer maintenant une variété V_p munie d'une dérivation spéciale, non dégénérée δ. Alors, nous pourrons faire usage du pseudocomplexe formé par le groupe gradué $\Omega(U)$, donné par la formule (1) et par l'opérateur δ. En général (Ω, δ) ne sera pas un complexe de cochaînes, mais il nous donnera un groupe de jets qui sera noté par

$$\mathcal{J}^*(\Omega(U)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}^{*n}(\Omega(U)),$$

analogue au groupe $\mathcal{J}(\Omega(U))$.

Au groupe précédent on peut de nouveau appliquer la théorie du § 1, en considérant les diverses homomorphismes qui y ont été introduits, etc. Par exemple, nous avons

$$i_1 \omega_n = (\omega_n, \delta\omega_n), \tag{64}$$

$$D_1(\omega_n \cdot \omega_{n+1}) = (\delta\omega_n - \omega_{n+1}, \delta^2 \omega_n - \delta\omega_{n+1}) \tag{65}$$

et ainsi de suite. (Bien entendu, ces notations ne doivent pas être confondues avec celles du § 2. 1.)

Nous remarquons que cette fois-ci il sera possible de considérer des jets harmoniques, d'après la théorie générale du § 1.

Notre but est maintenant de donner une nouvelle application du théorème 2, § 1. On l'obtiendra en considérant les pseudocomplexes $\Omega(U) = \bigoplus_q \Omega^{q+n}(U)$ $(q \geqslant 1\ (n = 0, 1, 2, \ldots))$ et les groupes des jets correspondants $\mathcal{J}^*_q(\Omega(U))$. Ici on prendra un sousgroupe T de $\mathcal{J}^*_q(\Omega(U))$, défini par la formule (52, § 1), avec les décompositions (53, § 1), où

$$U^n = \Omega^{q+n}(U), \quad V^{n+1} = \mathfrak{D}^{q+n+1}(U)\ (n \geqslant 0). \tag{66}$$

On prendra aussi, pour sousgroupe V^0 de $\Omega^q(U)$ le sousgroupe formé par les formes extérieures ω_q telles que

$$d\omega_q \in \mathfrak{D}^{q+1}(U). \tag{67}$$

Avec ce choix, les conditions (58, § 1) sont immédiatement vérifiées.

Remarquons maintenant que si μ est une p-forme scalaire on a $\delta\mu = 0$ d'une part et, d'autre part, l'équation

$$\delta\zeta = \mu, \tag{68}$$

où ζ est une forme inconnue de degré $p - 1$, se réduit à une seule équation aux dérivées partielles*) qui, compte tenu du fait que δ est non dégénérée et de la formule (43), a évidemment des solutions locales. Il en résulte

Lemme. *Pour toute dérivation spéciale, non dégénérée δ, il y a un plus petit nombre naturel q, $0 \leqslant q \leqslant p - 1$, tel que si μ est une forme de degré $l > q$ satisfaisant à la condition $\delta\mu = 0$, il y a localement une solution ζ de l'équation $\delta\zeta = \mu$.*

Le nombre q sera nommé le *nombre caractéristique* de la dérivation δ et nous supposerons que c'est lui qui intervient dans les notations (66) ci-dessus.

Maintenant, il est aisé de voir que la suite (59, § 1), (avec $\alpha = 1$) est une suite exacte. En effet, il ne reste qu'à considérer une l-forme $(l > q)$ ω telle que

$$\delta\omega = \delta^2 \lambda \tag{69}$$

et à voir que ω est de la forme $\delta\xi + \delta^2 \tau$ pour un certain ouvert U de V_p. Mais de (69) on a évidemment

$$\omega = \delta\lambda + \mu, \tag{70}$$

avec $\delta\mu = 0$, d'où, par le lemme précédent, on obtient le résultat désiré (on a même $\tau = 0$).

Si nous notons encore par $\mathcal{F}_{(q)}(V_p)$ le faisceau de germes correspondant à V^0 il résulte que le suite

$$0 \to \mathcal{F}_{(q)}(V_p) \xrightarrow{i_1} T^0 \xrightarrow{D_1} T^1 \xrightarrow{D_1} \cdots \tag{71}$$

est une résolution fine du faisceau $\mathcal{F}_{(q)}(V_p)$. La qualité de faisceaux fins est valable pour T^α parce que $\mathfrak{D}^h(U)$ sont, comme on a déjà remarqué, des modules sur l'algèbre des fonctions différentiables de V_p.

Enfin, on considérera la suite (17) qui correspond à la suite (71) ci-dessus et on trouvera le

Théorème 2. *Les groupes de cohomologie de la variété (V_p) à coefficients dans le faisceau $\mathcal{F}_{(q)}(V_p)$ sont donnés par les formules*

*) Le plus simple, c'est de prendre ζ sous la forme canonique. On aura alors une seule fonction inconnue.

(72) $$H^k(V_p, \mathcal{F}_{(q)}(V_p)) \approx \operatorname{Ker} D_k^*/\operatorname{Im} D_{k-1}^*$$

où D^* est induit par (71) *(l'indice k notant le degré).*

(Bien entendu, ces notations ont une autre signification qu'en (17).)

Nous avons obtenu ainsi une théorie de cohomologie et, donc, des invariants globaux de toute structure géométrique sur V_p, qui possède un tenseur mixte φ_α^β, non dégénéré.

Remarquons encore à cette occasion qu'une variété V_p qui est munie d'une dérivation quelconque du premier degré δ a une riche structure géométrique qui est liée aux champs de tenseurs du type (1,1) et (1,2), obtenus à l'aide de la décomposition d'après Frölicher-Nijenhuis [7] de δ, ainsi qu'à des objets qui seront considérés à la fin du §3 (les δ-connexions).

§3. Applications aux formes vectorielles d'une variété différentiable

3.1. Nous avons déjà considéré au §2.3 les formes vectorielles de la variété différentiable V_p sous l'aspect des F-vecteurs contravariants. Dans le paragraphe présent, nous supposerons une fois pour toutes que la variété V_p, qui satisfait aux mêmes conditions que dans le §2, est munie d'une connexion linéaire $\Gamma(\omega_\beta^\alpha)$. Cela nous permettra d'appliquer les formes du §2.3 et surtout de considérer la différentielle covariante extérieure D.

Notons par ${}^s\mathcal{S}(U)$ le module des s-formes vectorielles définies sur l'ouvert U de V_p et soit

(1) $$\mathcal{S}(U) = \bigoplus_{s=0}^{p} {}^s\mathcal{S}(U).$$

Le module $\mathcal{S}(U)$, muni de l'opérateur $D: {}^s\mathcal{S}(U) \to {}^{s+1}\mathcal{S}(U)$ constitue un autre exemple de pseudocomplexe de cochaînes, qui peut être envisagé dans tout espace à connexion linéaire. La formule (30, §2), montre qu'il n'est pas un complexe de cochaînes que si la connexion Γ est sans courbure, cas qui sera exclu dans la suite.

Un jet de degré s du pseudocomplexe $\mathcal{S}(U)$ est, d'après la définition générale (§1), une paire $(\varphi_s, \varphi_{s-1})$, formée par deux formes vectorielles de degrés s et, respectivement, $s+1$, c'est-à-dire, d'après le §2, une dérivation de degré s. Dans la suite, nous noterons l'ensemble de ces jets par ${}^s\mathcal{J}(U)$ et $\mathcal{J}(U) = \bigoplus_{s=0}^{p} {}^s\mathcal{J}(U)$. Les faisceaux de germes associés seront ${}^s\mathcal{S}$, ${}^s\mathcal{J}$, etc.

Remarquons que le pseudocomplexe $\mathcal{S}(U)$ avec l'opérateur D_0 du §1 a été considéré déjà par beaucoup d'auteurs [8, 10, 12, 13]. L'opérateur D intervient, d'une manière indirecte, dans [12].

Parmi les homomorphismes du §1, considérons de nouveau i_1 et D_1. Ils sont donnés ici par

(2) $$i_1(\varphi_s) = (\varphi_s, D\varphi_s),$$

(3) $$D_1(\varphi_s, \varphi_{s+1}) = (D\varphi_s - \varphi_{s+1}, D^2\varphi_s - D\varphi_{s+1}),$$

où, pour $D^2\varphi_s$, on peut employer (30, §2).

Si la variété V_p possède une métrique riemannienne, on peut, d'après [12], définir un produit scalaire pour les formes vectorielles et donc les considérations du §1 permettent d'introduire les *jets harmoniques* (ou les *dérivations harmoniques*).

Les produits des formes vectorielles, qui ont été introduites au §2, ne nous donnent pas des applications pour les considérations du §1.2, parce que D ne satisfait pas, à leur égard, à la dernière des conditions (45, §1), Donc, pour obtenir un produit intéressant pour les jets il faut procéder autrement. Par exemple, si nous pouvons considérer sur V_p un champ de tenseurs scalaires T_{jk}^i, tel que

(4) $$DT_{jk}^i = 0,$$

alors la formule

(5) $$\lambda^i = T_{jk}^i \varphi^j \wedge \psi^k$$

définit un produit des formes vectorielles qui a les propriétés désirées si le degré de φ est un nombre pair.

Il est de nouveau important de trouver des applications du théorème 2, §1. A ce but, nous allons d'abord établir un „lemme de Poincaré" (plus direct que celui de [17]).

Lemme. *Pour tout espace à connexion linéaire, il y a un plus petit nombre naturel $q \leqslant p-1$, tel que la condition*

(6) $$D\lambda^\alpha = 0 \quad (\deg \lambda > q)$$

implique l'existence locale d'une forme vectorielle σ^α, satisfaisant à

(7) $$\lambda^\alpha = D\sigma^\alpha.$$

En effet, nous pouvons considérer les équations (7) et leurs conséquences différentielles qui s'obtiennent en appliquant D aux deux membres de (7), compte tenu de (6) et de (30, §2). On obtient ainsi le système

(8) $$\begin{aligned} d\sigma^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \sigma^\beta &= \lambda^\alpha, \\ \Omega_\beta^\alpha \wedge \sigma^\beta &= 0, \end{aligned}$$

où Ω_α^β sont les formes de courbure de la connexion Γ.

Si λ^α sont de degré p, alors la seconde équation (8) est vérifiée pour σ^β quelconques de degré $p-1$ et la première admet évidemment des solutions locales.

L'affirmation de notre lemme se trouve ainsi vérifiée.

Le nombre q défini par le lemme précédent sera nommé la *caractéristique* de la connexion linéaire Γ de V_p.

Maintenant on trouve une application du théorème 2, § 1 analogue à celle du § 2.4. Ainsi introduisons le pseudocomplexe

$$\mathfrak{S}_q(U) = \oplus {}^{q+n}\mathfrak{S}(U) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

où q est la caractéristique de Γ et son groupe des jets $\underset{q}{\mathcal{J}}{}^*(U)$. Considérons le sousgroupe ${}^s\mathfrak{D}(U)$ de ${}^s\mathfrak{S}(U)$ défini par les s-formes vectorielles sur U du type $D^2\mu$ et remarquons qu'en vertu de la formule (30, § 2), celui-ci est un module sur l'algèbre des fonctions différentiables de V_p. Puis, considérons un sousgroupe T de $\underset{q}{\mathcal{J}}{}^*(U)$, qui ait l'expression (52, § 1) et les décompositions (53, § 1), où

$$U^n = {}^{q+n}\mathfrak{S}(U), \quad V^{n+1} = {}^{q+n+1}\mathfrak{D}(U) \quad (n \geqslant 0) \tag{9}$$

et, finalement, le sousgroupe V^0 de ${}^q\mathfrak{S}(U)$ défini par les formes vectorielles φ_q telles que

$$D\varphi_q \in {}^{q+1}\mathfrak{D}(U). \tag{10}$$

La situation evisagée est complètement analogue à celle du § 2.4 et on obtient par les mêmes raisonnements la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{F}_q(\Gamma) \xrightarrow{i_1} T^0 \xrightarrow{D_1} T^1 \xrightarrow{D_1} \ldots, \tag{11}$$

où $\mathfrak{S}_q(\Gamma)$ est le faisceau de germes associé au sousgroupe V^0 ci-dessus et il sera nommé le *faisceau caractéristique de la connexion* Γ.

Il est alors évident que (11) est une résolution fine du faisceau $\mathcal{F}_q(\Gamma)$, donc, en considérant le complexe de cochaînes défini par les sections globales $\Gamma(T^h)$ et par l'opérateur induit D^* correspondant à D_1, nous avons le

Théorème 1. *Les groupes de cohomologie de la variété V_p à coefficients dans le faisceau $\mathcal{F}_q(\Gamma)$ sont donnés par*

$$H^k(V_p, \mathcal{F}_q(\Gamma)) \approx \operatorname{Ker} D_k^* / \operatorname{Im} D_{k-1}^* \tag{12}$$

(D_k^* est l'action de D^* pour le degré k).

Les groupes $H^k(V_p, \mathcal{F}_q(\Gamma))$ seront nommés les *groupes de cohomologie de l'espace à connexion linéaire* (Γ). On a obtenu donc une théorie de cohomologie et des invariants globaux pour un espace à connexion linéaire quelconque.

Bien entendu, les formules (12) sont aussi valables pour les faisceaux $\mathcal{F}_h(\Gamma)$ $(h > q)$, définis par le même procédé. Ainsi, par exemple, la suite

$$0 \to \mathcal{F}_{p-1}(\Gamma) \xrightarrow{i_1} \underset{(p-1)}{T^0} \xrightarrow{D_1} \underset{(p-1)}{T^1} \to 0$$

est une résolution fine du faisceau $\mathcal{F}_{p-1}(\Gamma)$. Elle donne la suite des groupes (qui n'est plus exacte)

$$\Gamma(T^0) \xrightarrow{D^*} \Gamma(T^1) \to 0 \tag{13}$$

et il s'ensuit

$$\begin{gathered} H^0(V_p, \mathcal{F}_{p-1}(\Gamma)) \approx \operatorname{Ker} D^*, \; H^1(V_p, \mathcal{F}_{p-1}(\Gamma)) \approx \Gamma(T^1)/\operatorname{Im} D^*, \\ H^l(V_p, \mathcal{F}_{p-1}(\Gamma)) = 0 \quad (l \geqslant 2). \end{gathered} \tag{14}$$

Cela nous donne donc deux groupes, non triviaux, associés globalement à un espace à connexion linéaire quelconque.

Faisons encore une remarque à l'égard de notre configuration. Comme dans le § 2.4, il suit que si

$$D\lambda^\alpha = D^2\xi^\alpha, \tag{15}$$

on a globalement

$$\lambda^\alpha = D\xi^\alpha + \nu^\alpha, \tag{16}$$

où

$$D\nu^\alpha = 0. \tag{17}$$

Notons par ${}^s\mathfrak{C}(U)$ le sousgroupe de ${}^s\mathfrak{S}(U)$, formé par les s-formes vectorielles vérifiant (17). Alors, la relation (16) montre que pour chaque s la suite

$${}^s\mathfrak{S}(V_p)/{}^s\mathfrak{C}(V_p) \xrightarrow{D'} {}^{s+1}\mathfrak{S}(V_p)/{}^{s+1}\mathfrak{C}(V_p) \xrightarrow{D''} {}^{s+2}\mathfrak{S}(V_p)/{}^{s+2}\mathfrak{D}(V_p), \tag{18}$$

est exacte (D' et D'' sont induits par D).

Pour obtenir des produits entre les classes de cohomologie de (12), il faut supposer que l'espace à connexion linéaire envisagé possède encore une structure supplémentaire. Ainsi, si l'on a un champ de tenseurs scalaires T^i_{jk} sur V_p, vérifiant (4) et

$$T^\alpha_{\beta\gamma}\Omega^\gamma_\lambda = T^\gamma_{\beta\lambda}\Omega^\alpha_\gamma, \tag{19}$$

alors le produit (5) induit un produit entre deux classes de cohomologie dont la première est de dimension paire. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} T^\alpha_{\beta\gamma}\varphi^\beta \wedge D^2\xi^\gamma = -T^\alpha_{\beta\gamma}\varphi^\beta \wedge \Omega^\gamma_\lambda \wedge \xi^\lambda = -T^\gamma_{\beta\lambda}\varphi^\beta \wedge \Omega^\alpha_\gamma \wedge \xi^\lambda = \\ = D^2(T^\gamma_{\beta\lambda}\varphi^\beta \wedge \xi^\lambda), \end{aligned}$$

ce qui montre que le produit, au sens de (43, § 1), de deux jets du sousgroupe T de $\underset{q}{\mathcal{J}}{}^*(U)$ appartient à T d'où suit notre affirmation.

Un autre cas, qui permet la définition d'un produit est celui d'une connexion d'espace symétrique, pour laquelle on s'est donné, à chaque valeur de s, un module complémentaire de ${}^s\mathfrak{D}(V_p)$ dans ${}^s\mathfrak{F}(V_p)$, celui-ci étant invariant par l'opérateur D; notons-le par ${}^s\bar{\mathfrak{D}}(V_p)$.

Alors, on a pour chaque s-forme vectorielle ψ une décomposition unique

$$\psi = D^2\lambda + \chi \quad (\chi \in {}^s\bar{\mathfrak{D}}(V_p)), \tag{20}$$

ce qui permet de définir le produit

$$(\varphi_* \psi)^\alpha = \Omega^\alpha_\beta \wedge \varphi^\gamma \wedge \lambda^\beta{}_{/\gamma}, \tag{21}$$

produit qui est évidemment distributif. Ce produit est déterminé, car l'espace étant symétrique on a $\Omega^\alpha_{\beta/\gamma} = 0$, d'où

$$\varphi_* \psi = \varphi \vee D^2\lambda \tag{22}$$

et $D^2\lambda$ est uniquement déterminé (tandis que λ ne l'était pas). Enfin on trouve immédiatement

$$D(\varphi_* \psi) = D\varphi_* \psi + (-1)^{\deg\varphi} \varphi_* D\psi. \tag{23}$$

Par la définition (21), le sousgroupe T est fermé par rapport à ce produit et il suit qu'on obtient un produit entre deux classes de cohomologie de la connexion Γ, dont la première est de dimension paire.

3. 2. Nous terminons en indiquant la possibilité de généraliser le schèma du § **3. 1.** A ce but, nous allons présenter une généralisation simple de la notion de dérivée covariante et donc de connexion linéaire, généralisation envisagée dans [19] et [18], où l'on part d'autres considérations.

Supposons que, sur la variété V_p on s'est donné une dérivation quelconque δ, du premier degré.*) En rappelant que les composantes ω^β_α d'une connexion linéaire de V_p sont liées dans l'intersection de deux voisinages de coordonnées par les relations

$$\omega^{\beta'}_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \omega^\beta_\alpha + \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\gamma} d\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\alpha'}}\right), \tag{24}$$

nous définirons une δ-*connexion linéaire* (ou, d'après [19], une *quasiconnexion*) sur V_p, par la donné, dans chaque voisinage de coordonnées, d'un système de formes de Pfaff π^β_α, tel que dans l'intersection de deux voisinages on ait les relations

$$\pi^{\beta'}_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \pi^\beta_\alpha + \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\gamma} \delta\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\alpha'}}\right). \tag{25}$$

*) On pourrait d'ailleurs considérer une dérivation d'un degré quelconque.

Il est clair que ces relations sont compatibles (elles représentent la loi de transformation d'un objet géométrique), car δ a les mêmes règles de calcul que d. D'ailleurs, on peut aussi donner une définition invariante de la δ-connexion, dans le sens de [16]. A ce but, considérons que δ est donnée, comme au § **2.4**, par la 1-forme vectorielle $\varphi^\alpha(\varphi^\alpha_\beta)$ et par la 2-forme $\eta^\alpha(\eta^\alpha_{\beta\gamma})$ et envisageons l'opérateur linéaire Φ, défini par le champ de tenseurs φ^α_β, qui agit sur les champs de vecteurs contravariants de la variété V_p. Alors, une δ-connexion sera une application $\mathfrak{F}$-linéaire $\nabla : \mathfrak{D}^1 \to \mathfrak{D}^1$, où $\mathfrak{F}$ est l'algèbre des fonctions de classe C^∞, $\mathfrak{D}^1$ le module des champs de vecteurs et $\mathfrak{D}^1$-celui des prolongements de champ de vecteurs de la première espèce, sur V_p, application qui doit satisfaire à la condition [16]

$$\operatorname{Res} \nabla(X) = \Phi X \quad (X \in \mathfrak{D}^1). \tag{26}$$

A l'aide de ces définitions, on peut développer la théorie des δ-connexions d'après les schémas usuels pour les connexions linéaires. Par exemple, la *différentielle covariante* d'un F-vecteur sera donnée par

$$D\lambda^\alpha = \delta\lambda^\alpha + \pi^\alpha_\beta \wedge \lambda^\beta, \tag{27}$$

on peut définir les *formes de courbure* à l'aide des relations

$$\Omega^\beta_\alpha = \pi^\gamma_\alpha \wedge \pi^\beta_\gamma - \delta\pi^\beta_\alpha \tag{28}$$

etc.

Il est pourtant à remarquer que les formes Ω^β_α données par (28) ne sont pas les composantes d'un F-tenseur que lorsque δ est une dérivation spéciale (§ **2.4**).

Si l'on suppose de plus que la dérivation δ satisfait à la condition $\delta^2 = 0$, les formules (27) et (28) permettent de retrouver la formule (30, § 2), ce qui fait possible les considérations du § **3.1.** Cella nous donnera une théorie de cohomologie pour les variétés V_p munies d'une δ-connexion linéaire à $\delta^2 = 0$, ce qui est justement l'application que nous avions en vue.

On trouve encore un nombre assez grand d'applications de la théorie des pseudocomplexes de cochaînes, aux formes vectorielles d'une variété différentiable, dans les travaux [8, 10, 12, 13, 15].

BIBLIOGRAPHIE

1. de Barros C. M. — *Espaces infinitésimaux*. Thèse, Paris, 1964.
2. Cartan E. — *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Paris, Hermann, 1945.
3. Cartan E. — *Leçons sur les espaces de Riemann*. Paris, Gauthier—Villars, 1946.
4. Chern S. S. — *Complex manifolds. Lecture notes*. Univ. of Chicago, 1955—1956.
5. Favard J. — *Cours de géométrie différentielle locale*. Paris, Gauthier—Villars, 1957.

6. Godement R. — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Paris, Hermann, 1957.
7. Frölicher A., Nijenhuis A. — *Theory of vector-valued forms*. I. Proc. Kön. Akad. Wet. Amsterdam, 59, 1956, p. 338—359.
8. Frölicher A., Nijenhuis A. — *Some new cohomology invariants for complex manifolds*. Proc. Kön. Akad. Wet. Amsterdam, 59, 1956, p. 540—566.
9. Frölicher A., Nijenhuis A. — *Invariance of vector form operations under mappings*. Comm. Math. Helv., 34, 1960, p. 227—248.
10. Hangan T. — *Asupra cohomologiei spațiilor cu curbură constantă*. An. Univ. București, (Mat.—Mec.), 1964, p. 111—120.
11. Kähler E. — *Der innere Differentialkalkül*. Rend. di Mat. e appl. XXI, 1962, p. 425—523.
12. Kodaira K., Spencer D. C. — *Multifoliate structures*. Ann. of Math., 74, 1961, p. 52—100.
13. Libermann P. — *Sur certaines résolutions de faisceaux*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 1735—1737.
14. Nijenhuis A., Richardson R. W. — *Cohomology and deformations in graded Lie algebras*. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 72, 1965, p. 1—29.
15. Spencer D. C. — *De Rham theorems and Neumann decompositions associated with partial differential equations*. „Structures feuilleutées" Coll. C. N. R. S., Grenoble, 1963, p. 1—20.
16. Vaisman I. — *Sur quelques formules du calcul de Ricci global*. Comm. Math. Helv., 41, 1966-67, p. 73—87.
17. Vaisman I. — *Remarques sur la théorie des formes-jet*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264 A, 1967, p. 351—354.
18. Vamanu E. — *Despre structuri aproape-produs și conexiuni liniare complet reductibile asociate*. An. șt. Univ. Iași, T. XIII, 1967.
19. Wong Y. C. — *Linear connections and quasiconnections on a differentiable manifold*. Tôhoku Math. J., vol. 14, 1962, p. 48—63.

PSEUDOCOMPLEXE DE COLANȚURI ȘI APLICAȚIILE LOR GEOMETRICE

Rezumat

Prin pseudocomplex de colanțuri se înțelege un grup graduat dat de formula (1), împreună cu homomorfismele (2). Acestuia i se asociază prin (4), (5) grupul jeturilor sale.

În primul paragraf al lucrării se cercetează probleme algebrice privind pseudocomplexele și jeturile lor, arătîndu-se că jeturile formează un complex de colanțuri și dîndu-se rezultate privitoare la grupurile de cohomologie ale subcomplexelor sale.

În cel de-al doilea paragraf, se aplică teoria algebrică precedentă la formele diferențiale scalare ale unei varietăți diferențiabile paracompacte, găsindu-se rezoluții fine ale unor fascicule legate de structuri geometrice ale varietății. Pentru a le obține se dă de asemenea o expunere a calculului tensorial exterior și a teoriei derivărilor, care are ca element nou prezentarea acestora din urmă ca o parte a calculului tensorial exterior într-un spațiu cu conexiune liniară.

În ultimul paragraf se fac aplicații analoge pentru pseudocomplexe definite cu formele vectoriale ale varietății V_p. Remarcăm aci definirea și calculul unor grupuri de cohomologie asociate unei conexiuni liniare pe varietate.

LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES COMPLEXES DE CÔNES QUADRATIQUES DANS L'ESPACE PROJECTIF A TROIS DIMENSIONS

PAR

D. RIMER

Communication présentée à la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza" octobre 1966

1. Le repère canonique. L'étude différentielle des variétés de cônes quadratiques à un ou deux paramètres a été l'objet des Notes [5, 6, 7, 8]. Nous abordons maintenant l'étude des variétés à trois paramètres dans l'espace projectif P_3. Ces variétés ont été, en 1961, l'objet des recherches de Gh. Gheorghiev et I. Popa [2], comme un cas d'exception dans l'étude des variétés de cônes. Nous utiliserons ici la méthode suivie dans nos travaux antérieurs, cités ci-dessus.

Nous introduisons un espace auxiliaire, l'espace projectif à neuf dimensions, S_9, dont les points sont les images des quadriques de P_3, auquel nous attribuons pour groupe fondamental la représentation du groupe projectif de P_3 comme groupe de transformations sur les quadriques. En rapportant les espaces P_3 et S_9 aux repères $\{A_\alpha, U\}$, respectivement $\{A^{\alpha\beta}, E\}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3;\ A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha})$, les équations des groupes fondamentaux en P_3 et S_9, sont [5]:

$$x^{\alpha'} = t^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta}, \tag{1.1}$$

$$a_{\alpha\beta} = t^{\lambda'}_{\alpha} t^{\mu'}_{\beta} a_{\lambda'\mu'}\ ;\quad A^{\alpha\beta} = t^{\alpha}_{\lambda'} t^{\beta}_{\mu'} A^{\lambda'\mu'}. \tag{1.1'}$$

Les équations de mouvement des repères en P_3 et S_9 sont [5]:

$$dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta, \tag{1.2}$$

$$dA^{\lambda\mu} = -\omega^\lambda_\alpha A^{\alpha\mu} - \omega^\mu_\beta A^{\beta\lambda}, \tag{1.2'}$$

les pfaffiens ω^β_α satisfaisant aux équations de structure: